

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ**
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**ТАГАНРОГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**Сборник заданий к типовым расчетам
и контрольным работам по математическим
дисциплинам**

Часть I

Таганрог 2006

Рецензенты:

заведующий кафедрой математического анализа ТГПИ, доктор физ.-мат. наук, профессор **А.А. Илюхин**;

профессор РГУ, доктор физ.-мат. наук **А.В. Наседкин**.

Авторский состав:

Афонин А.А., Бокарева Т.А., Бородицкий М.П., Гадельшин В.К., Зуев В.Н., Каибханов К.Э., Камышникова Т.В., Клово А.Г., Кодачигова Л.К., Лепский А.Е., Мархель Э.Г., Нестерова Г.Г., Никитина А.В., Ольховой А.Ф., Орехов Б.И., Панова О.Н., Сапунцов Н.Е., Саркисов Г.С., Семенистый В.В., Суховерхова Н.И., Фирсов И.П., Фомин Ю.Т., Цирулик В.Г.

Сборник заданий к типовым расчетам и контрольным работам по математическим дисциплинам. Ч. I. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2006. – 543с.

Предлагаемый «Сборник заданий к типовым расчетам и контрольным работам по математическим дисциплинам» содержит задачи стандартного курса высшей математики для студентов технических и экономических специальностей. В двенадцати разделах пособия содержится около 6 000 задач.

В начале каждой главы приводится сводка теоретических положений, определений и формул, а также дается подробное решение типичных задач, входящих в варианты.

Пособие рекомендуется для студентов и преподавателей технических и экономических вузов, может быть использовано как для очной, а так и для заочной и дистанционной форм обучения.

Главный редактор – доктор физ.-мат. наук, профессор А.И. Сухинов.

Заместители гл. редактора:

кандидат физ.-мат. наук, доцент М.П. Бородицкий,

кандидат физ.-мат. наук, доцент К.Э. Каибханов.

СОДЕРЖАНИЕ

СОДЕРЖАНИЕ.....	3
ПРЕДИСЛОВИЕ.....	7
I. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. МНОГОЧЛЕНЫ.....	9
1. Комплексные числа.....	9
2. Многочлены.....	15
Задания.....	20
II. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ.....	30
1. Предел числовой последовательности.....	30
2. Элементарные функции.....	31
3. Предел функции.....	32
4. Непрерывность функции.....	38
5. Бесконечно малые величины и их сравнение.....	42
Задания.....	44
III. МАТРИЦЫ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ.....	62
1. Матрицы. Действия над матрицами.....	62
2. Определители.....	65
3. Обратная матрица.....	71
4. Ранг матрицы.....	72
5. Системы линейных алгебраических уравнений.....	74
Задания.....	81
IV. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ.....	109
1. Векторная алгебра.....	109
2. Прямая на плоскости.....	115
3. Полярная система координат.....	116
4. Плоскость и прямая в пространстве.....	117
5. Кривые второго порядка на плоскости.....	123
Задания.....	125
V. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО.....	132
1. Производная. Правила дифференцирования.....	132
2. Таблица производных.....	133
3. Правила дифференцирования.....	133
4. Производные высших порядков.....	136
5. Дифференцирование функций, заданных неявно или параметрически.....	137
6. Уравнения касательной и нормали.....	139
7. Дифференциал первого порядка.....	140

8. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора.....	141
9. Раскрытие неопределённостей по правилу Лопитала.....	142
Задания.....	146
VI. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИЙ. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА	
ФУНКЦИИ.....	167
1. Возрастание и убывание функции. Точки экстремума.....	167
2. Выпуклость и вогнутость.....	169
3. Асимптоты.....	169
4. Построение графика функции.....	170
5. Элементарные преобразования графиков.....	176
Задания.....	180
VII. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОГО	
ПЕРЕМЕННОГО.....	192
1. Неопределённый интеграл.....	192
2. Таблица основных неопределённых интегралов.....	192
3. Основные свойства неопределённого интеграла.....	193
4. Интегрирование методом замены переменного.....	193
5. Интегрирование по частям.....	195
6. Интегрирование рациональных функций.....	198
7. Интегрирование тригонометрических функций.....	201
8. Интегрирование некоторых иррациональных функций.....	203
9. Определённый интеграл.....	204
10. Несобственные интегралы.....	208
11. Вычисление площадей плоских фигур.....	214
12. Вычисление длины дуги.....	217
13. Вычисление объёмов тел.....	218
14. Приближённое вычисление определённых интегралов.....	219
Задания.....	222
VIII. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ	
МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ.....	261
1. Арифметическое пространство. Функции многих переменных.....	261
2. Предел и непрерывность функции.....	262
3. Частные производные.....	263
4. Дифференциал функции многих переменных.....	266
5. Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности....	268
6. Дифференцирование сложной функции.....	269
7. Дифференцирование неявно заданной функции.....	270
8. Якобиан. Замена переменных.....	272
9. Формула Тейлора.....	278

10. Экстремум функции многих переменных.....	280
11. Условный экстремум.....	283
12. Наибольшее и наименьшее значения функции многих переменных в замкнутой области.....	288
Задания.....	290
IX. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ.....	316
1. Двойной интеграл.....	316
2. Замена переменных в двойном интеграле.....	319
3. Приложения двойного интеграла.....	322
4. Тройной интеграл.....	328
5. Замена переменных в тройном интеграле.....	329
Задания.....	334
X. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ.....	361
1. Арифметическое пространство.....	361
2. Линейное пространство.....	363
3. Евклидово пространство.....	367
4. Линейные операторы.....	368
5. Собственные векторы и собственные значения.....	376
6. Квадратичные формы.....	383
Задания.....	392
XI. РЯДЫ.....	418
1. Числовые ряды. Сходимость числового ряда.....	418
2. Признаки сходимости числовых рядов.....	420
3. Знакопеременные ряды. Признак сходимости Лейбница.....	427
4. Функциональные ряды.....	428
5. Степенные ряды.....	430
6. Ряды Тейлора.....	432
7. Ряды Фурье.....	441
Задания.....	449
XII. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ.....	471
1. Определение дифференциального уравнения. Задача Коши.....	471
2. Уравнение с разделяющимися переменными.....	471
3. Однородные дифференциальные уравнения.....	473
4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.....	476
5. Уравнение Бернулли.....	479
6. Уравнение в полных дифференциалах.....	479
7. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка.....	480
8. Линейное однородное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами.....	483

9. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами.....	485
10. Метод вариации постоянных.....	492
11. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям.....	494
12. Системы дифференциальных уравнений. Линейные системы.....	495
13. Линейные однородные системы с постоянными коэффициентами.....	497
14. Линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений.....	503
15. Задания.....	511

ПРЕДИСЛОВИЕ

"Сборник заданий" является итогом четырехлетней работы авторского коллектива кафедры высшей математики. Он аккумулирует, в известной мере, многолетний опыт работы кафедры высшей математики ТТИ ЮФУ (бывшего ТРГУ).

Пособие состоит из двух частей. Часть I содержит более 4 600 задач по 12 разделам, традиционно входящим в программу подготовки по математике студентов I курса технических специальностей.

Мы надеемся, что наш "Сборник" будет полезен также студентам экономических специальностей, а некоторые разделы будут использоваться и для обучения "чистых гуманитариев".

Структура книги такова. В начале каждого раздела содержатся краткие теоретические сведения, которые, естественно, не могут заменить строгое и последовательное изложение теории в стабильных учебниках и конспектах лекций. Назначение этой информации – напомнить теоретический минимум, который непосредственно связан с решением задач. Для систематического изучения теории мы рекомендуем «Конспект лекций по курсу "Математика". Часть I», разработанный авторским коллективом под руководством профессора кафедры И.П. Фирсова. Затем приводятся подробно рассмотренные примеры решения, как правило, почти всех типовых задач данного раздела. Завершают каждый раздел варианты задач – по 30 в каждом задании.

Таким образом, в пределах каждой учебной группы есть возможность обеспечить обучаемого индивидуальным заданием. В результате обучаемый получает возможность самостоятельно приобрести навыки решения типовых задач.

Другое назначение этого пособия – обеспечить преподавателей, проводящих практические занятия, достаточным набором вариантов к контрольным работам и, собственно, типовым расчетам.

Наконец, но не в последнюю очередь, материалы настоящего пособия могут быть использованы для многоуровневого контроля и оценки качества подготовки студентов по математике. Опубликовав достаточно обширный банк аттестованных заданий, мы обозначаем ориентиры для наших студентов. Мы как бы говорим им: "Вот все, что требуется для практического овладения вузовским курсом математики для будущих инженеров. Если вы в состоянии решить подавляющее большинство наших заданий, значит, ваши практические знания по математике соответствуют стандартам, принятым в нашем университете".

Естественно, в пособии такого объема возможны ошибки и неточности. Мы заранее благодарны всем, кто сообщит о них по адресу: 347928, Таганрог, пер. Некрасовский, 44, корпус "Д", кафедра высшей математики или по адресу электронной почты sai@rec.tsure.ru. Эта книга не смогла бы появиться в печатном виде, если бы не напряженная работа инженеров кафедры высшей математики: Т.А. Десятовой, С.П. Суриной, которым благодарны главный редактор и авторский коллектив.

I. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА. МНОГОЧЛЕНЫ

1. Комплексные числа

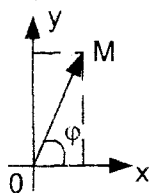
Множеством комплексных чисел называют множество всевозможных выражений вида $z = x + yi$ (x, y – действительные числа, i – некоторый символ), на котором введены операции сложения и умножения по следующим правилам:

$$1) (x_1 + y_1i) + (x_2 + y_2i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i,$$

$$2) (x_1 + y_1i)(x_2 + y_2i) = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i.$$

Из определения следует, что $i^2 = -1$. Множество всех комплексных чисел обозначают символом \mathbf{C} . Два комплексных числа $z_1 = x_1 + y_1i$ и $z_2 = x_2 + y_2i$ считаются равными, если $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$. Действительные числа x и y называют соответственно действительной и мнимой частями числа $z = x + yi$, при этом $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Операции сложения и умножения комплексных чисел обладают всеми свойствами этих операций на множестве действительных чисел \mathbf{R} , являющемся подмножеством \mathbf{C} ($z = x + yi \in \mathbf{R}$, если $\operatorname{Im} z = y = 0$). Разностью чисел z_1 и z_2 называют число $z = z_1 + (-1)z_2$, при этом $z = z_1 - z_2$. Частным от деления числа z_1 на число z_2 называют решение уравнения $z_2 \cdot z = z_1$, при этом $z = z_1/z_2$. Деление возможно, если делитель z_2 отличен от 0.

Комплексные числа $z = x + yi$ могут быть отождествлены с



точками $M(x, y)$ плоскости с введённой прямоугольной системой координат; при таком отождествлении плоскость называют комплексной плоскостью.

Можно сказать, что устанавливается взаимно-однозначное соответствие между комплексными числами $z = x + yi$ и векторами $\overline{OM}\{x, y\}$. Число

$\rho = |\overline{OM}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ называют модулем числа z и обозначают $|z|$. Угол

φ между вектором \overline{OM} и положительным направлением оси Ox называют аргументом числа z и обозначают $\operatorname{Arg} z$. Аргумент числа, в отличие от модуля, определяется неоднозначно: все аргументы числа отличаются друг от друга на $2\pi n$, $n \in \mathbf{Z}$. Договариваются о главном значении аргумента $\operatorname{Arg} z$; обычно берут $0 \leq \arg z < 2\pi$ или

$-\pi < \arg z \leq \pi$. Если $z = x + yi$ и $x \neq 0$, то $\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \theta \cdot \pi$, где

$$\theta = \begin{cases} 0 & \text{при } x > 0, \\ 1 & \text{при } x < 0. \end{cases} \quad \text{Если же } x = 0, \text{ то } \arg z = \begin{cases} \pi/2 & \text{при } y > 0, \\ -\pi/2 & \text{при } y < 0. \end{cases}$$

Аргумент числа $z = 0$ не определён.

Из определения $|z|$ и $\arg z$ следует $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$, где $\rho = |z|$, $\varphi = \arg z$. Отсюда получаем

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi). \quad (1)$$

Это есть тригонометрическая форма числа z .

Число $x - yi$ называется сопряжённым к числу $z = x + yi$; при этом пишут $x - yi = \bar{z}$. Имеет место равенство $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$. Операция сопряжения оказывается полезной при делении чисел: $z_1/z_2 = z_1 \bar{z}_2 / (z_2 \bar{z}_2) = z_1 \bar{z}_2 / |z_2|^2$.

Обозначим $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$ (формула Эйлера). С помощью этой формулы из тригонометрической формы (1) получаем показательную форму $z = \rho e^{i\varphi}$ числа z . В частности, $e^{2\pi i} = 1$, $e^{\pi i} = -1$, $e^{i\varphi}$, как функция от φ , является периодической с периодом 2π .

Справедливы формулы

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad |z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|,$$

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg z_1 + \arg z_2, \quad \arg(z_1/z_2) = \arg z_1 - \arg z_2.$$

Это делает удобным использование тригонометрической и показательной форм при умножении и делении чисел. Из этих формул следуют формулы Муавра в тригонометрической $z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ и показательной $z^n = \rho^n \cdot e^{in\varphi}$ формах.

Число $w = \rho e^{i\varphi}$ называется корнем n -й степени числа $z = \rho e^{i\varphi}$, если $w^n = z$. Любое ненулевое число $z = \rho e^{i\varphi}$ имеет ровно n различных корней n -й степени. Эти корни находятся по формуле

$$w_k = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right),$$

где k пробегает значения $0, 1, 2, \dots, n-1$; $\sqrt[n]{\rho}$ – арифметический корень n -й степени из положительного числа ρ .

Модуль разности $|z_1 - z_2|$ чисел равен расстоянию между точками z_1 и z_2 комплексной плоскости.

Пример 1. Найти сумму, произведение и частное чисел

$$z_1 = -1 + 2i \quad \text{и} \quad z_2 = 2 - 3i.$$

Решение. $z_1 + z_2 = (-1 + 2i) + (2 - 3i) = (-1 + 2) + (2 - 3)i = 1 - i$;

$$z_1 \cdot z_2 = (-1 + 2i)(2 - 3i) = -2 + 4i + 3i - 6i^2 = -2 + 7i - 6(-1) = -2 + 7i + 6 = 4 + 7i;$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{-1 + 2i}{2 - 3i} = \frac{(-1 + 2i)(2 + 3i)}{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \frac{-2 + 4i - 3i + 6i^2}{2^2 - (3i)^2} = \\ &= \frac{-2 + i - 6}{4 + 9} = \frac{-8 + i}{13} = -\frac{8}{13} + \frac{1}{13}i. \end{aligned}$$

Пример 2. Решить уравнение $2z^2 + z + 2 = 0$.

Решение. Воспользуемся формулой корней квадратного уравнения

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 2 \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-15}}{4} = \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{4}.$$

Таким образом,

$$z_1 = \frac{-1 - \sqrt{15}i}{4} = -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{15}}{4}i, \quad z_2 = \frac{-1 + \sqrt{15}i}{4} = -\frac{1}{4} + \frac{\sqrt{15}}{4}i.$$

Пример 3. Выполнить действия. Ответ записать в алгебраической

форме $z = \frac{(1 - i\sqrt{3})^{36}}{(-\sqrt{3} - i)^{12}}$.

Решение. $z = \frac{z_1^{36}}{z_2^{12}} = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$,

где ρ – модуль комплексного числа z ;

φ – главное значение аргумента комплексного числа.

$$\rho = |z| = \frac{\rho_1^{36}}{\rho_2^{12}}; \quad \rho_1 = |z_1|; \quad \rho_2 = |z_2|;$$

$$\arg z = 36\varphi_1 - 12\varphi_2; \quad \varphi_1 = \arg z_1; \quad \varphi_2 = \arg z_2.$$

Найдем модули и главные значения аргументов комплексного числа.

Считаем, что $-\pi < \varphi \leq \pi$.

а) $z_1 = 1 - i\sqrt{3}$.

$$\rho_1 = |z_1| = \sqrt{1 + 3} = 2,$$

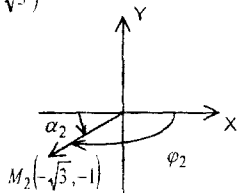
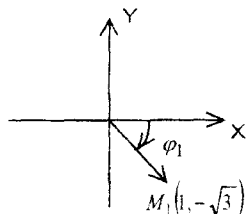
$$\varphi_1 = \arg z_1 = \arctg\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = -\arctg\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}.$$

$$б) z_2 = -\sqrt{3} - i.$$

$$\rho_2 = |z_2| = \sqrt{3+1} = 2.$$

$$\alpha_2 = \arctg \frac{|y|}{|x|} = \arctg \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6},$$

$$\varphi_2 = \arg z_2 = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}.$$



Тогда

$$\rho = |z| = \frac{\rho_1^{36}}{\rho_2^{12}} = \frac{2^{36}}{2^{12}} = 2^{24},$$

$$\varphi = 36\varphi_1 - 12\varphi_2 = 36\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 12\left(-\frac{5\pi}{6}\right) = -12\pi + 10\pi = -2\pi.$$

$$z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) = 2^{24}(\cos(-2\pi) + i \sin(-2\pi)) = 2^{24}.$$

Пример 4. Решить уравнение

$$z^3 + \frac{(-2 + 2\sqrt{3}i)^7 \cdot i^{29}}{(1-i)^9} = 0.$$

Решение. Обозначим $z_1 = -2 + 2\sqrt{3}i$, $z_2 = i$, $z_3 = 1 - i$. Найдём z_1^7 , z_2^{29} , z_3^9 . Для этого представим каждое из чисел z_1, z_2, z_3 в

показательной форме: $|z_1| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4$,

$$\arg z_1 = \arctg \frac{2\sqrt{3}}{-2} + \pi = -\arctg \sqrt{3} + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2}{3}\pi, \quad z_1 = 4e^{\frac{2}{3}\pi i};$$

$$-\arctg \sqrt{3} + \pi = -\frac{\pi}{3} + \pi = \frac{2}{3}\pi \quad |z_2| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1, \quad \arg z_2 = \pi/2, \quad z_2 = e^{\frac{\pi}{2}i};$$

$$|z_3| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}, \quad \arg z_3 = \arctg \frac{-1}{1} = \arctg(-1) = \frac{-\pi}{4},$$

$$z_3 = \sqrt{2}e^{\frac{-\pi}{4}i}$$

$$\text{Имеем } \frac{z_1^7 \cdot z_2^{29}}{z_3^9} = \frac{\left(4e^{\frac{2}{3}\pi i}\right)^7 \cdot \left(e^{\frac{\pi}{2}i}\right)^{29}}{\left(\sqrt{2}e^{\frac{-\pi}{4}i}\right)^9} = \frac{4^7 \cdot e^{\frac{14}{3}\pi i} \cdot e^{\frac{29}{2}\pi i}}{(\sqrt{2})^9 \cdot e^{\frac{-9}{4}\pi i}}$$

$$= \frac{2^{14}}{2^{9/2}} \cdot e^{\frac{14}{3}\pi i + \frac{29}{2}\pi i + \frac{9}{4}\pi i} = 2^{19/2} \cdot e^{\frac{357}{12}\pi i} = 2^{\frac{19}{2}\pi i} \cdot e^{20\pi i - \frac{17}{12}\pi i} = 2^{\frac{19}{2}} \cdot e^{\frac{17}{12}\pi i}.$$

Наше уравнение принимает вид $z^3 + 2^{\frac{19}{2}} \cdot e^{\frac{17}{12}\pi i} = 0$ или

$$z^3 = -2^{\frac{19}{2}} \cdot e^{\frac{17}{12}\pi i}; \quad z^3 = (-1) \cdot 2^{\frac{19}{2}} \cdot e^{\frac{17}{12}\pi i}; \quad z^3 = e^{\pi i} \cdot 2^{\frac{19}{2}} \cdot e^{\frac{17}{12}\pi i}; \quad z^3 = 2^{\frac{19}{2}} \cdot e^{\frac{17}{12}\pi i + \pi i};$$

$$z^3 = 2^{\frac{19}{2}} \cdot e^{2\pi i + \frac{5}{12}\pi i} = 2^{\frac{19}{2}} \cdot e^{\frac{5}{12}\pi i}$$

Таким образом, корни исходного уравнения являются корнями третьей степени числа $2^{\frac{19}{2}} \cdot e^{\frac{5}{12}\pi i}$. Имеем $\rho = \left| 2^{\frac{19}{2}} \cdot e^{\frac{5}{12}\pi i} \right| = 2^{\frac{19}{2}}$,

$$\varphi = \arg\left(2^{\frac{19}{2}} \cdot e^{\frac{5}{12}\pi i} \right) = \frac{5}{12}\pi. \quad \text{Найдём наши корни по формуле}$$

$$w_k = \sqrt[3]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Отсюда получаем

$$w_0 = \sqrt[3]{2^{\frac{19}{2}}} \left(\cos \frac{\frac{5}{12}\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{5}{12}\pi}{3} \right) = 2^{\frac{19}{6}} \left(\cos \frac{5}{36}\pi + i \sin \frac{5}{36}\pi \right),$$

$$w_1 = \sqrt[3]{2^{\frac{19}{2}}} \left(\cos \frac{\frac{5}{12}\pi + 2\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{5}{12}\pi + 2\pi}{3} \right) = 2^{\frac{19}{6}} \left(\cos \frac{29}{36}\pi + i \sin \frac{29}{36}\pi \right),$$

$$w_2 = \sqrt[3]{2^{\frac{19}{2}}} \left(\cos \frac{\frac{5}{12}\pi + 4\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{5}{12}\pi + 4\pi}{3} \right) = 2^{\frac{19}{6}} \left(\cos \frac{53}{36}\pi + i \sin \frac{53}{36}\pi \right).$$

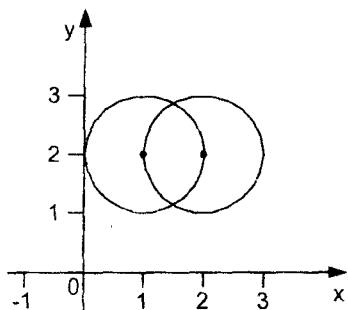
Числа w_0, w_1, w_2 (записанные в тригонометрической форме) и являются решением нашего уравнения. Найдём показательную и алгебраическую формы этих чисел:

$$w_0 = 2^{\frac{19}{6}} \cdot e^{\frac{5}{36}\pi i}, \quad w_1 = 2^{\frac{19}{6}} \cdot e^{\frac{29}{36}\pi i}, \quad w_2 = 2^{\frac{19}{6}} \cdot e^{\frac{53}{36}\pi i} \quad \text{— показательная форма.}$$

$$w_0 = 2^{\frac{19}{6}} \cos \frac{5}{36}\pi + i \cdot 2^{\frac{19}{6}} \sin \frac{5}{36}\pi, \quad w_1 = 2^{\frac{19}{6}} \cos \frac{29}{36}\pi + i \cdot 2^{\frac{19}{6}} \sin \frac{29}{36}\pi,$$

$$w_2 = 2^{\frac{19}{6}} \cos \frac{53}{36}\pi + i \cdot 2^{\frac{19}{6}} \sin \frac{53}{36}\pi \quad \text{— алгебраическая форма.}$$

Пример 5. Решить: а) систему уравнений; б), в) неравенства (геометрически):



$$\text{а) } \begin{cases} |z - 2 - 2i| = 1, \\ |z - 1 - 2i| = 1; \end{cases}$$

$$\text{б) } \operatorname{Re} z \leq \operatorname{Im} z;$$

$$\text{в) } 1 < |z - 2 + 3i| < 2.$$

Решение. а) Перепишем первое уравнение в виде $|z - (2 + 2i)| = 1$. Из геометрического смысла модуля разности двух комплексных чисел следует, что множество решений

этого уравнения задаёт окружность радиусом 1 с центром в точке $(2 + 2i)$. Аналогично находим, что решением уравнения $|z - 1 - 2i| = 1$ является окружность радиусом 1 с центром в точке $(1 + 2i)$. Решением нашей системы уравнений являются точки пересечений этих окружностей.

Запишем z в алгебраической форме: $z = x + yi$.

$$\text{Тогда } \begin{cases} |x + yi - 2 - 2i| = 1, & \begin{cases} |(x - 2) + (y - 2)i| = 1, \\ |(x - 1) + (y - 2)i| = 1; \end{cases} \\ |x + yi - 1 - 2i| = 1; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x - 2)^2 + (y - 2)^2 = 1, \\ (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 1. \end{cases}$$

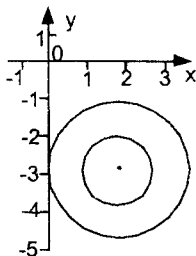
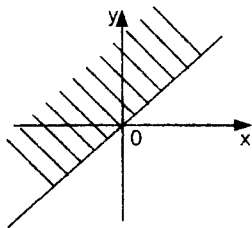
Отсюда, вычитая из первого уравнения второе, получим $(x - 2)^2 - (x - 1)^2 = 0$ и находим $x = 3/2$. Подставив это значение в первое уравнение, найдём y : $(-1/2)^2 + (y - 2)^2 = 1$; $y_1 = 2 - \sqrt{3}/2$, $y_2 = 2 + \sqrt{3}/2$. Таким образом, решениями нашей системы являются

$$\text{числа } z_1 = \frac{3}{2} + \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i, \quad z_2 = \frac{3}{2} + \left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)i.$$

б) Представление z в алгебраической форме приводит нас к неравенству $x \leq y$. Решением этого неравенства является замкнутая полуплоскость (заштриховано).

в) Перепишем неравенство в виде

$$1 < |z - (2 - 3i)| < 2.$$



Учитывая, что модуль разности двух комплексных чисел равен расстоянию между соответствующими точками комплексной плоскости, приходим к выводу, что решением этого неравенства является кольцо с центром в точке $(2 - 3i)$, внутренний радиус которого равен 1, а внешний равен 2.

2. Многочлены

Многочленом (или полиномом) степени n , $n \in \mathbb{N}$ называется функция

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0, \quad (2)$$

где a_j , $0 \leq j \leq n$ – известные комплексные числа (коэффициенты), при этом старший коэффициент a_n отличен от 0, z – переменная комплексная величина. Степень многочлена $f(z)$ обозначается $\deg f(z)$.

На множестве всех многочленов очевидным образом вводятся операции сложения и умножения.

Число z_0 называется нулём многочлена $f(z)$, если $f(z_0) = 0$.

Теорема 1 (о делении многочленов). Для любых многочленов $f(z)$ и $g(z)$ существуют многочлены $h(z)$ и $r(z)$ такие, что:

- 1) $f(z) = h(z)g(z) + r(z)$,
- 2) $\deg r(z) < \deg g(z)$.

При этом $h(z)$ и $r(z)$ определяются однозначно.

Многочлен $h(z)$ называется частным, а $r(z)$ – остатком от деления $f(z)$ на $g(z)$. При этом оказывается, что $\deg f = \deg g + \deg h$. Если $r(z) \equiv 0$, то говорят, что $f(z)$ делится на $g(z)$.

Теорема 2. Число z_0 является нулём многочлена $f(z)$ в том и только в том случае, если $f(z)$ делится на линейный многочлен $(z - z_0)$.

Число z_0 называется нулём кратности m многочлена $f(z)$, если $f(z)$ делится на $(z - z_0)^m$ и не делится на $(z - z_0)^{m+1}$. Можно дать другое, равносильное приведённому, определение: z_0 является нулём кратности

т для многочлена $f(z)$, если $f(z)$ представим в виде $f(z) = (z - z_0)^n g(z)$, где $g(z)$ – такой многочлен, что $g(z_0) \neq 0$.

Теорема 3 (основная теорема алгебры). Любой многочлен степени $n \geq 1$ имеет ровно n нулей, если каждый нуль считать столько раз, какова его кратность.

Следствием основной теоремы алгебры является то, что если z_1, z_2, \dots, z_m – нули многочлена (1) кратностей k_1, k_2, \dots, k_m соответственно, то $f(z)$ представим в виде

$$f(z) = a_n (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_m)^{k_m},$$

при этом $z_j \neq z_l$ при $j \neq l$, $k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$.

Для того чтобы несократимая дробь p/q (p – целое, q – натуральное) была нулём многочлена $f(z)$ с целыми коэффициентами a_j , необходимо, чтобы число p было делителем свободного члена a_0 , а число q – делителем старшего коэффициента a_n . В частности, если $f(z)$ имеет целые коэффициенты a_j и $a_n = 1$, то рациональными нулями такого многочлена могут быть только целые числа, которые являются делителями свободного члена a_0 .

Теорема 4. Если коэффициенты многочлена $f(z)$ – действительные числа и $z_0 = \alpha + i\beta$ – нуль $f(z)$, то $\bar{z}_0 = \alpha - i\beta$ также является нулём этого многочлена.

Из последней теоремы следует, что если $f(z)$ – многочлен с действительными коэффициентами, то он представим в виде

$$f(z) = a_n (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_m)^{k_m} (z^2 + p_1 z + q_1)^{r_1} (z^2 + p_2 z + q_2)^{r_2} \dots (z^2 + p_s z + q_s)^{r_s}, \quad (3)$$

где z_j, p_j, q_j – действительные числа и квадратичные функции неразложимы (т.е. имеют отрицательный дискриминант), $z_j \neq z_l$ при $j \neq l$.

При этом $k_1 + k_2 + \dots + k_m + 2(r_1 + r_2 + \dots + r_s) = n$.

Если $f(z), g(z)$ – многочлены, то функция $h(z) = g(z)/f(z)$ называется рациональной функцией или рациональной дробью. Рациональная дробь $g(z)/f(z)$ называется правильной, если $\deg g(z) < \deg f(z)$. Любую неправильную дробь можно представить в виде суммы многочлена и правильной рациональной дроби. Если $h(z) = g(z)/f(z)$ – правильная рациональная дробь с действительными коэффициентами и $f(z)$ имеет разложение (2), то $h(z)$ допускает следующее представление в виде суммы простейших дробей:

$$\begin{aligned}
 h(z) = \frac{g(z)}{f(z)} &= \frac{A_1^{(1)}}{z-z_1} + \frac{A_2^{(1)}}{(z-z_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}^{(1)}}{(z-z_1)^{k_1}} + \frac{A_1^{(2)}}{z-z_2} + \frac{A_2^{(2)}}{(z-z_1)^2} + \dots \\
 &\dots + \frac{A_{k_2}^{(2)}}{(z-z_2)^{k_2}} + \dots + \frac{A_{h_m}^{(m)}}{(z-z_m)^{k_m}} + \frac{B_1^{(1)}z + C_1^{(1)}}{z^2 + p_1z + q_1} + \frac{B_2^{(1)}z + C_2^{(1)}}{(z^2 + p_2z + q_2)^2} + \dots \\
 &\dots + \frac{B_n^{(1)}z + C_n^{(1)}}{(z^2 + p_1z + q_1)^n} + \dots + \frac{B_s^{(s)}z + C_s^{(s)}}{z^2 + p_sz + q_s} + \dots + \frac{B_r^{(s)}z + C_r^{(s)}}{(z^2 + p_sz + q)^s} \quad (4)
 \end{aligned}$$

Коэффициенты $A_i^{(j)}$, $B_i^{(j)}$, $C_i^{(j)}$ находятся путём приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях z у многочлена $g(z)$ и многочлена, который получается в числителе правой части (3) после приведения суммы к общему знаменателю (метод неопределённых коэффициентов).

Пример 1. Найти все нули многочлена $f(z) = z^4 - 2z^3 + 7z^2 - 30z + 50$ и разложить его на неразложимые множители с действительными коэффициентами, если известен один его нуль $z_1 = 2 + i$.

Решение. $f(z)$ имеет действительные коэффициенты, поэтому наряду с $z_1 = 2 + i$ нулём $f(z)$ является также $z_2 = \bar{z}_1 = 2 - i$.

Значит, $f(z)$ делится на

$$(z - z_1)(z - \bar{z}_1) = (z - 2 - i)(z - 2 + i) = (z - 2)^2 - i^2 = z^2 - 4z + 5.$$

Разделим $f(z)$ на $z^2 - 4z + 5$ уголком

$$\begin{array}{r}
 z^4 - 2z^3 + 7z^2 - 30z + 50 \\
 \underline{z^4 - 4z^3 + 5z^2} \\
 2z^3 + 2z^2 - 30z + 50 \\
 \underline{2z^3 - 8z^2 + 10z} \\
 10z^2 - 40z + 50 \\
 \underline{10z^2 - 40z + 50} \\
 0
 \end{array}
 \left| \begin{array}{l}
 z^2 - 4z + 5 \\
 \hline
 z^2 + 2z + 10
 \end{array} \right.$$

Таким образом, $f(z) = (z^2 - 4z + 5)(z^2 + 2z + 10)$. Найдём нули второго множителя: $z^2 + 2z + 10 = 0$, $z_{3,4} = -1 \pm 3i$. Итак, нулями многочлена $f(z)$ являются: $z_1 = 2 + i$, $z_2 = 2 - i$, $z_3 = -1 - 3i$, $z_4 = -1 + 3i$. Многочлен $f(z)$ разлагается на неразложимые множители (квадратные функции с отрицательными дискриминантами) следующим образом:

$$z^4 - 2z^3 + 7z^2 - 30z + 50 = (z^2 - 4z + 5)(z^2 + 2z + 10).$$

Пример 2. Дан многочлен $f(z) = z^4 - 6z^3 + 10z^2 + 2z - 15$:

а) подобрать целые нули многочлена среди делителей свободного члена;

б) разложить $f(z)$ на линейные и неразложимые квадратичные множители с действительными коэффициентами;

в) разложить $f(z)$ на линейные множители с комплексными коэффициентами;

г) разложить дробь $(2z - 3) / f(z)$ на простейшие дроби с действительными коэффициентами.

Решение. а) Делителями числа 15 являются: $\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15$.

В результате проверки убеждаемся, что $z_1 = -1$ является нулём $f(z)$:

$f(-1) = 0$. Следовательно, $f(z)$ делится на $(z - z_1) = z + 1$. Выполним деление

$$\begin{array}{r|l}
 z^4 - 6z^3 + 10z^2 + 2z - 15 & z + 1 \\
 \underline{z^4 + z^3} & \\
 -7z^3 + 10z^2 & \\
 \underline{-7z^3 - 7z^2} & \\
 17z^2 + 2z & \\
 \underline{17z^2 + 17z} & \\
 -15z - 15 & \\
 \underline{-15z - 15} & \\
 0 &
 \end{array}$$

Имеем: $f(z) = (z + 1)(z^3 - 7z^2 + 17z - 15)$. Найдём целые нули второго множителя среди делителей свободного члена (-15): $\pm 1; \pm 3; \pm 5; \pm 15$.

В результате проверки убеждаемся, что $z_2 = 3$ является нулём многочлена $(z^3 - 7z^2 + 17z - 15)$ и, следовательно, многочлена $f(z)$. Значит, $f(z)$ делится на $(z - z_1)(z - z_2) = (z + 1)(z - 3) = z^2 - 2z - 3$. Разделим $f(z)$ на этот квадратный трёхчлен:

$$\begin{array}{r}
 \frac{z^4 - 6z^3 + 10z^2 + 2z - 15}{z^4 - 2z^3 - 3z^2} \quad \left| \frac{z^2 - 2z - 3}{z^2 - 4z + 5} \right. \\
 \hline
 -4z^3 + 13z^2 + 2z - 15 \\
 -4z^3 + 8z^2 + 12z \\
 \hline
 5z^2 - 10z - 15 \\
 5z^2 - 10z - 15 \\
 \hline
 0
 \end{array}$$

Таким образом, $f(z) = (z^2 - 2z - 3)(z^2 - 4z + 5)$. При этом второй множитель $(z^2 - 4z + 5)$ не имеет целых (и даже действительных) нулей. Итак, $f(z)$ имеет лишь два целых нуля: $z_1 = -1$ и $z_2 = 3$.

б) Так как $z^2 - 4z + 5 = 0$ имеет лишь комплексные нули $z_3 = 2 - i$ и $z_4 = 2 + i$, то искомым разложением будет уже полученное $f(z) = (z^2 - 4z + 5) \cdot (z + 1)(z - 3)$.

в) $f(z)$ имеет 4 однократных (говорят, простых) нуля: $z_1 = -1$, $z_2 = 3$, $z_3 = 2 - i$, $z_4 = 2 + i$. Старший коэффициент $f(z)$ равен 1. Поэтому $f(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)$ или $f(z) = (z + 1)(z - 3) \times (z - 2 + i)(z - 2 - i)$.

г) Дробь $(2z - 3)/f(z)$ является правильной. Имеем

$$\begin{aligned}
 \frac{2z - 3}{z^4 - 6z^3 + 10z^2 + 2z - 15} &= \frac{2z - 3}{(z + 1)(z - 3)(z^2 - 4z + 5)} = \\
 &= \frac{A}{z + 1} + \frac{B}{z - 3} + \frac{Cz + D}{z^2 - 4z + 5}.
 \end{aligned}$$

Приведём последнюю сумму к общему знаменателю:

$$\frac{A(z - 3)(z^2 - 4z + 5) + B(z + 1)(z^2 - 4z + 5) + (Cz + D)(z + 1)(z - 3)}{(z + 1)(z - 3)(z^2 - 4z + 5)} = \frac{2z - 3}{f(z)}.$$

Так как $f(z)$ равен знаменателю левой части, то получим равенство $A(z - 3)(z^2 - 4z + 5) + B(z + 1)(z^2 - 4z + 5) + (Cz + D)(z + 1)(z - 3) \equiv 2z - 3$.

Неизвестные коэффициенты A , B , C , D можно найти, раскрыв скобки в левой части, сгруппировав слагаемое по степеням z и приравняв соответствующие коэффициенты в левой и правой частях равенства, при этом получится система из 4-х линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
 (A + B + C)z^3 + (-7A - 3B - 2C + D)z^2 + (17A + B - 3C - 2D)z + \\
 + (-15A + 5B - 3D) = 2z - 3.
 \end{aligned}$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях z , получаем систему

$$\begin{cases} A + B + C = 0, \\ -7A - 3B - 2C + D = 0, \\ 17A + B - 3C - 2D = 2, \\ -15A + 5B - 3D = -3. \end{cases}$$

Решая её, находим $A = 1/8$, $B = 3/8$, $C = -1/2$, $D = 1$. Итак,

$$\frac{2z-3}{z^4-6z^3+10z^2+2z-15} = \frac{1}{8(z+1)} + \frac{3}{8(z-3)} + \frac{-z+2}{2(z^2-4z+5)}.$$

Задание 1.1

Найдите сумму, произведение и частное чисел.

- | | |
|---|--|
| 1) $z_1 = -2 + i$, $z_2 = 4 - 3i$; | 16) $z_1 = 6 - i$, $z_2 = -2 + 3i$ |
| 2) $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = 2 + 5i$; | 17) $z_1 = -3 + i$, $z_2 = -1 - 3i$; |
| 3) $z_1 = -4 + i$, $z_2 = 5 - 2i$; | 18) $z_1 = 2 + 4i$, $z_2 = -5 - 3i$; |
| 4) $z_1 = -1 + 3i$, $z_2 = -3 + 2i$; | 19) $z_1 = -3 + 4i$, $z_2 = 5 + 4i$; |
| 5) $z_1 = 7 + 2i$, $z_2 = -6 - i$; | 20) $z_1 = 1 - 5i$, $z_2 = -4 - i$; |
| 6) $z_1 = 4 + 3i$, $z_2 = -2 + 5i$; | 21) $z_1 = -5 + 4i$, $z_2 = 2 - i$; |
| 7) $z_1 = -2 - 3i$, $z_2 = 3 - 4i$; | 22) $z_1 = -4 + 5i$, $z_2 = 1 + 6i$; |
| 8) $z_1 = 2 + i$, $z_2 = -3 - 2i$; | 23) $z_1 = -2 - 5i$, $z_2 = 5 - 4i$; |
| 9) $z_1 = -3 - 4i$, $z_2 = 1 - 3i$; | 24) $z_1 = 3 + 4i$, $z_2 = -2 - i$; |
| 10) $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -4 - 2i$; | 25) $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = -5 - i$; |
| 11) $z_1 = 5 + i$, $z_2 = -4 - 3i$; | 26) $z_1 = -1 + 5i$, $z_2 = 3 - i$; |
| 12) $z_1 = -6 + i$, $z_2 = -2 - 2i$; | 27) $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = -2 + 6i$; |
| 13) $z_1 = -5 + 3i$, $z_2 = -5 - 2i$; | 28) $z_1 = 1 + 3i$, $z_2 = -5 + i$; |
| 14) $z_1 = 2 - 4i$, $z_2 = -3 + 5i$; | 29) $z_1 = -6 - 2i$, $z_2 = 4 + 5i$; |
| 15) $z_1 = -4 - 5i$, $z_2 = 4 + 2i$; | 30) $z_1 = -5 - 4i$, $z_2 = 6 + 2i$. |

Задание 1.2

Решите уравнения.

- | | |
|--------------------------|---------------------------|
| 1) $2z^2 + 3z + 4 = 0$; | 7) $2z^2 + 5z + 7 = 0$; |
| 2) $z^2 - 2z + 2 = 0$; | 8) $-4z^2 - 4z - 3 = 0$; |
| 3) $z^2 + 5z + 8 = 0$; | 9) $3z^2 + 2z + 9 = 0$; |
| 4) $z^2 - 4z + 13 = 0$; | 10) $4z^2 + z + 2 = 0$; |
| 5) $-z^2 + z - 2 = 0$; | 11) $-z^2 - z - 3 = 0$; |
| 6) $z^2 - 2z + 7 = 0$; | 12) $2z^2 - 4z + 5 = 0$; |

$$\begin{aligned}
13) & 2z^2 - 2z + 5 = 0; \\
14) & -2z^2 - z - 1 = 0; \\
15) & z^2 - 6z + 10 = 0; \\
16) & 4z^2 - 2z + 1 = 0; \\
17) & 2z^2 + z + 5 = 0; \\
18) & 5z^2 + z + 1 = 0; \\
19) & -3z^2 + 4z - 2 = 0; \\
20) & z^2 - 4z + 20 = 0; \\
21) & -6z^2 + 4z - 3 = 0;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
22) & 6z^2 - z + 1 = 0; \\
23) & -3z^2 + 2z - 1 = 0; \\
24) & -2z^2 - 8z - 15 = 0; \\
25) & z^2 - 2z + 7 = 0; \\
26) & -6z^2 - z - 1 = 0; \\
27) & 2z^2 + 6z + 11 = 0; \\
28) & -3z^2 + 6z - 10 = 0; \\
29) & 4z^2 - 8z + 13 = 0; \\
30) & z^2 + 4z + 17 = 0.
\end{aligned}$$

Задание 1.3

Выполните действия. Ответ запишите в алгебраической форме.

$$1) z = \frac{(-2+2i)^8}{(-3+3\sqrt{3}i)^{11}};$$

$$2) z = \frac{(-3-3\sqrt{3}i)^{14}}{(4+4i)^5};$$

$$3) z = \frac{(-6-2\sqrt{3}i)^4}{(4\sqrt{3}-4i)^{12}};$$

$$4) z = \frac{(-3+\sqrt{3}i)^6}{(\sqrt{3}-i)^{12}};$$

$$5) z = \frac{\left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{3}i\right)^4}{\left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6};$$

$$6) z = \frac{(-3+\sqrt{3}i)^6}{(\sqrt{3}-i)^{12}};$$

$$7) z = \frac{(-6+2\sqrt{3}i)^8}{(-2\sqrt{3}-6i)^4};$$

$$8) z = \frac{\left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{3}i\right)^4}{\left(-\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6};$$

$$9) z = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}}{5} - \frac{3}{5}i\right)^2}{\left(-\frac{3}{5} - \frac{\sqrt{3}}{5}i\right)^{12}};$$

$$10) z = \frac{(2\sqrt{3}-2i)^{16}}{(-2\sqrt{3}+2i)^{18}};$$

- $$11) z = \frac{(2-2i)^8}{(-3+3\sqrt{3}i)^{12}};$$
- $$12) z = \frac{(-4\sqrt{3}-4i)^{18}}{(5+5i)^{16}};$$
- $$13) z = \frac{(5\sqrt{3}-5i)^{18}}{2(-1+i)^{24}};$$
- $$14) z = \frac{(-3+\sqrt{3}i)^6}{(\sqrt{3}-i)^{12}};$$
- $$15) z = \frac{(-6-2\sqrt{3}i)^2}{(4\sqrt{3}-4i)^3};$$
- $$16) z = \frac{(2\sqrt{3}-6i)^{48}}{(-4+4i)^{24}};$$
- $$17) z = \frac{(-3-3i)^6}{(4\sqrt{3}+4i)^8};$$
- $$18) z = \frac{\left(\frac{1}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3}i\right)^4}{(-3+\sqrt{3}i)^6};$$
- $$19) z = \frac{\left(\frac{-3}{2} + \frac{3}{2}i\right)^{12}}{(-6-2\sqrt{3}i)^{14}};$$
- $$20) z = \frac{(5-5\sqrt{3}i)^{36}}{(-6+6i)^{16}};$$
- $$21) z = \frac{(-4+4i)^{16}}{(1-\sqrt{3}i)^4};$$
- $$22) z = \frac{(-3-3\sqrt{3}i)^{24}}{(\sqrt{3}-i)^5};$$
- $$23) z = \frac{(3\sqrt{3}+i)^{24}}{(2-2\sqrt{3}i)^{10}};$$
- $$24) z = \frac{(-3-3i)^{28}}{(-4+4\sqrt{3}i)^7};$$
- $$25) z = \frac{(4-4i)^{36}}{(5+5\sqrt{3}i)^8};$$
- $$26) z = \frac{(-2+2i)^{14}}{(-3-3\sqrt{3}i)^6};$$
- $$27) z = \frac{(\sqrt{3}-3i)^4}{(-3+\sqrt{3}i)^{12}};$$
- $$28) z = \frac{(-2\sqrt{3}-2i)^8}{(6-6\sqrt{3}i)^6};$$
- $$29) z = \frac{\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}i\right)^{24}}{(-2\sqrt{3}-2i)^{10}};$$
- $$30) z = \frac{(-2+2i)^{14}}{(3+3\sqrt{3}i)^6}.$$

Задание 1.4

Решите уравнения. Запишите ответ в алгебраической, тригонометрической и показательной формах.

$$1) z^3 + \frac{(-\sqrt{3}-i)^7 i^{33}}{(2+2i)^{10}} = 0;$$

$$10) z^3 + \frac{(3+3i)^5}{i^{17}(-2-2\sqrt{3}i)^7} = 0;$$

$$2) z^3 + \frac{(-3-3i)^9}{i^{18}(\sqrt{3}-3i)^8} = 0;$$

$$11) z^3 + \frac{(4+4i)^5}{(-4+4\sqrt{3}i)^8 i^{19}} = 0;$$

$$3) z^3 + \frac{i^{57}(-2\sqrt{3}-6i)^5}{(-4+4i)^{10}} = 0;$$

$$12) z^3 + \frac{i^{23}(2-2i)^9}{(\sqrt{3}-i)^{14}} = 0;$$

$$4) z^3 + \frac{(4\sqrt{3}-12i)^8}{i^{13}(-3-\sqrt{3}i)^{10}} = 0;$$

$$13) z^3 + \frac{(4\sqrt{3}-4i)^{11}}{i^{21}(-3-3\sqrt{3}i)^{10}} = 0;$$

$$5) z^3 + \frac{i^{59}(-2+2i)^{11}}{(8-8\sqrt{3}i)^9} = 0;$$

$$14) z^3 + \frac{(-3-3i)^{11} i^{15}}{(2\sqrt{3}-6i)^7} = 0;$$

$$6) z^3 + \frac{(3+\sqrt{3}i)^{10}}{(-4+4\sqrt{3}i)^{11} i^9} = 0;$$

$$15) z^3 + \frac{(6+6i)^5 i^{53}}{(-2\sqrt{3}+2i)^7} = 0;$$

$$7) z^3 + \frac{(2+\sqrt{3}i)^{10}}{i^{35}(-2-2i)^9} = 0;$$

$$16) z^3 + \frac{(-3\sqrt{3}+9i)^4}{(-5+5i)^6 i^{45}} = 0;$$

$$8) z^3 + \frac{i^{29}(2+2\sqrt{3}i)^9}{(3-\sqrt{3}i)^{14}} = 0;$$

$$17) z^3 + \frac{(-4\sqrt{3}-4i)^5}{(\sqrt{3}+i)^8 i^{43}} = 0;$$

$$9) z^3 + \frac{(\sqrt{2}+\sqrt{2}i)^7}{i^{11}(-6+2\sqrt{3}i)^{13}} = 0;$$

$$18) z^3 + \frac{(5+5i)^7 i^{37}}{(-5\sqrt{3}-5i)^8} = 0;$$

$$19) z^3 + \frac{i^{63} (3 - 3\sqrt{3}i)^8}{(-5 - 5i)^{10}} = 0;$$

$$20) z^3 + \frac{(-3 - 3\sqrt{3}i)^{11}}{i^{51} (2 - 2\sqrt{3}i)^5} = 0;$$

$$21) z^3 + \frac{(4 - 4i)^9 i^{55}}{(-1 - \sqrt{3}i)^8} = 0;$$

$$22) z^3 + \frac{(-6 - 2\sqrt{3}i)^9}{i^{27} (5 - 5i)^7} = 0;$$

$$23) z^3 + \frac{(-1 + \sqrt{3}i)^{16}}{i^{25} (3 - 3i)^{13}} = 0;$$

$$24) z^3 + \frac{(1 + \sqrt{3}i)^{13} i^{47}}{(-3 + \sqrt{3}i)^8} = 0;$$

$$25) z^3 + \frac{i^{31} (-6 + 6i)^5}{(3 + 3\sqrt{3}i)^8} = 0;$$

$$26) z^3 + \frac{(-5 + 5\sqrt{3}i)^6}{(3\sqrt{3} + 3\sqrt{3}i)^{10} i^{67}} = 0;$$

$$27) z^3 + \frac{(4 - 4\sqrt{3}i)^{10}}{(-6 + 6i)^9 i^{26}} = 0;$$

$$28) z^3 + \frac{(-1 - i)^{10} i^{41}}{(5\sqrt{3} - 5i)^5} = 0;$$

$$29) z^3 + \frac{(-4\sqrt{3} + 4i)^6}{(2\sqrt{2} + 2i)^8 i^{22}} = 0;$$

$$30) z^3 + \frac{(4 + 4\sqrt{3}i)^4 i^{14}}{(-\sqrt{3} - 3i)^7} = 0.$$

Задание 1.5

Решите: а) систему уравнений; б), в) неравенства (геометрически).

$$1. \text{ а) } \begin{cases} |z - 1 - i| = 1, \\ |z - 1 - 2i| = 1; \end{cases}$$

$$\text{б) } \operatorname{Re} z \leq \operatorname{Im} z^2;$$

$$\text{в) } 2 < |z + 1 - 2i| < 3;$$

$$2. \text{ а) } \begin{cases} |z - 2 - 3i| = 2, \\ |z - 2 - i| = 2; \end{cases}$$

$$\text{б) } \operatorname{Re} z^2 \leq \operatorname{Im} z^2;$$

$$\text{в) } 1 < |z + 2 + 3i| < 4;$$

$$3. \text{ а) } \begin{cases} |z - 3 - i| = \sqrt{2}, \\ |z - 3 - 3i| = \sqrt{2}; \end{cases}$$

$$\text{б) } \operatorname{Re} z \leq \operatorname{Im} \bar{z};$$

$$\text{в) } 0 < |z - 1 + 2i| < 2;$$

$$4. \text{ а) } \begin{cases} |z + 2 + i| = 1, \\ |z + 3 + i| = 1; \end{cases}$$

$$\text{б) } \operatorname{Re} (2z) \leq \operatorname{Im} z^2;$$

$$\text{в) } 1 \leq |z - 3 - i| < 3;$$

5. a) $\begin{cases} |z+2+2i|=2, \\ |z+4+2i|=2; \end{cases}$ б) $0 < \arg z < \frac{\pi}{2}$; в) $1 < |z+4-2i| < 2$;
6. a) $\begin{cases} |z+2-i|=\sqrt{2}, \\ |z+4-i|=\sqrt{2}; \end{cases}$ б) $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z < 0$; в) $z < |z+3+2i| < 3$;
7. a) $\begin{cases} |z+\sqrt{3}+1+i|=2, \\ |z+1-\sqrt{3}+i|=2; \end{cases}$ б) $\frac{\pi}{6} < \arg z \leq \frac{\pi}{3}$; в) $0 < |z-4+3i| \leq 2$;
8. a) $\begin{cases} |z+1+i|+|z+1+2i|=2, \\ |z+1+i|=1; \end{cases}$ б) $\operatorname{Im} z^2 \leq 1$; в) $1 \leq |z+4+i| < 4$;
9. a) $\begin{cases} |z+2+i|+|z+2+3i|=4, \\ |z+2+i|=1; \end{cases}$ б) $\operatorname{Re} z^2 > 0$; в) $3 \leq |z-2-2i| < 4$;
10. a) $\begin{cases} |z+3+3i|+|z+3+i|=2\sqrt{2}, \\ |z+3+3i|=\sqrt{2}; \end{cases}$ б) $\frac{3}{4}\pi < \arg z < \pi$; в) $2 < |z+1+3i| \leq 3$;
11. a) $\begin{cases} |z+4+2i|+|z+4+3i|=2, \\ |z+4+2i|=1; \end{cases}$ б) $\operatorname{Im} z^2 < 0$; в) $1 \leq |z-4-3i| < 4$;
12. a) $\begin{cases} |z+2+i|+|z+3+i|=2, \\ |z+2+i|=1; \end{cases}$ б) $\operatorname{Re} z - 3\operatorname{Im} z > 0$; в) $4 < |z-1-3i| < 5$;
13. a) $\begin{cases} |z+2+3i|+|z+4+3i|=4, \\ |z+2+3i|=2; \end{cases}$ б) $-\frac{1}{6}\pi < \arg z \leq \frac{\pi}{3}$; в) $1 < |z+3-i| \leq 3$;
14. a) $\begin{cases} |z+2+5i|+|z+4+5i|=2\sqrt{2}, \\ |z+2+5i|=\sqrt{2}; \end{cases}$ б) $\operatorname{Re} z^2 \leq \operatorname{Im} z$; в) $2 \leq |z+2-3i| < 4$;
15. a) $\begin{cases} |z+3+3i|=|z+4+3i|, \\ |z+3+3i|=1; \end{cases}$ б) $|\operatorname{Re} z| \geq |\operatorname{Im} z|$; в) $3 < |z+3-4i| \leq 5$;
16. a) $\begin{cases} |z+4+i|=|z+6+i|, \\ |z+6+i|=2; \end{cases}$ б) $3(\operatorname{Re} z)^2 < (\operatorname{Im} z)^2$; в) $1 \leq |z-4-3i| < 4$;

17. a) $\begin{cases} |z+5+2i| = |z+7+2i|, \\ |z+5+2i| = \sqrt{2}; \end{cases}$ б) $-\frac{3}{4}\pi < \arg z \leq -\frac{\pi}{2}$; в) $1 \leq |z+2+i| < 2$;
18. a) $\begin{cases} |z-1+2i| = |z-1+3i|, \\ |z-1+2i| = 1; \end{cases}$ б) $(\operatorname{Re} z) \cdot (\operatorname{Im} z) < 0$; в) $2 < |z-2+i| < 4$;
19. a) $\begin{cases} |z-2+4i| = |z-2+6i|, \\ |z-2+4i| = 2; \end{cases}$ б) $\operatorname{Re} z + 2\operatorname{Im} z \geq 1$; в) $3 < |z-2-i| \leq 5$;
20. a) $\begin{cases} |z-3-3i| = |z-3-5i|, \\ |z-3-5i| = \sqrt{2}; \end{cases}$ б) $-\frac{1}{4}\pi \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}$; в) $1 < |z-4-i| < 3$;
21. a) $\begin{cases} |z+3+2i| + |z+3+3i| = 2, \\ |z+3+2i| = |z+3+3i|; \end{cases}$ б) $2\operatorname{Re} z - 3\operatorname{Im} \bar{z} \geq 2$; в) $2 \leq |z+5-i| < 3$;
22. a) $\begin{cases} |z+4+i| + |z+4+3i| = 4, \\ |z+4+3i| = |z+4+3i|; \end{cases}$ б) $|\operatorname{Re} z| > 3$; в) $0 < |z-2+4i| < 3$;
23. a) $\begin{cases} |z-1-5i| = |z-3-5i| = 2\sqrt{2}, \\ |z-1-5i| = |z-3-5i|; \end{cases}$ б) $|\operatorname{Im} z| \leq 2$; в) $2 < |z-1+3i| < 5$;
24. a) $\begin{cases} |z+3+2i| = |z+7+2i|, \\ |z+3+2i| = \sqrt{3}; \end{cases}$ б) $-\frac{3}{4}\pi < \arg z \leq -\frac{\pi}{2}$; в) $1 \leq |z+2+i| < 2$;
25. a) $\begin{cases} |z-3+i| + |z-5+i| = 2\sqrt{2}, \\ |z-3+i| = |z-5+i|; \end{cases}$ б) $(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 \leq 4$; в) $3 \leq |z+2-i| < 5$;
26. a) $\begin{cases} |z-2-i| + |z-4-i| = 4, \\ |z-2-i| = |z-4-i|; \end{cases}$ б) $\operatorname{Im} z^2 \leq 1$; в) $2 < |z+4-4i| \leq 4$;
27. a) $\begin{cases} |z-1-i| = 1, \\ |z-1-2i| = 1; \end{cases}$ б) $\pi < \arg z \leq \frac{4\pi}{3}$; в) $1 \leq |z+1+2i| < 3$;
28. a) $\begin{cases} |z+2+3i| = 2, \\ |z+4+3i| = 2; \end{cases}$ б) $\operatorname{Re} z^2 > 4$; в) $3 < |z-3+4i| < 4$;
29. a) $\begin{cases} |z-3+5i| = 1, \\ |z-3+4i| = 1; \end{cases}$ б) $2\operatorname{Re} z - 3\operatorname{Im} \bar{z} \leq 1$; в) $2 < |z+1-4i| < 5$;

$$30. \text{ а) } \begin{cases} |z-1+4i|=1, \\ |z-2+4i|=1; \end{cases} \quad \text{б) } -\frac{3}{4}\pi < \arg z < -\frac{\pi}{2}; \quad \text{в) } 1 < |z-3-2i| < 4.$$

Задание 1.6

Найдите все нули многочлена и разложите его на неразложимые множители с действительными коэффициентами, если известен один из его нулей z_1 .

- | | |
|---------------------------------------|--------------------------|
| 1) $z^4 + 2z^3 - 4z + 12,$ | $z_1 = 1 + i;$ |
| 2) $z^4 - 2z^3 + 4z + 12$ | $z_1 = 2 + \sqrt{2} i;$ |
| 3) $z^4 + 2z^3 + 2z^2 + 4z + 24,$ | $z_1 = 1 + \sqrt{3} i;$ |
| 4) $z^4 + 7z^3 + 21z^2 + 30z + 18,$ | $z_1 = -2 + \sqrt{2} i;$ |
| 5) $z^4 + 5z^3 + 14z^2 + 20z + 16,$ | $z_1 = -1 + \sqrt{3} i;$ |
| 6) $z^4 + 5z^3 + 11z^2 + 12z + 6,$ | $z_1 = -1 + i;$ |
| 7) $z^4 + 3z^3 + 8z^2 + 7z + 5,$ | $z_1 = -1 + 2i;$ |
| 8) $z^4 + z^3 + 3z^2 + 7z + 20,$ | $z_1 = 1 - 2i;$ |
| 9) $z^4 - z^3 - 3z^2 - z + 20,$ | $z_1 = 2 - i;$ |
| 10) $z^4 + 5z^3 + 13z^2 + 12z + 8,$ | $z_1 = -2 + 2i;$ |
| 11) $z^4 - z^3 - z^2 + 12z + 24,$ | $z_1 = 2 - 2i;$ |
| 12) $z^4 + 5z^3 + 18z^2 + 17z + 13,$ | $z_1 = -2 + 3i;$ |
| 13) $z^4 - 2z^3 + 7z^2 + 18z + 26,$ | $z_1 = 2 - 3i;$ |
| 14) $z^4 + 7z^3 + 17z^2 + 16z + 10,$ | $z_1 = -3 + i;$ |
| 15) $z^4 - 3z^3 - 4z^2 + 6z + 40,$ | $z_1 = 3 - i;$ |
| 16) $z^4 + 8z^3 + 27z^2 + 38z + 26,$ | $z_1 = -3 + 2i;$ |
| 17) $z^4 - 3z^3 - 2z^2 + 21z + 39,$ | $z_1 = 3 - 2i;$ |
| 18) $z^4 + 8z^3 + 32z^2 + 48z + 36,$ | $z_1 = -3 + 3i;$ |
| 19) $z^4 - 3z^3 + 4z^2 + 30z + 72,$ | $z_1 = 3 - 3i;$ |
| 20) $z^4 + 11z^3 + 44z^2 + 75z + 51,$ | $z_1 = -4 + i;$ |
| 21) $z^4 - 6z^3 + 3z^2 + 18z + 34,$ | $z_1 = 4 - i;$ |
| 22) $z^4 + 12z^3 + 48z^2 + 72z + 52,$ | $z_1 = -5 + i;$ |
| 23) $z^4 - 9z^3 + 17z^2 + 16z + 26,$ | $z_1 = 5 - i;$ |

- | | |
|---------------------------------------|------------------|
| 24) $z^4 + 13z^3 + 50z^2 + 49z + 37,$ | $z_1 = -6 + i;$ |
| 25) $z^4 + 11z^3 + 42z^2 + 59z + 87,$ | $z_1 = -5 + 2i;$ |
| 26) $z^4 + 9z^3 + 30z^2 + 36z + 40,$ | $z_1 = -4 + 2i;$ |
| 27) $z^4 - 10z^3 + 15z^2 + 50z + 74,$ | $z_1 = 6 - i;$ |
| 28) $z^4 - 7z^3 + 3z^2 + 47z + 116,$ | $z_1 = 5 - 2i;$ |
| 29) $z^4 - 5z^3 - z^2 + 36z + 60,$ | $z_1 = -4 - 2i;$ |
| 30) $z^4 + 10z^3 + 43z^2 + 66z + 50,$ | $z_1 = -4 + 3i.$ |

Задание 1.7

Даны многочлены $f(z)$ и $g(z)$: а) подберите нули многочлена $f(z)$ среди делителей свободного члена; б) разложите $f(z)$ на линейные и неразложимые квадратичные множители с действительными коэффициентами; в) разложите $f(z)$ на линейные множители с комплексными коэффициентами; г) разложите дробь $g(z)/f(z)$ на сумму простейших дробей с действительными коэффициентами.

- | | |
|--|------------------------|
| 1) $f(z) = z^4 - 3z^3 + z^2 + 4,$ | $g(z) = z^2 - 2z - 3;$ |
| 2) $f(z) = z^4 - 4z^3 + 2z^2 + z + 6.$ | $g(z) = z^2 - 2z - 4;$ |
| 3) $f(z) = z^4 - 5z^3 + 3z^2 + 2z + 8,$ | $g(z) = z^2 - 3z - 5;$ |
| 4) $f(z) = z^4 - 2z^2 - 3z - 2,$ | $g(z) = z^2 + z - 2;$ |
| 5) $f(z) = z^4 - 6z^3 + 4z^2 + 3z + 10,$ | $g(z) = z^2 - 5z - 6;$ |
| 6) $f(z) = z^4 - z^3 - 4z^2 - 5z - 3,$ | $g(z) = z^2 - 3z - 5;$ |
| 7) $f(z) = z^4 - 7z^3 + 5z^2 + 4z + 12,$ | $g(z) = z^2 - 6z - 5;$ |
| 8) $f(z) = z^4 - 2z^3 - 6z^2 - 7z - 4,$ | $g(z) = z^2 - 4z - 6;$ |
| 9) $f(z) = z^4 - 3z^3 - 8z^2 - 9z - 5,$ | $g(z) = z^2 - 5z - 7;$ |
| 10) $f(z) = z^4 - 4z^3 - 10z^2 - 11z - 6,$ | $g(z) = z^2 - 6z - 8;$ |
| 11) $f(z) = z^4 - z^3 - 2z^2 - 2z + 4,$ | $g(z) = z^2 - 2z - 3;$ |
| 12) $f(z) = z^4 - 3z^3 - 2z^2 + 2z + 12,$ | $g(z) = z^2 - 3z - 3;$ |
| 13) $f(z) = z^4 - 2z^3 - 3z^2 - 2z + 6,$ | $g(z) = z^2 - 3z - 2$ |
| 14) $f(z) = z^4 - 4z^3 - 2z^2 + 4z + 16,$ | $g(z) = z^2 - 4z - 2;$ |
| 15) $f(z) = z^4 - 3z^3 - 4z^2 - 2z + 8,$ | $g(z) = z^2 + 4z - 2;$ |
| 16) $f(z) = z^4 - 5z^3 - 2z^2 + 6z + 20,$ | $g(z) = z^2 - 5z - 5;$ |
| 17) $f(z) = z^4 - 4z^3 - 5z^2 - 2z + 10,$ | $g(z) = z^2 - 5z - 6;$ |
| 18) $f(z) = z^4 - 6z^3 - 2z^2 + 8z + 24,$ | $g(z) = z^2 - 6z - 6;$ |
| 19) $f(z) = z^4 + 3z^3 + 2z^2 - 2z - 4,$ | $g(z) = z^2 - z - 3;$ |
| 20) $f(z) = z^4 - 5z^3 - 6z^2 - 2z + 12,$ | $g(z) = z^2 - 6z - 6;$ |
| 21) $f(z) = z^4 + 2z^3 - 2z^2 - 8z - 8,$ | $g(z) = z^2 - 2z - 4;$ |
| 22) $f(z) = z^4 + z^3 - 6z^2 - 14z - 12,$ | $g(z) = z^2 - 3z - 3;$ |

$$23) f(z) = z^4 - 3z^3 + 4z^2 - 3z + 1,$$

$$24) f(z) = z^4 - z^3 - 3z^2 + 4z - 4,$$

$$25) f(z) = z^4 - 4z^3 + 6z^2 - 5z + 2,$$

$$26) f(z) = z^4 - 2z^3 - 4z^2 + 5z - 6,$$

$$27) f(z) = z^4 - 5z^3 + 8z^2 - 7z + 3,$$

$$28) f(z) = z^4 - 3z^3 - 5z^2 + 6z - 8,$$

$$29) f(z) = z^4 - 6z^3 + 10z^2 - 9z + 4,$$

$$30) f(z) = z^4 - 4z^3 - 6z^2 + 7z - 10,$$

$$g(z) = z^2 - z - 3;$$

$$g(z) = z^2 - 2z - 4;$$

$$g(z) = z^2 - 2z + 4;$$

$$g(z) = z^2 - 3z + 3;$$

$$g(z) = z^2 + 3z - 3;$$

$$g(z) = z^2 - 4z - 4;$$

$$g(z) = z^2 + 4z - 4;$$

$$g(z) = z^2 - 5z - 5.$$

II. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

1. Предел числовой последовательности

Числовой последовательностью называют правило, по которому каждому натуральному числу $n \in \mathbf{N}$ ставится в соответствие действительное (комплексное) число $x_n \in \mathbf{R}$ ($z_n \in \mathbf{C}$).

Последовательность обозначают символом $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ($\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$). Можно сказать, что последовательность является функцией $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ ($f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{Z}$). Очевидным образом определяются сумма, произведение, частное двух последовательностей. В этом разделе мы будем иметь дело лишь с последовательностями действительных чисел.

Число $a \in \mathbf{R}$ называется *пределом последовательности* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $n_0 \in \mathbf{N}$ такой, что для любого $n > n_0$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$. При этом пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ или $x_n \rightarrow a$ и говорят, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к числу a .

- Если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, то: 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} c x_n = c a$;
2) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = a + b$; 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = a \cdot b$;
4) $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n / y_n) = a/b$ при ($y_n \neq 0$, $b \neq 0$).

Пример 1. Дана последовательность $x_n = \frac{2n-1}{n+1}$. Найдите:
а) $a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$; б) n_0 такое, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $|x_n - a| < 0,001$.

Решение. а) Имеем $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1-1)-1}{n+1} =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)-3}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2(n+1)}{n+1} - \frac{3}{n+1} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{3}{n+1} \right) =$
 $= \lim_{n \rightarrow \infty} 2 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{n+1} = 2 - 3 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 2 - 3 \cdot 0 = 2.$

б) Найдём требуемое n_0 . Из проделанных выше выкладок следует, что n_0 должно быть подобрано так, чтобы для всех $n > n_0$

$$\left| 2 - \frac{3}{n+1} - 2 \right| < 0,001 \text{ или } \frac{3}{n+1} < \frac{1}{1000};$$

отсюда следует $n+1 > 3000$, $n > 2999$. Следовательно, можно взять $n_0 = 2998$.

Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *бесконечно малой*, если $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

Последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется *бесконечно большой*, если для любого $A > 0$ найдётся номер n_0 такой, что для любого $n > n_0$ справедливо неравенство $|x_n| > A$; записывается это так: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$. Если при этом x_n , начиная с некоторого номера, сохраняют положительный (отрицательный) знак, то пишут $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ ($\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$).

Важную роль играет последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Доказывается, что эта последовательность сходится, и ее предел обозначается буквой e ; $e \approx 2,718$.

2. Элементарные функции

К элементарным функциям относятся:

- 1) простейшие элементарные функции: постоянная c , степенная x^a , показательная a^x , логарифмическая $\log_a x$, тригонометрическая $\cos x$, обратные тригонометрические $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$;
- 2) все функции, получающиеся из простейших элементарных функций путем применения конечного числа следующих четырех операций: сложение, умножение, деление, суперпозиция функций (сложная функция).

Пример 2. В класс элементарных функций попадают:

- а) многочлен; б) рациональная дробь (отношение двух многочленов);
- в) $\sin x$, так как $\sin x = \cos(\pi/2 - x)$; г) $\operatorname{tg} x = \frac{\cos(\pi/2 - x)}{\cos x}$; д) $\arcsin x$,

так как $\operatorname{arcsin} x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$ и множество других.

3. Предел функции

Пусть функция $f(x)$ определена во всех точках интервала (a, b) , за исключением, быть может, точки $x_0 \in (a, b)$. Число A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что для любого x , удовлетворяющего неравенству $0 < |x - x_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, при этом пишут $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. Можно дать другое, равносильное приведенному, определение: число A называется пределом функции $f(x)$ в точке x_0 , если для любой последовательности чисел $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (a; b)$, сходящейся к x_0 , $x_n \neq x_0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.

Если $f(x)$ определена в интервале $(a, +\infty)$, то число A называется пределом $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $b > a$, такое, что неравенство $x > b$ влечет за собой неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. При этом пишут $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ или $f(+\infty) = A$. Аналогично определяется $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A$.

Число A называют пределом функции $f(x)$ в точке x_0 слева (справа) и пишут $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = A$ или $f(x_0 - 0) = A$ ($\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A$, или $f(x_0 + 0) = A$), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всех $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ (для всех $x \in (x_0; x_0 + \delta)$) справедливо неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Число A является пределом $f(x)$ в точке x_0 , если совпадают пределы $f(x)$ в этой точке слева и справа: $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$.

Если функция $f(x)$ определена в интервале $(a; x_0)$ (в интервале $(x_0; b)$) и для любого M существует $\delta > 0$ такое, что для любого $x \in (x_0 - \delta; x_0)$ (для любого $x \in (x_0; x_0 + \delta)$) справедливо неравенство $f(x) > M$, то говорят, что левый (правый) предел функции $f(x)$ в точке x_0 равен $+\infty$, и при этом пишут $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = +\infty$ или $f(x_0 - 0) = +\infty$

$(\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = +\infty$ или $f(x_0 + 0) = +\infty)$. Аналогично определяются

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = -\infty \text{ и } \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = -\infty.$$

Предел функции обладает теми же свойствами, что и предел последовательности: если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B$, то

$$1) \lim_{x \rightarrow x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot A;$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = A + B;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = A \cdot B;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)/g(x)) = A/B$$

(последнее при $g(x) \neq 0, B \neq 0$). То же верно для односторонних пределов.

Пример 3. Доказать, что $\lim_{x \rightarrow 3} (2x - 1) = 5$. По данному $\varepsilon = 0,01$ найти $\delta > 0$ такое, что из неравенства $|x - 3| < \delta$ следует $|f(x) - 5| < \varepsilon$.

Решение. Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. Неравенство $|f(x) - 5| = |2x - 1 - 5| = 2|x - 3| < \varepsilon$ равносильно неравенству $|x - 3| < \varepsilon/2$. Поэтому, если по данному $\varepsilon > 0$ взять $\delta = \varepsilon/2$, то из неравенства $|x - 3| < \delta = \varepsilon/2$ будет следовать неравенство $|f(x) - 5| < \varepsilon$, а это и означает, что $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 5$. В частности, для $\varepsilon = 0,01$ достаточно взять $\delta = 0,005$.

Пример 4. Найти пределы:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 3x + 2}{3x^2 + x + 1} \right), \quad б) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2}{\sqrt{x^8 + 3x + 4}}, \quad в) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3 + x - x^2}}.$$

$$\text{Решение. а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 2}{3x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(2 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right)}{x^2 \left(3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}{3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} = \frac{2 - 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0}{3 + 0 + 0} = \frac{2}{3};$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^4 - 2}{\sqrt{x^8 + 3x + 4}} \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \left. \begin{array}{l} \text{делим числитель и знаменатель} \\ \text{на старшую степень } x, \text{ т.е. на } x^4 \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{2}{x^4}}{\sqrt{\frac{x^8 + 3x + 4}{x^8}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{\sqrt{1 + \frac{3}{x^7} + \frac{4}{x^8}}} = \frac{3}{1} = 3;$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3 + x} - x^2} \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \left. \begin{array}{l} \text{делим числитель и знаменатель} \\ \text{на старшую степень } x, \text{ т.е. на } x^2 \end{array} \right| =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2} + \frac{\sqrt{x}}{x^2}}{\frac{\sqrt[4]{x^3 + x}}{x^2} - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^4}} + \sqrt{\frac{x}{x^4}}}{\sqrt[4]{\frac{x^3 + x}{x^8}} - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4}} + \sqrt{\frac{1}{x^3}}}{\sqrt[4]{\frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^7}} - 1} = \frac{0}{-1} = 0.$$

Пример 5. Вычислить:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{2x^2 - 7x + 3}{8x^3 - 1}; \quad \text{б) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{3 - \sqrt{2x + 1}}.$$

Решение. а) При подстановке $x = \frac{1}{2}$ в числитель и знаменатель они обращаются в нуль.

Следовательно, мы имеем неопределенность вида $\left(\frac{0}{0} \right)$.

Разложим числитель и знаменатель на множители и перейдем к пределу

$$\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{2x^2 - 7x + 3}{8x^3 - 1} = \left. \begin{array}{l} ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2), \\ \text{где } x_1, x_2 \text{ корни уравнения} \\ ax^2 + bx + c = 0 \end{array} \right| =$$

$$\begin{aligned}
& 2 \left(x - \frac{1}{2} \right) (x - 3) \\
= \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{(2x - 1)(x - 3)}{(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)} &= \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{(2x - 1)(x - 3)}{(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)} = \\
= \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{x - 3}{4x^2 + 2x + 1} &= \frac{1/2 - 3}{4 \cdot 1/4 + 2 \cdot 1/2 + 1} = -\frac{5}{6}.
\end{aligned}$$

б) В этом примере имеем неопределенность $\begin{pmatrix} 0 \\ - \\ 0 \end{pmatrix}$. Умножим числитель и знаменатель на произведение $(2 + \sqrt{x})(3 + \sqrt{2x + 1})$, получим

$$\begin{aligned}
& \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(2 - \sqrt{x})(2 + \sqrt{x})(3 + \sqrt{2x + 1})}{(3 - \sqrt{2x + 1})(2 + \sqrt{x})(3 + \sqrt{2x + 1})} = \\
= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4 - x)(3 + \sqrt{2x + 1})}{(2 + \sqrt{x})(9 - 2x - 1)} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4 - x)(3 + \sqrt{2x + 1})}{(2 + \sqrt{x})(8 - 2x)} = \\
= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(4 - x)(3 + \sqrt{2x - 1})}{2(2 + \sqrt{x})(4 - x)} &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 + \sqrt{2x + 1}}{2(2 + \sqrt{x})} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Пример 6. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})$.

Решение. Имеем неопределенность $(\infty - \infty)$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1}) &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 - 1})(\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1})}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} = \\
= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 + 1) - (x^2 - 1)}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}} = 0.
\end{aligned}$$

Имеют место равенства

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = e,$$

называемые первым и вторым замечательными пределами.

Пример 7. Найти:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$.

Решение. а) Применяем первый замечательный предел:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x \cdot 2x \cdot 5x}{\sin 2x \cdot 2x \cdot 5x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin 5x}{5x} \right) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x}{\sin 2x} \right) \cdot \frac{5}{2} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{2}.$$

$$\text{б) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 x/2}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x/2}{x/2} \right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\sin x}{\cos x} - \sin x}{x^3} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(1 - \cos x)}{\cos x \cdot x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \right)$$

$$\text{(из предыдущего } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}) = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Пример 8. Найти:

а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 3}{2x^2 + 5} \right)^{8x^2 + 3}$; б) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x + 3)[\ln(x - 2) - \ln x]$.

Решение.

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 3}{2x^2 + 5} \right)^{8x^2 + 3} = \left(1^{\infty} \right). \text{ Такая неопределенность раскрывается } \left| \begin{array}{l} \text{спомощью второго замечательного предела} \end{array} \right|$$

В основании прибавим и вычтем единицу

$$\frac{2x^2 + 3}{2x^2 + 5} + 1 - 1 = 1 + \frac{2x^2 + 3}{2x^2 + 5} - 1 = 1 + \frac{2x^2 + 3 - 2x^2 - 5}{2x^2 + 5} = 1 + \frac{-2}{2x^2 + 5}.$$

$$\text{Тогда } \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 3}{2x^2 + 5} \right)^{8x^2 + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{2x^2 + 5} \right)^{8x^2 + 3} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{2x^2+5}{-2}} \right)^{\frac{2x^2+5}{-2}} \right]^{\frac{-2}{2x^2+5} (8x^2+3)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{2x^2+5}{-2}} \right)^{\frac{2x^2+5}{-2}} \right]^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2(8x^2+3)}{2x^2+5}}$$

Вычисляем $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2(8x^2+3)}{2x^2+5} = \left[\begin{array}{l} \text{делим на старшую степень } x, \\ \text{т. е. на } x^2 \end{array} \right] =$

$$= -2 \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8 + \frac{3}{x^2}}{2 + \frac{5}{x}} = -2 \cdot \frac{8}{2} = -8$$

Тогда $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{2x^2+5}{-2}} \right)^{\frac{2x^2+5}{-2}} \right]^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2(8x^2+3)}{2x^2+5}} = e^{-8}$.

$$\begin{aligned} 6) \lim_{x \rightarrow \infty} (2x+3) [\ln(x-2) - \ln x] &= \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left[\frac{x-2}{x} \right]^{2x+3} = \\ &= \ln \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x} \right)^{2x+3} \right] = \left| \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-2}{x} \right)^{2x+3} \right| = \ln \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x} \right)^{2x+3} \right] = \\ &= \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-x/2} \right)^{-\frac{x}{2}} \right]^{-\frac{2}{x} (2x+3)} = \ln \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{-x/2} \right)^{-\frac{x}{2}} \right]^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2(2x+3)}{x}} = \end{aligned}$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2(2x+3)}{x} = -2 \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{3}{x} \right) = -4.$$

Тогда

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x/2} \right)^{x/2} \right]^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2(2x+3)}{x}} = \ln e^{-4} = -4.$$

$$\text{в) } \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} x)^{2 \operatorname{ctg} x} = (1^x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[(1 + \operatorname{tg} x)^{\frac{1}{\operatorname{tg} x}} \right]^2 = e^2.$$

4. Непрерывность функции

Функция $f(x)$, определённая в некоторой окрестности $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ точки x_0 , называется непрерывной в точке x_0 , если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Другими словами, $f(x)$ непрерывна в точке x_0 , если выполнены два условия:

- 1) $f(x)$ определена в некотором интервале, содержащем точку x_0 ,
- 2) бесконечно малому приращению аргумента $\Delta x = x - x_0$ отвечает бесконечно малое приращение функции $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 в том и только том случае, если $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке числового множества X , то говорят, что $f(x)$ непрерывна на множестве X .

Сумма, произведение, частное (при неравенстве нулю знаменателя), суперпозиция непрерывных функций также являются непрерывными функциями.

Функция $f(x)$ терпит разрыв в точке x_0 в одном из следующих случаев:

- 1) $\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = A$, но $f(x_0) \neq A$ либо $f(x_0)$ не определено (рис.1); в этом случае говорят, что x_0 – точка устранимого разрыва;

2) $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ – конечные, но не равные между собой пределы; такая точка называется точкой разрыва первого рода (говорят, что $f(x)$ терпит в точке x_0 скачок) (рис.2);

3) по крайней мере одного из односторонних пределов $f(x)$ в точке x_0 не существует (т.е. не существует конечного предела); в таком случае говорят, что x_0 – точка разрыва второго рода (рис.3).

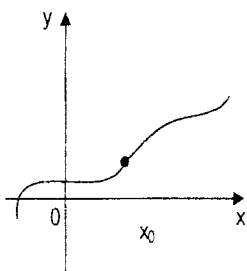


Рис.1

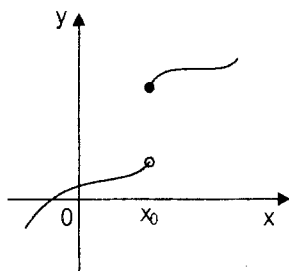


Рис.2

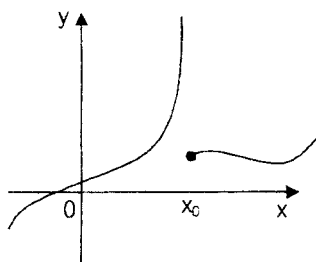


Рис.3

Все элементарные функции непрерывны в области их определения.

Пример 9. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{если } x \leq -1, \\ x^2, & \text{если } -1 < x \leq 2, \\ \sin \frac{\pi x}{4}, & \text{если } x > 2 \end{cases}$$

и построить её график.

Решение. Аналитические выражения $(-x)$, x^2 , $\sin \frac{\pi x}{4}$, входящие в определение $f(x)$, задают непрерывные элементарные функции.

Поэтому $f(x)$ непрерывна всюду кроме, может быть, точек «склейки» $x_1 = -1$ и $x_2 = 2$. Исследуем поведение функции в окрестности этих точек.

а) $x = -1$.

$$f(-1-0) = \lim_{x \rightarrow -1-0} (-x) = -(-1) = 1;$$

$$f(-1+0) = \lim_{x \rightarrow -1+0} x^2 = (-1)^2 = 1;$$

$$f(-1) = -(-1) = 1.$$

Так как $f(-1-0) = f(-1+0) = f(-1) = 1$, то функция непрерывна в точке $x = -1$.

б) $x = 2$.

$$f(2-0) = \lim_{x \rightarrow 2-0} x^2 = 2^2 = 4;$$

$$f(2+0) = \lim_{x \rightarrow 2+0} \sin \frac{\pi x}{4} = \sin \frac{\pi \cdot 2}{4} = \sin \frac{\pi}{2} = 1;$$

$$f(2) = 2^2 = 4.$$

Так как $f(2-0) = f(2) = 4 \neq f(2+0) = 1$, то $f(x)$ в точке $x = 2$ терпит разрыв первого рода.

Сделаем чертёж (рис.4).

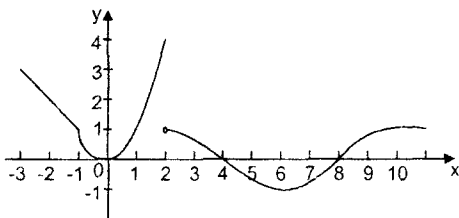


Рис.4

Пример 10. Исследовать на непрерывность функцию

$$f(x) = 2^{\frac{1}{x^2(x^2-1)}}.$$

Сделать эскиз графика.

Решение. Функция является элементарной, поэтому непрерывна во всех точках, кроме точек $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, в которых она не определена. Найдём характер разрыва в этих точках.

а) $x = -1$.

$$f(-1-0) = \lim_{x \rightarrow -1-0} 2^{\frac{1}{x^2(x^2-1)}} = \lim_{x \rightarrow -1-0} 2^{\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}} = +\infty;$$

$$f(-1+0) = \lim_{x \rightarrow -1+0} 2^{\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}} = +0$$

(+0 означает, что $f(x)$ стремится к 0, оставаясь больше 0).

Так как $f(-1-0) = +\infty$, $f(-1+0) = 0$, то $f(x)$ в точке $x = -1$ терпит разрыв второго рода.

б) $x = 0$.

$$f(-0) = \lim_{x \rightarrow -0} 2^{\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}} = +0;$$

$$f(+0) = \lim_{x \rightarrow +0} 2^{\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}} = +0.$$

Видим, что $f(-0) = f(+0) = 0$, но $f(0)$ не определена, следовательно, $x = 0$ является точкой устранимого разрыва.

в) $x = 1$.

$$f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} 2^{\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}} = +0;$$

$$f(1+0) = \lim_{x \rightarrow 1+0} 2^{\frac{1}{x^2(x-1)(x+1)}} = +\infty.$$

Так как $f(1-0) = +0$, $f(1+0) = +\infty$, то $x = 1$ является точкой разрыва второго рода.

Для построения эскиза графика исследуем поведение функции при $x \rightarrow -\infty$ и $x \rightarrow +\infty$:

$$f(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{\frac{1}{x^2(x^2-1)}} = \left[\begin{array}{l} 2^{\frac{1}{(-\infty)^2((-\infty)^2-1)}} = 2^{\frac{1}{(+\infty)(+\infty)}} = 2^{\frac{1}{+\infty}} = \\ = 2^{+0} = 1+0 \end{array} \right] = 1+0,$$

$$f(+\infty) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{\frac{1}{x^2(x^2-1)}} = \left[\begin{array}{l} 2^{\frac{1}{(+\infty)^2((+\infty)^2-1)}} = 2^{\frac{1}{(+\infty)(+\infty)}} = 2^{\frac{1}{+\infty}} = \\ = 2^{+0} = 1+0 \end{array} \right] = 1+0$$

(выражение $1+0$) означает, что $f(x)$ стремится к 1, оставаясь больше 1).

Опираясь на полученные данные, сделаем эскиз графика (рис. 5).

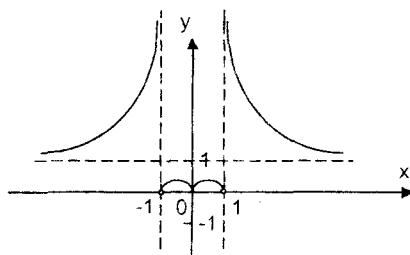


Рис. 5

5. Бесконечно малые величины и их сравнение

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой величиной (б.м.в.) при $x \rightarrow x_0$, если $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$. Пусть $\alpha(x), \beta(x)$ – б.м.в. при $x \rightarrow x_0$ и

$\lim_{x \rightarrow x_0} (\alpha(x)/\beta(x)) = C$; тогда

а) если $C \neq 0, C \neq \infty$, то говорят, что $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ являются б.м.в. одного порядка;

при $C = 1$ $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными б.м.в. и при этом пишут $\alpha(x) \sim \beta(x)$;

б) если $C = 0$, то $\alpha(x)$ называется б.м.в. более высокого порядка чем $\beta(x)$, и пишут $\alpha(x) = o(\beta(x))$.

При $x \rightarrow 0$ справедливы следующие соотношения, вытекающие из первого и второго замечательных пределов и непрерывности элементарных функций:

$$\sin x \sim \operatorname{tg} x \sim \arcsin x \sim \operatorname{arctg} x \sim x;$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \ln(1+x) \sim x, a^x - 1 \sim x \cdot \ln a;$$

$$\log_a(1+x) \sim \frac{x}{\ln a}, (1+x)^p - 1 \sim px, p > 0.$$

Эти соотношения используют для раскрытия неопределённости.

Пример 11. Найти

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1 - \sin 2x} - 1)(e^{\operatorname{arctg}^2 3x} - 1)}{(1 - \cos 2x) \ln(1 + 5x)}.$$

Решение. Имеем

$$\sqrt{1 - \sin 2x} - 1 = (1 - \sin 2x)^{1/2} - 1 \sim \frac{1}{2}(-\sin 2x) \sim \frac{1}{2}(-2x) = -x,$$

$$e^{\operatorname{arctg}^2 3x} - 1 \sim (\operatorname{arctg} 3x)^2 \sim (3x)^2 = 9x^2,$$

$$1 - \cos 2x \sim \frac{(2x)^2}{2} = 2x^2, \quad \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{9x^2}{8x^2}} = e^{\frac{9}{8}}.$$

Учитывая это, получаем

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1 - \sin 2x} - 1)(e^{\operatorname{arctg}^2 3x} - 1)}{(1 - \cos 2x) \ln(1 + 5x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(-x)9x^2}{2x^2 \cdot 5x} = -\frac{9}{10}.$$

Пример 12. Найти

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 2}{2x^2 - 1} \right)^{x^2}.$$

Решение. Имеем

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 2}{2x^2 - 1} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 1 + 3}{2x^2 - 1} \right)^{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 - 1}{2x^2 - 1} + \frac{3}{2x^2 - 1} \right)^{x^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{2x^2 - 1} \right)^{\frac{2x^2 - 1}{3} \cdot \frac{3x^2}{2x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{3}{2x^2 - 1} \right)^{\frac{2x^2 - 1}{3}} \right]^{\frac{3x^2}{2x^2 - 1}} =$$

$$= \left[\left(1 + \frac{3}{2x^2 - 1} \right)^{\frac{2x^2 - 1}{3}} \rightarrow e \right]_{\text{при } x \rightarrow \infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{3x^2}{2x^2 - 1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{3x^2}{x^2(2 - 1/x^2)}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{3}{2 - 1/x^2}} =$$

$$= x_n = \frac{6n + 1}{-n - 3} = x_n = \frac{-2n + 5}{n + 1}.$$

Пример 13. Найти предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{\operatorname{ctg} 4x^2}$$

Решение. Имеем $\cos 3x = 1 - (1 - \cos 3x) \sim 1 - \frac{(3x)^2}{2} = 1 - \frac{9x^2}{2},$

$$\operatorname{ctg} 4x^2 = \frac{1}{\operatorname{tg} 4x^2} \sim \frac{1}{4x^2}. \quad \text{Отсюда находим } \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 3x)^{\operatorname{ctg} 4x^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{9x^2}{2} \right)^{\frac{1}{4x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 - \frac{9x^2}{2} \right)^{\frac{2}{9x^2} \cdot \left(\frac{9x^2}{2} \right)^{\frac{1}{4x^2}}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 - \frac{9x^2}{2} \right)^{\frac{2}{9x^2}} \right]^{\frac{9x^2}{2} \cdot \frac{1}{4x^2}} = \left[\left(1 - \frac{9x^2}{2} \right)^{\frac{2}{9x^2}} \rightarrow e \text{ при } x \rightarrow 0 \right]^{\frac{1}{2}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{9x^2}{8x^2}} = e^{\frac{9}{8}}.
\end{aligned}$$

Задание 2.1

Для заданной последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ найдите:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$;

б) n_0 такое, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $|x_n - a| < 0,001$.

1) $x_n = \frac{3n+1}{-2n-1}$;

10) $x_n = \frac{-2n+5}{n+1}$;

2) $x_n = \frac{n+2}{4n-1}$;

11) $x_n = \frac{5n-11}{-2n+7}$;

3) $x_n = \frac{6n+1}{-n-3}$;

12) $x_n = \frac{6n-5}{3n+2}$;

4) $x_n = \frac{4n-2}{-5n+3}$;

13) $x_n = \frac{-5n+3}{-2n+7}$;

5) $x_n = \frac{-3n+4}{5n-2}$;

14) $x_n = \frac{4n-6}{-3n+5}$;

6) $x_n = \frac{-3n+2}{-n+3}$;

15) $x_n = \frac{2n-9}{-7n+10}$;

7) $x_n = \frac{-2n+3}{-3n+1}$;

16) $x_n = \frac{6n-5}{4n-3}$;

8) $x_n = \frac{n+1}{-3n-2}$;

17) $x_n = \frac{3n-7}{4n+5}$;

9) $x_n = \frac{-5n+1}{-2n-3}$;

18) $x_n = \frac{n+12}{-5n+2}$;

19) $x_n = \frac{-n+8}{-5n+4}$;

20) $x_n = \frac{4n-11}{2n+9}$;

21) $x_n = \frac{-2n+11}{4n+7}$;

22) $x_n = \frac{-5n+1}{-4n-3}$;

23) $x_n = \frac{-3n+2}{2n+11}$;

24) $x_n = \frac{2n+5}{-3n+7}$;

25) $x_n = \frac{5n-4}{-4n+11}$;

26) $x_n = \frac{4n+9}{-n+5}$;

27) $x_n = \frac{-4n+11}{3n-2}$;

28) $x_n = \frac{-3n+10}{-5n+6}$;

29) $x_n = \frac{2n-7}{3n-8}$;

30) $x_n = \frac{5n+8}{-6n-1}$.

Задание 2.2

Пользуясь определением предела функции, докажите, что $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$. По данному $\varepsilon = 0,01$ найдите $\delta > 0$ такое, что из неравенства $|x - x_0| < \delta$ следует $|f(x) - A| < 0,01$.

№ п/п	$f(x)$	x_0	A	№ п/п	$f(x)$	x_0	A
1	$7x-1$	1	6	16	$-2x+1$	1	-1
2	$9x+1$	-1	-8	17	$-3x-3$	1	-6
3	$3x+4$	2	10	18	$x-5$	4	-1
4	$5x+3$	-2	-7	19	$-3x+4$	2	-2
5	$8x-2$	2	14	20	$7x-2$	2	12
6	x^2-9	2	-5	21	$10x+1$	1	11
7	$6x-7$	2	5	22	$12x-5$	2	19
8	$4x^2-1$	1	3	23	$11x+3$	-1	-8
9	$-3x+5$	-1	8	24	$-6x+5$	-1	11
10	$8x-4$	2	12	25	$-x+7$	1	6
11	$4x-3$	1	1	26	$-x^2+1$	1	0
12	x^2-1	1	0	27	$-x^2-5$	3	-14
13	x^2-4	3	5	28	$3x-9$	3	0
14	$6x+1$	1	7	29	$2x+7$	-1	5
15	$-x+4$	2	2	30	$-4x+3$	2	-5

Задание 2.3

Найдите пределы.

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{x^{16} + 3x} + 1}{\sqrt[8]{x^{32} + x^2 + x + x^4}};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^{10} + 4x^2 + 9}}{\sqrt[5]{x^5 + 7x + 5x^2}};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^6 + 2x^3 + 3x^2}}{\sqrt[7]{x^{21} + 5x^2 + x}};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^{12} + 4x + 7 + 4x^2}}{\sqrt[5]{x^{20} + x^{11} + x^2 + 9x^4}};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[18]{x^{36} + x^{10} + 7x^6}}{\sqrt[5]{x^{40} + x^{20} + 10x}};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[7]{x^{14} + 5x^{10} + 9}}{\sqrt[6]{x^{12} + x^5 + 3 + 8x}};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^{30} + 7x^{20} + x^3}}{\sqrt[10]{x^{10} + 5x^6 + 10 + 8x^5}};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[7]{x^{24} + 7x^2 + x + 2x^3}}{\sqrt[8]{x^{24} + 5x^{10} + 3 + 10}};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[10]{x^{10} + x^9 + 7 + 3}}{\sqrt[5]{x^5 + x^4 + x + 2x}};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[8]{x^{40} + x^{10} + 10}}{\sqrt{x^{10} + x^9 + x + 15}};$$

$$11) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[7]{x^{21} + x^{20} + 5x + 8x^6}}{\sqrt{x^{40} + x^{10} + x^3}};$$

$$12) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[6]{x^{12} + 3x - 4 + x^2}}{\sqrt[5]{x^{10} + x^2 + 6 + 7x}};$$

$$13) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[7]{x^{49} + x^3 + x + 20x}}{2x^7 + \sqrt{x^6 + 3x^2 + 9}};$$

$$14) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^{20} + x^5 + x + 3}}{\sqrt[3]{x^{15} + 3x + 2}};$$

$$15) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[7]{x^7 + x^6 + 5x + 2x^3}}{\sqrt[9]{x^{27} + 6x^{20} + 7}};$$

$$16) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[15]{x^{30} + 5x^{10} + 10x}}{\sqrt[10]{x^{20} + 7x^6 + 9 + x^2}};$$

$$17) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[30]{x^{60} + 5x^{10} + x}}{\sqrt[8]{x^8 + 5x^7 + 3x^2}};$$

$$18) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[8]{x^{72} + x^{15} + 5x - 15}}{\sqrt[4]{x^{10} + 5 + 3x^9}};$$

$$19) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[7]{x^{14} + x^{13} + 5 - 7x^5}}{\sqrt{x^{10} + 5x^5 + x + 2x}};$$

$$20) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^{30} + 10x^{15} + 3}}{\sqrt[5]{5x^{20} + 10x - 12}};$$

$$21) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[20]{x^{40} + 4x^{30} - 3}}{\sqrt[3]{x^3 + x^2 - 3x + 5x^2}};$$

$$22) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^8 + 7x^6 + x - 10}}{\sqrt[30]{x^{10} + 2x^7 + 5 + 3x^4}};$$

$$23) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[5]{x^{20} + 4x^3 + 7}}{\sqrt[8]{x^{32} + x - 9x^2}};$$

$$24) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[7]{x^{28} + 5x^{20} + x + 7}}{\sqrt[5]{x^{40} + x^{25} + 3}};$$

$$25) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[2]{x^{30} + 2x - 5 + 2x^{10}}}{\sqrt{x^{20} + x^{10} + x + 4x^5}};$$

$$26) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[10]{x^{10} + 5x^9 + 4}}{\sqrt[15]{x^{15} + x^{10} + x + 9x}};$$

$$27) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 5x^2 + x + 2x^6}}{\sqrt[3]{x^{18} + 4x^6 + 3 - 7}};$$

$$28) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[16]{x^{16} + x^5 + 3 + 2x}}{\sqrt{3x^2 + 2x + 5}};$$

$$29) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[11]{x^{33} + 5x - 7}}{\sqrt[5]{x^{10} + x^9 + 4 + 3x^3}};$$

$$30) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[12]{x^{24} + x^{20} + x}}{\sqrt[19]{x^{20} + x^8 + 4 + 20x^2}}.$$

Задание 2.4

Найдите пределы.

$$1) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 2}{x^2 - 1};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 1};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^3 - 2x - 1)(x + 1)}{x^4 + 4x^2 - 5};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - x}{x^2 + x - 2};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x^2 - x + 1};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 5x^2 + 6x};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (1+3x)}{x^2 + x^5};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 2x^2 + x - 1}{x^3 - x^2 + 3x - 3};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 + 3x + 2)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2};$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 3x^2 - 4}{x^4 - 16};$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{2x^4 - x^2 - 1};$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{3x^2 - 7x - 2};$$

$$14) \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8x^3 - 1}{6x^2 - 5x + 1};$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3};$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^3 - 2x^2 - x + 2};$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^4 - 12x^2 + x + 2}{x^2 - 4};$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 125}{x^3 - 2x^2 - 15x};$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x^3 + 2x^2 - x - 2};$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 9}{3x^2 - 10x + 3};$$

$$21) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 8x + 16}{x^3 - 4x^2 - 2x + 8};$$

$$22) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4x^2 - 7x - 2}{5x^2 - 11x + 2};$$

$$23) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{3x^2 - 11x - 4};$$

$$24) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x^2 + 2x + 1)^2}{x^5 + x^2};$$

$$25) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^2 - 4x + 4};$$

$$26) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 3x + 2};$$

$$27) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4 - 81}{x^4 + 2x^3 - 15x^2};$$

$$28) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6};$$

$$29) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2x^2 - x - 1)^2}{x^3 + 2x^2 - x - 2};$$

$$30) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^3 - (1+3x)}{x^2 + x^6}.$$

Задание 2.5

Найдите пределы.

$$1) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{\sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[3]{x+1} - 1};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{3x+17} - \sqrt{2x+12}}{x^2 + 8x + 15};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2 + 4x + 1}{\sqrt{x+3} - \sqrt{5+3x}};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x^2} - 1}{x^2};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{x+6}}{x^2 - x - 6};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x-6} + 2}{x+2};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt{x}};$$

$$11) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+10} - \sqrt{4-x}}{2x^2 - x - 21};$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}{x};$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}};$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{3+2x} - \sqrt{x+4}}{3x^2 - 4x + 1};$$

$$15) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{2x+1} - 3};$$

$$16) \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{x+14} - \sqrt{4-x}}{2x^2 + 11x + 5};$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x-8} + \sqrt[3]{x+8}}{x};$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x+5} - \sqrt{2x+4}};$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^2 + 6x + 1}{\sqrt{x+9} - 2\sqrt{1-x}};$$

$$20) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x} - 2}{\sqrt{2-x} - 1};$$

$$21) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3}}{2x^2 - 9x + 4};$$

$$22) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{\sqrt{2x+1} - 3};$$

$$23) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4};$$

$$24) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9 + 5x + 4x^2} - 3}{x^3 + 9x};$$

$$25) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{\sqrt{x^2 + 9} - 3};$$

$$26) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x + 13} - 2\sqrt{x + 1}}{x^2 - 9};$$

$$27) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{\sqrt{6x^2 + 3} + 3x};$$

$$28) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - 2x} - \sqrt{1 - 3x}}{x^3 + 6x^2 + 9x};$$

$$29) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{8 + 3x + x^2} - 2}{x + x^2};$$

$$30) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1 - \sqrt{x - 4}}{2 - \sqrt{2x - 6}}.$$

Задание 2.6

Найдите пределы.

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x + 5} - \sqrt[3]{x});$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x);$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{(x + 1)(x + 2)} - x);$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 2x - 1} - \sqrt{x^2 - 7x + 3});$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{(x + 1)^2} - \sqrt[3]{(x - 1)^2});$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{3}{2}} (\sqrt{x^3 + 1} - \sqrt{x^3 - 1});$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{(x + 2)^2} - \sqrt[3]{(x - 1)^2});$$

$$8) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{1 + x + x^2} - \sqrt{7x + 2x + x^2});$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{4}{3}} (\sqrt[3]{x^2 + 1} - \sqrt[3]{x^3 - 1});$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \infty} x (\sqrt{x^2 - 8} - \sqrt{x^2 - 3});$$

$$11) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x^2 + 8} (\sqrt{x^3 + 2} - \sqrt{x^3 - 1});$$

$$12) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x} (\sqrt{x^3} - \sqrt{x(x^2 - 1)});$$

$$13) \lim_{x \rightarrow \infty} x (\sqrt{x^2 - 1} - x);$$

- 14) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 5x + 6} - x)$;
- 15) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x(x+5)} - x)$;
- 16) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 6} - \sqrt{x^2 + 2x - 1})$;
- 17) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + x - 1} - \sqrt{x^2 - x + 1})$;
- 18) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x} (\sqrt{3x+1} - \sqrt{3x+9})$;
- 19) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} (\sqrt{x+2} - \sqrt{x-3})$;
- 20) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x + \sqrt[3]{4-x^2}) \cdot x^2$;
- 21) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (\sqrt{x(x^4-1)} - \sqrt{x^5-8})$;
- 22) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 3x - 2} - \sqrt{x^2 - 3})$;
- 23) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 (\sqrt{x^4 - 1} - \sqrt{x^4 - 5})$;
- 24) $\lim_{x \rightarrow \infty} 3x^2 (\sqrt[3]{5+x^3} - x)$;
- 25) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+2} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x-4})$;
- 26) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{4x(x+1)} (\sqrt{x^3-3} - \sqrt{x^3-2})$;
- 27) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{5/2} (\sqrt{3+x^5} - \sqrt{9+x^5})$;
- 28) $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[3]{x^2} (\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x-10})$;
- 29) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 9x + 5} - \sqrt{3x + 5 + x^2})$;
- 30) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{25x^2 + 6x + 9} - 5x)$.

Задание 2.7

Найдите пределы.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^2 x}{x^2};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \operatorname{tg} x};$$

- 3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\sin 3x}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{ctg} 2x \cdot \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{2} - x \right)$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^5 x}{x^2}$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin^2 3x}{x \cdot \operatorname{arctg} 2x}$;
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \frac{x}{4}}{\operatorname{tg}^2 5x}$;
- 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin^3 2x}{\operatorname{arctg} x^3}$;
- 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 10x - \sin 2x}{\arcsin 3x}$;
- 10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$;
- 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x(1 - \cos 2x)}$;
- 12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{4x^2}$;
- 13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 4x}{2x \cdot \operatorname{tg} 2x}$;
- 14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2}$;
- 15) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^3 x}{x \sin 2x}$;
- 16) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)^2}{\operatorname{tg} x - \sin x}$;
- 17) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin 2x}{x + \sin 3x}$;
- 18) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{\cos x}}{x^2}$;
- 19) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 6x - \sin 2x}{5x}$;
- 20) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin x}{\operatorname{tg} 5x}$;
- 21) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^3 5x}{\sin 8x^3}$;
- 22) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 6x - \cos 10x}{\operatorname{tg}^2 3x}$;
- 23) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$;
- 24) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 5x}{1 - \cos 3x}$;
- 25) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\cos 7x - \cos 3x}$;
- 26) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x \sin x}{1 - \cos x}$;
- 27) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x}$;
- 28) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \operatorname{ctg} 2x}{\sin 3x}$;
- 29) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 - \sin x - \cos x}$;
- 30) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x - \arcsin x}{2x + \operatorname{arctg} x}$.

Задание 2.8

Исследуйте на непрерывность функцию $f(x)$ и постройте её график.

$$\begin{aligned}
 1) f(x) &= \begin{cases} x-1, & \text{если } x \leq 1, \\ \sin(x-1), & \text{если } 1 < x \leq 2, \\ x^2, & \text{если } x > 2; \end{cases} \\
 2) f(x) &= \begin{cases} x+1, & \text{если } x \leq 1, \\ -x+3, & \text{если } 1 < x \leq 2, \\ 2^{-x}, & \text{если } x > 2; \end{cases} \\
 3) f(x) &= \begin{cases} x^2-1, & \text{если } x \leq 1, \\ 2^{x-1}-1, & \text{если } 1 < x < 2, \\ \sin \pi x, & \text{если } x > 2; \end{cases} \\
 4) f(x) &= \begin{cases} -x^2, & \text{если } x \leq 1, \\ x+1, & \text{если } 1 < x \leq 2, \\ e^x, & \text{если } x > 2; \end{cases} \\
 5) f(x) &= \begin{cases} x^2, & \text{если } x \leq 2, \\ -x+6, & \text{если } 2 < x \leq 3, \\ 4^{3x-3}, & \text{если } x > 3; \end{cases} \\
 6) f(x) &= \begin{cases} x^3, & \text{если } x \leq 1, \\ \sin \frac{\pi x}{2}, & \text{если } 1 < x \leq 2, \\ \log_2(x-1), & \text{если } x > 2; \end{cases} \\
 7) f(x) &= \begin{cases} \sin 2x, & \text{если } x \leq 1, \\ 3 \sin \frac{\pi x}{2}, & \text{если } 1 < x \leq 2, \\ 2^x, & \text{если } x > 2; \end{cases} \\
 8) f(x) &= \begin{cases} x^2+1, & \text{если } x \leq -1, \\ -2x, & \text{если } -1 < x \leq 2, \\ \ln x, & \text{если } x > 2; \end{cases} \\
 9) f(x) &= \begin{cases} x-1, & \text{если } x < 1, \\ x^2, & \text{если } 1 \leq x < 2, \\ 3 + \log_2 x, & \text{если } x \geq 2; \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$10) f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & \text{если } x \leq 2, \\ 2x - 4, & \text{если } 2 < x \leq 3, \\ 3^x, & \text{если } x > 3; \end{cases}$$

$$11) f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & \text{если } x \leq 2, \\ \ln\left(\frac{x}{2}\right), & \text{если } 2 < x \leq 3, \\ \frac{x}{2}, & \text{если } x > 3; \end{cases}$$

$$12) f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & \text{если } x \leq 0, \\ \operatorname{tg} \pi x, & \text{если } 0 < x \leq \frac{\pi}{4}, \\ 2^x, & \text{если } x > \frac{\pi}{4}; \end{cases}$$

$$13) f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{если } x \leq 1, \\ 2 \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{4}, & \text{если } 1 < x < 4, \\ 3 - x, & \text{если } x \geq 4; \end{cases}$$

$$14) f(x) = \begin{cases} -x^2, & \text{если } x \leq 2, \\ -2x, & \text{если } 2 < x \leq 4, \\ \frac{3}{x}, & \text{если } x > 4; \end{cases}$$

$$15) f(x) = \begin{cases} \cos \pi x, & \text{если } x \leq 1, \\ x^2 - 2x, & \text{если } 1 < x \leq 3, \\ -2x + 4, & \text{если } x > 3; \end{cases}$$

$$16) f(x) = \begin{cases} 2^{-x}, & \text{если } x \leq 1, \\ \frac{1}{2}x, & \text{если } 1 < x \leq 4, \\ -x, & \text{если } x > 4; \end{cases}$$

$$17) f(x) = \begin{cases} x^2 - 4, & \text{если } x \leq 1, \\ -2x - 1, & \text{если } 1 < x < 2, \\ -2^x, & \text{если } x \geq 2; \end{cases}$$

$$18) f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & \text{если } x \leq -2, \\ x, & \text{если } -2 < x \leq 1, \\ \log_2(x+1), & \text{если } x > 1; \end{cases}$$

$$19) f(x) = \begin{cases} -2x + 1, & \text{если } x < -1, \\ 4, & \text{если } -1 \leq x < 1, \\ 4^x, & \text{если } x \geq 1; \end{cases}$$

$$20) f(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & \text{если } x < 2, \\ \sqrt{x-2}, & \text{если } 2 \leq x < 3, \\ x, & \text{если } x \geq 3; \end{cases}$$

$$21) f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & \text{если } x \leq 1, \\ 3 \sin \frac{\pi x}{2}, & \text{если } 1 < x \leq 2, \\ 2^x, & \text{если } x > 2; \end{cases}$$

$$22) f(x) = \begin{cases} -2, & \text{если } x < -1, \\ -x^2, & \text{если } -1 \leq x \leq 3, \\ -3x, & \text{если } x > 3; \end{cases}$$

$$23) f(x) = \begin{cases} x^2 - x, & \text{если } x \leq 0, \\ \cos x - 1, & \text{если } 0 < x \leq 2, \\ 2^{-x}, & \text{если } x > 2; \end{cases}$$

$$24) f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x, & \text{если } x \leq 1, \\ 2x + 2, & \text{если } 1 < x < 2, \\ 2^x, & \text{если } x \geq 2; \end{cases}$$

$$25) f(x) = \begin{cases} x^3 - 1, & \text{если } x \leq 1, \\ \sqrt{x-1}, & \text{если } 1 < x \leq 5, \\ -2x, & \text{если } x > 5; \end{cases}$$

$$26) f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & \text{если } x < -1, \\ x^2, & \text{если } -1 \leq x < 2, \\ 3, & \text{если } x \geq 2; \end{cases}$$

$$27) f(x) = \begin{cases} -1, & \text{если } x \leq 1, \\ -\sqrt{x}, & \text{если } 1 < x \leq 4, \\ x^2 - 5x - 4, & \text{если } x \geq 4; \end{cases}$$

$$28) f(x) = \begin{cases} -x + 2, & \text{если } x \leq -2, \\ \sin x, & \text{если } -2 < x \leq 0, \\ x^3, & \text{если } x > 0; \end{cases}$$

$$29) f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & \text{если } x \leq 0, \\ 2, & \text{если } 0 < x \leq 3, \\ 2x - 4, & \text{если } x > 3; \end{cases}$$

$$30) f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & \text{если } x \leq -2, \\ 2 - x^2, & \text{если } -2 < x \leq 1, \\ 2x - 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$$

Задание 2.9

Исследуйте на непрерывность функцию $f(x)$, сделайте эскиз графика.

$$1) f(x) = 3^{\frac{4}{(x-2)^2(x^2-5x+4)}}; \quad 6) f(x) = 2^{\frac{3}{(x-1)^2(4-x^2)}};$$

$$2) f(x) = -2^{\frac{3}{(x-1)^2(x^2-5x+6)}}; \quad 7) f(x) = e^{\frac{2}{(x-3)^2(x^2-4x)}};$$

$$3) f(x) = 4^{\frac{2}{x^2(x^2-4x+3)}}; \quad 8) f(x) = 4^{\frac{1}{(x+3)^2(x^2-2x-3)}};$$

$$4) f(x) = -3^{\frac{1}{(x+1)^2(x^2-3x+2)}}; \quad 9) f(x) = 5^{\frac{-2}{(x+1)^2(x^2+5x-6)}};$$

$$5) f(x) = -4^{\frac{1}{(x+2)^2(x^2-6x+2)}}; \quad 10) f(x) = -4^{\frac{1}{(x+4)^2(x^2-2x)}};$$

$$11) f(x) = -5^{\frac{1}{(x-3)^2(x^2-2x)}};$$

$$21) f(x) = -2^{\frac{3}{(x-4)^2(x^2-13x+42)}};$$

$$12) f(x) = 6^{\frac{2}{|x+2|x}};$$

$$22) f(x) = -\pi^{\frac{2}{(x+6)^2(x^2+4x+3)}};$$

$$13) f(x) = e^{\frac{1}{(x+3)^2(x^2+2x)}};$$

$$23) f(x) = 2^{\frac{-3}{(x-4)^2(x^2-4x-5)}};$$

$$14) f(x) = 2^{\frac{3}{(x-1)(x+2)}};$$

$$24) f(x) = -5^{\frac{1}{x^2(x^2+6x+8)}};$$

$$15) f(x) = 5^{\frac{2}{(x-2)^2(x^2-1)}};$$

$$25) f(x) = 6^{\frac{-1}{(x+2)^2(x^2+2x-3)}};$$

$$16) f(x) = 3^{\frac{4}{(x-3)^2(x^2+x-2)}};$$

$$26) f(x) = -2^{\frac{3}{(x+3)^2(x^2+3x-4)}};$$

$$17) f(x) = -8^{\frac{2}{(x+4)^2(x^2+11x+30)}};$$

$$27) f(x) = \pi^{\frac{-2}{(x+4)^2(x^2+8x+12)}};$$

$$18) f(x) = -e^{\frac{3}{(x+3)^2(x^2+9x+20)}};$$

$$28) f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{(x-5)^2(x^2-x-2)}};$$

$$19) f(x) = -6^{\frac{-2}{(x+5)^2(x^2-4x+3)}};$$

$$29) f(x) = -2^{\frac{2}{(x+3)^2(x^2-4x)}};$$

$$20) f(x) = 3^{\frac{-1}{(x-5)^2(x^2-8x+12)}};$$

$$30) f(x) = 32^{\frac{1}{(x-4)^2(x^2-2x)}};$$

Задание 2.10

Найдите пределы.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{1 + \operatorname{tg} 2x} - 1) \ln(1 + \sin^2 3x)}{(1 - \cos x)(2^{\operatorname{arctg} 4x} - 1)};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 3x)(\sqrt{1 - \operatorname{arc} \operatorname{tg} x} - 1)}{(e^{\sin^2 2x} - 1) \ln(1 - \arcsin 3x)}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_2(1 + \operatorname{tg}^2 3x)(3^{\sin 4x} - 1)}{(\sqrt[4]{1 + \arcsin 2x} - 1)(1 - \cos 2x)};$$

- 4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\arctg 5x^2} - 1) \ln(1 - \sin 4x)}{(\sqrt{1 + \operatorname{tg} 6x} - 1)(1 - \cos 4x)}$;
- 5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_3(1 - \sin^3 2x)(\sqrt{1 + \arcsin 3x} - 1)}{(4^{\operatorname{tg}^2 x} - 1)(1 - \cos 6x)}$;
- 6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos 4x - 1) \ln(1 - \sin(\operatorname{tg} 2x))}{(e^{3x^2} - 1)(\sqrt[3]{1 + \arctg 2x} - 1)}$;
- 7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[4]{1 + \arcsin 2x^2} - 1) \ln(1 + \operatorname{tg} 3x)}{(1 - \cos 4x)(5^{4x} - 1)}$;
- 8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(\sin 2x)) \ln(1 - \operatorname{actg} 4x)}{(\sqrt{1 - \sin^2 2x} - 1)(6^{5x} - 1)}$;
- 9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{\operatorname{tg}^2 4x} - 1)(\sqrt[3]{1 - \operatorname{tg} 2x} - 1)}{(1 - \cos(\sin 2x)) \ln(1 - \operatorname{tg} \pi x)}$;
- 10) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[6]{1 + \operatorname{tg}(\sin 2x^2)} - 1) \ln(1 + \arcsin 7x)}{(1 - \cos 5x)(2^{\arctg x^2} - 1)}$;
- 11) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(\operatorname{tg} 3x^2))(3^{\arctg 2x} - 1)}{(\sqrt[3]{1 - \sin^2 2x^2} - 1) \ln(1 + \arcsin 8x)}$;
- 12) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\pi^{\sin^2 4x} - 1) \ln(1 - \operatorname{arctg}^2 x)}{(\sqrt[7]{1 + \operatorname{tg} 2x^2} - 1)(\cos 6x - 1)}$;
- 13) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[8]{1 - \operatorname{tg}(\arcsin 3x^2)} - 1) \log_3(1 - \operatorname{arctg} 4x)}{(\cos 7x - 1)(2^{\sin 6x} - 1)}$;
- 14) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{2\sin^2 3x} - 1)(\sqrt{1 - \operatorname{tg}^3 2x} - 1)}{(1 - \cos 3x^2) \ln(1 + \arcsin 10x)}$;

- $$15) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(\sin 3x))(\sqrt[6]{1 + \operatorname{arctg} 2x^2} - 1)}{\log_5(1 - \arcsin^2 4x)(2^{1 - \cos x} - 1)};$$
- $$16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{((1 + \sin 2x)^{11} - 1)(3^{\sin^2 4x} - 1)}{(1 - \cos 8x) \ln(1 - \sin(\sin 3x))};$$
- $$17) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2^{\operatorname{tg} 5x} - 1)^2 (\sqrt{1 - \sqrt{\arcsin x^2}} - 1)}{\left(1 - \cos \frac{5}{2}x\right) \log_4(1 - \sin^2 2x)};$$
- $$18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos 6x)^2 (\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2x^2} - 1)}{(e^{\sin^2 x^3} - 1) \ln(1 - \operatorname{tg} \sin^2 3x)};$$
- $$19) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(6^{\operatorname{tg} 3x^2} - 1)(1 - \cos(\arcsin 4x))}{(\sqrt[3]{1 + \sin^2 4x} - 1) \log_7(1 + \arcsin^2 5x)};$$
- $$20) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[4]{1 + \operatorname{tg}^2 \sin 2x} - 1)(e^{1 - \cos 2x} - 1)}{\arcsin^3 3x \cdot \ln\left(1 - \sqrt{\sin(\sin x^2)}\right)};$$
- $$21) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(2 \operatorname{tg} x^2))(\sqrt[3]{1 - \sin x^2} - 1)}{(e^{\arcsin 2x^3} - 1) \ln(1 + \sqrt{\operatorname{arctg} 2x^2})};$$
- $$22) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\pi^{\operatorname{tg}^2(\operatorname{tg} 2x)} - 1)(1 - \cos 8x)}{(\sqrt[5]{1 - \sin 3x^3} - 1) \log_6(1 + \sqrt{\operatorname{tg} x^2})};$$
- $$23) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(4^{\arcsin x^2} - 1)(\sqrt[10]{1 - \operatorname{arctg} 3x^2} - 1)}{(1 - \cos(\operatorname{tg} 6x)) \ln(1 - \sqrt{\sin x^2})};$$
- $$24) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos(5 \arcsin 2x) - 1) \log_3(1 + \sin(\operatorname{tg}^2 4x))}{(\sqrt{1 - \operatorname{arctg}^2 6x} - 1)(5^{\operatorname{tg} 2x^2} - 1)};$$

$$25) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\sqrt[4]{1 + \operatorname{tg}(\sin^2 x)} - 1\right) \ln(1 - 2\operatorname{tg}(\operatorname{tg} x^3))}{\left(e^{\arcsin 4x} - 4\right)(1 - \cos(\sin^2 2x))};$$

$$26) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(1 - \cos \sqrt{\operatorname{tg} 4x^2}\right) \left(6^{\sin^2 3x} - 1\right)}{\left(\sqrt[5]{1 - \sin 3x^3} - 1\right) \log_2(1 + 3 \arcsin(\operatorname{tg} x^2))};$$

$$27) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\sqrt{1 + 2 \sin^2 3x} - 1\right)(1 - \cos 3x)}{\left(e^{\operatorname{tg}^3 2x} - 1\right) \ln(1 + 2 \sin 7x)};$$

$$28) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(2^{6 \operatorname{tg}^2 x} - 1\right) \left(\sqrt[2]{1 - 3 \sin 5x} - 1\right)}{\left(1 - \cos(2 \sin 3x)\right) \log_8(1 - 3 \operatorname{arctg} 10x)};$$

$$29) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(8^{3 \arcsin^3 2x} - 1\right) \ln(1 + 4 \operatorname{tg} 9x)}{\left(1 - \cos(5 \operatorname{arctg} 3x)\right) \left(\sqrt[10]{1 - 10 \sin 3x} - 1\right)}$$

$$30) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\sqrt[4]{1 - 3 \operatorname{arctg}^2 2x} - 1\right) \left(e^{\sin^2 6x} - 1\right)}{\left(1 - \cos(3 \sin 4x)\right) \log_3(1 + 7 \operatorname{tg} 8x^2)}.$$

Задание 2.11

Найдите предел, используя второй замечательный предел.

$$1) \lim_{x \rightarrow \infty} (x + 7) [\ln(x + 1) - \ln(x + 3)]; \quad 6) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 1}{3x^2 - 1}\right)^{2x};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} (2x + 1) [\ln(3x + 1) - \ln 3x]; \quad 7) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 2}{3x^2 - 2}\right)^{x^2};$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} (x - 5) [\ln(2x - 3) - \ln(2x - 1)]; \quad 8) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + 3x^2}{1 - 2x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} (6x + 3) [\ln(5x + 2) - \ln(5x - 1)]; \quad 9) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 - x^2}{2 + x^2}\right)^{\frac{3}{x^2}};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} (2x - 7) [\ln(x + 4) - \ln(x + 5)]; \quad 10) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + 4x^2}{1 + 2x^2}\right)^{\frac{2+x}{x^2}};$$

- 11) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x+3) [\ln(2x-3) - \ln 2x]$;
- 12) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x-5) [\ln(3x+4) - \ln(3x-2)]$;
- 13) $\lim_{x \rightarrow \infty} (3x+2) [\ln(4x+2) - \ln(4x-1)]$;
- 14) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x+4) [\ln(2x+7) - \ln(2x+2)]$;
- 15) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x+2) [\ln(3+2x) - \ln(2x-1)]$;
- 16) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x-9) [\ln(6x+1) - \ln 6x]$;
- 17) $\lim_{x \rightarrow \infty} (x+1) [\ln(2x+10) - \ln(2x-3)]$;
- 18) $\lim_{x \rightarrow \infty} (8x-1) [\ln(9x+2) - \ln 9x]$;
- 19) $\lim_{x \rightarrow \infty} (6x-2) [\ln(2x-3) - \ln(2x+5)]$;
- 20) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x+8) [\ln(x+2) - \ln(x-5)]$;
- 21) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4+x^2}{2+x^2} \right)^{x^2}$;
- 22) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-1}{2x+3} \right)^{\frac{3x^2}{x+1}}$;
- 23) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x-5} \right)^{\frac{x^2-1}{x+2}}$;
- 24) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-3+2x}{1-4x} \right)^{\frac{3x^2-1}{x+1}}$;
- 25) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x+1}{4x-1} \right)^{\frac{5x^2+1}{4x-1}}$;
- 26) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3-2x^2}{3+x^2} \right)^{\frac{2x+1}{x^2}}$;
- 27) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4-2x^2}{1-2x^2} \right)^{2x^2+1}$;
- 28) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4x^2+1}{x^2+1} \right)^{\frac{x^2+1}{x^3}}$;
- 29) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2x^2-4}{3x^2-4} \right)^{\frac{2x-1}{2x^2}}$;
- 30) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{4x^2-1}{x^2-1} \right)^{\frac{x+3}{4x^2}}$.

Задание 2.12

Найдите предел, используя замечательные пределы и их следствия.

- 1) $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin x)^{\sqrt{\lg 2x}}$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \operatorname{ctg} \frac{\pi x}{2} \right)^{\sqrt{\sqrt{x^2-1}}}$;

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} \pi x)^{1/\arcsin x};$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \cos \frac{\pi x}{2}\right)^{1/2 \sin \pi x};$$

$$5) \lim_{x \rightarrow 3+0} \left(1 + \sqrt{x^2 - 9}\right)^{1/\operatorname{tg} \pi x};$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin 3x)^{\operatorname{ctg} 2x};$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 1} (1 + \sin \pi x)^{1/\arccos x};$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 2} \left(1 + \sqrt{x^2 - 4}\right)^{1/\sin \pi x};$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)^{1/\sin 2x};$$

$$10) \lim_{x \rightarrow 4+0} \left(1 + \sqrt{x^2 - 16}\right)^{1/\operatorname{tg} \pi x};$$

$$11) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (2 - \operatorname{tg} x)^{1/\cos 2x};$$

$$12) \lim_{x \rightarrow 1} (1 - \operatorname{tg} 2\pi x)^{1/\sin \pi x};$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 2+0} \left(1 + \sqrt{x-2}\right)^{1/\cos \frac{\pi x}{4}};$$

$$14) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (2 - \operatorname{ctg} x)^{1/\sin 4x};$$

$$15) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{1/2x - \pi};$$

$$16) \lim_{x \rightarrow 3+0} \left(1 - \sqrt{x-3}\right)^{1/\sin \pi x};$$

$$17) \lim_{x \rightarrow 1+0} \left(1 + \sqrt{x+1}\right)^{1/\cos \pi x/2};$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \arcsin x)^{1/\sin(\pi/2)};$$

$$19) \lim_{x \rightarrow 1-0} (1 - \arccos x)^{1/x-1};$$

$$20) \lim_{x \rightarrow -3-0} \left(1 + \sqrt{x^2 - 9}\right)^{\operatorname{ctg} \pi x};$$

$$21) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \operatorname{arctg} x)^{1/\cos x-1};$$

$$22) \lim_{x \rightarrow 2+0} \left(1 + \sqrt{x^2 - 4}\right)^{1/\sin(\pi x/2)};$$

$$23) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg} 2x)^{1/\sin 3x};$$

$$24) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} (4 + 3 \cos 3x)^{1/\operatorname{tg} 3x};$$

$$25) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} (1 + \sin 3x)^{\operatorname{ctg} 3x};$$

$$26) \lim_{x \rightarrow \pi-0} \left(1 + \sqrt{x-\pi}\right)^{\operatorname{ctg} 3x};$$

$$27) \lim_{x \rightarrow \pi} (1 - \sin 2x)^{\operatorname{ctg} x};$$

$$28) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \operatorname{ctg} 3x)^{1/\cos x};$$

$$29) \lim_{x \rightarrow 1-0} \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2}\right)^{1/\arccos x};$$

$$30) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (1 + \cos 2x)^{1/4x - \pi};$$

III. МАТРИЦЫ. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

1. Матрицы. Действия над матрицами

Матрицей порядка $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

состоящая из m строк и n столбцов, рассматриваемая как единый алгебраический объект, над которым могут производиться определенные алгебраические действия. Часто пишут

$$A = (a_{ij}), \quad 1 \leq i \leq m, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Множество всех матриц порядка $m \times n$ обозначим $M_{m \times n}$, множество всех квадратных матриц порядка $n \times n$ – через M_n .

Произведением матрицы $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}$ на число α (действительное или комплексное) называют матрицу $B = (b_{ij}) \in M_{m \times n}$, определяемую по правилу $b_{ij} = \alpha a_{ij}$; при этом пишут $B = \alpha A$.

Суммой матриц $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}$, $B = (b_{ij}) \in M_{m \times n}$ называют матрицу $C = (c_{ij}) \in M_{m \times n}$, определяемую по правилу $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$; при этом пишут $C = A + B$. Складывать можно лишь матрицы одинакового порядка.

Произведением матрицы $A = (a_{ij}) \in M_{m \times k}$ на матрицу $B = (b_{ij}) \in M_{k \times n}$ называют матрицу $C = (c_{ij}) \in M_{m \times n}$, элементы которой определяются по правилу $c_{ij} = \sum_{p=1}^k a_{ip} b_{pj}$; при этом пишут $C = AB$.

Произведение матриц определено, если количество столбцов первого множителя A совпадает с количеством строк второго множителя B . (Можно сказать, что элемент c_{ij} матрицы $C = AB$ есть результат скалярного произведения i -й строки матрицы A на j -й столбец матрицы B .)

Введенные операции над матрицами обладают всеми известными свойствами суммы и произведения чисел

$$(A + B = B + A, \quad \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B, \quad (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A, \\ A(B + C) = AB + AC, \dots),$$

кроме одного: вообще говоря, $AB \neq BA$.

Матрицу

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называют транспонированной к матрице (1) и пишут $B = A^T$; A^T получается из A переменной местами столбцов и строк.

Пример 1. Найти $\frac{1}{3}A^2 - 2BC$, если

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 3 \\ -5 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & -3 & 7 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 21 & -9 \\ 3 & 12 & 6 \\ -3 & 3 & 30 \end{pmatrix},$$

$$BC = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 & 3 \\ -5 & 1 & 6 & -1 \\ 0 & -3 & 7 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 4 & 6 & 0 \\ -2 & 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -19 & 46 \\ \underline{13} & 49 & -8 \\ \underline{20} & \underline{46} & -7 \end{pmatrix}.$$

Поясним, как получены отмеченные элементы $d_{21} = 13$ и $d_{32} = 46$ матрицы $D = BC$. Так как d_{21} имеет индекс $_{21}$, то он равен сумме произведений соответствующих элементов 2-й строки матрицы B и 1-го столбца матрицы C :

$$d_{21} = -5 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 6 \cdot 4 + (-1) \cdot (-2) = 13.$$

Аналогично для нахождения элемента d_{32} нужно задействовать 3-ю строку матрицы B и 2-й столбец матрицы C :

$$d_{32} = 0 \cdot (-3) + (-3) \cdot (-1) + 7 \cdot 6 + 1 \cdot 1 = 46.$$

Отсюда получаем

$$\frac{1}{3}A^2 - 2BC = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 27 & 21 & -9 \\ 3 & 12 & 6 \\ -3 & 3 & 30 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 0 & -19 & 46 \\ 13 & 49 & -8 \\ 20 & 46 & -7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 9 & 7 & -3 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 38 & -92 \\ -26 & -98 & 16 \\ -40 & -92 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 45 & -95 \\ -25 & -94 & 18 \\ -41 & -91 & 24 \end{pmatrix}$$

Матрица порядка $m \times 1$ называется столбцом, а порядка $1 \times n$ – строкой. Система столбцов

$$A_1 = (a_{j1})_{j=1}^m, A_2 = (a_{j2})_{j=1}^m, \dots, A_n = (a_{jn})_{j=1}^m$$

называется *линейно-зависимой*, если существует система чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ такая, что

$$1) \quad |\lambda_1| + |\lambda_2| + \dots + |\lambda_n| \neq 0;$$

$$2) \quad \lambda_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + \lambda_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Если же равенство (2) возможно лишь при $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, то система столбцов называется *линейно независимой*. Левая часть равенства (2) называется *линейной комбинацией столбцов* A_1, A_2, \dots, A_n . Аналогичное определение дается для строк.

Нулевой матрицей (нуль-матрицей) называется матрица $O_{m \times n} \in M_{m \times n}$, состоящая из нулей.

Единичной матрицей порядка n называется квадратная матрица $I_n \in M_{n \times n}$, на главной диагонали которой, тянущейся слева-сверху-вправо-вниз, находятся единицы, а остальные элементы равны 0:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Часто пишут просто I , опуская индекс n там, где это не приводит к недоразумению.

Матрицы 0 и I играют роль нуля и единицы: $0 + A = A$, $A \cdot I = I \cdot A = A$ (операции считаются дозволёнными).

Квадратная матрица, у которой все элементы вне главной диагонали равны 0 , называется *диагональной*. Квадратная матрица, у которой все элементы, расположенные ниже главной диагонали, равны 0 , называется *треугольной*.

2. Определители

Каждой квадратной матрице $A \in M_n$ ставится в соответствие число, называемое определителем и обозначаемое $\det A$ (иногда $|A|$).

Теорема 1. Назовем неупорядоченный набор из n элементов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ матрицы $A = (a_{ij}) \in M_n$ правильным, если никакие два элемента этого набора не принадлежат одному столбцу или одной строке матрицы A . Тогда, используя лишь операции перестановки столбцов и перестановки строк, можно расположить элементы правильного набора на главной диагонали. Более того, если сделать это двумя способами и k_1 – число использованных операций (перестановок столбцов и строк) при первом способе, а k_2 – при втором способе, то $(k_1 - k_2)$ является чётным числом, т.е. $(-1)^{k_1} = (-1)^{k_2}$.

Определение. Каждому правильному набору $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ поставим в соответствие вполне определенное число $(-1)^k$ – знак набора $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, где k – число операций, необходимых для размещения элементов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ на главной диагонали. Определителем матрицы $A \in M_n$ (или определителем n -го порядка) называется число

$$\det A = \sum (-1)^k \alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n,$$

где суммирование производится по всем различным правильным наборам.

Пользуются и другим обозначением определителя матрицы $A = (a_{ij}) \in M_n$:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Определитель обладает следующими свойствами:

1) $\det A^T = \det A$;

2) при перестановке двух столбцов (строк) меняется знак определителя;

3) определитель матрицы, имеющей два одинаковых столбца (две одинаковые строки), равен нулю;

4) общий множитель столбца (строки) можно вынести за знак определителя (отсюда следует, что если один из столбцов (одна из строк) матрицы $A \in M_n$ состоит из нулей, то $\det A = 0$);

5) если к элементам некоторого столбца (строки) некоторой матрицы A прибавить соответствующие элементы другого столбца (другой строки), предварительно умноженные на одно и то же число, то определитель новой матрицы B будет равен $\det A$;

6) если какой-либо столбец (какая-либо строка) является линейной комбинацией других столбцов (других строк) матрицы A , то $\det A = 0$;

7) обозначим через M_{ij} определитель матрицы порядка $(n-1) \times (n-1)$, получающейся из матрицы $A = (a_{ij}) \in M_n$ путем зачеркивания i -й строки и j -го столбца; число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$ называется алгебраическим дополнением элемента a_{ij} ; для любого k , $1 \leq k \leq n$ справедливы равенства:

$$a_{k1}A_{k1} + a_{k2}A_{k2} + \dots + a_{kn}A_{kn} = \det A,$$

$$a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + \dots + a_{nk}A_{nk} = \det A \quad (\text{разложение определителя по } k\text{-му столбцу});$$

8) $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.

Определитель матрицы порядка 1×1 $A = (a)$ равен элементу матрицы: $\det A = a$.

Определитель второго порядка вычисляется по формуле

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Определитель третьего порядка вычисляется по формуле

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

Для вычисления определителя третьего порядка лучше пользоваться правилом Саррюса или правилом « 3×5 ».

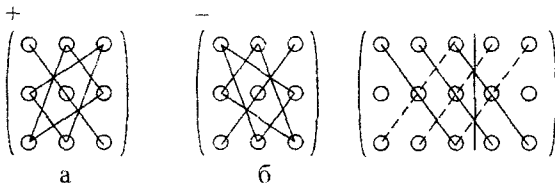


Рис. 1

Рис. 2

Правило Саррюса использует схему, изображенную на рис. 1. Правило состоит в том, что девять чисел, составляющих определитель, разбиваются на шесть троек по схеме (каждый элемент участвует дважды). Каждой тройке придается знак «+», если элементы, входящие в нее, расположены на главной диагонали или в вершинах равнобедренного треугольника с основанием, параллельным главной диагонали (рис.1, а), или «-», если элементы, входящие в тройку, расположены на побочной диагонали или в вершинах равнобедренного треугольника с основанием, параллельным побочной диагонали (рис.1, б) (побочная диагональ тянется справа-сверху-влево-вниз). Затем берется сумма произведений элементов троек с учетом их знаков.

Правило «3 × 5» использует следующую схему: (к матрице $A = (a_{ij}) \in M_3$ добавлены первые два столбца).

Элементы матрицы соединены шестью отрезками, как показано на рис.2. Произведению элементов, составляющих тройку и лежащих на одном отрезке, придается знак «+», если отрезок параллелен главной диагонали, и «-», если отрезок параллелен побочной диагонали. Определитель A равен сумме произведений элементов троек с учетом их знаков.

Определитель треугольной, в том числе и диагональной матрицы равен произведению элементов главной диагонали:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}.$$

Для вычисления определителя иногда оказывается удобным приведение матрицы к треугольному виду с использованием свойств определителя.

Пример 2. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ -2 & 6 & 1 \end{vmatrix}$$

а) методом Саррюса;

б) путем приведения к треугольному виду.

Решение. а) По правилу Саррюса имеем

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ -2 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 \cdot 1 + (-1)5(-2) + 1 \cdot 6 \cdot 2 - (-2)4 \cdot 2 -$$

$$-3 \cdot 5 \cdot 6 - 1(-1)1 = -39.$$

б) Имеем (запись $\alpha l_j + \beta l_k$ означает, что к элементам j -й строки, умноженным на α , прибавляются соответствующие элементы k -й строки, умноженные на β ; результат этой операции записывается в строке напротив записи):

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \\ -2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \leftarrow \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & 6 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ l_2 - 3l_1 \\ l_3 + 2l_1 \end{matrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & -13 & -13 \\ 0 & 14 & 11 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \text{вынесем множи-} \\ \text{тель } (-13) \text{ во} \\ \text{второй строке} \end{bmatrix} = 13 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 14 & 11 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ l_3 - 14l_2 \end{matrix} = 13 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= 13(1 \cdot 1 \cdot (-3)) = -39.$$

Желательно перед началом преобразований добиться того, чтобы в левом верхнем углу стояло число 1 или (-1); этим и объясняется первая операция – перестановка первых двух строк.

Для вычисления определителей более высокого порядка удобнее пользоваться свойством 7.

Пример 3. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} -4 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 6 \\ -1 & 7 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -2 \end{vmatrix}$$

а) разложением по какой-либо строке или столбцу;

б) путем приведения к треугольному виду.

Решение. а) Лучше разложить по второй строке или третьему столбцу, так как наличие нуля уменьшает вычисления; выберем вторую строку, тогда

$$\begin{aligned} \Delta &= 3(-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 7 & -2 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} + (-1)(-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -4 & 5 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 \end{vmatrix} + \\ &+ 6(-1)^{2+4} \begin{vmatrix} -4 & 2 & 5 \\ -1 & 7 & -2 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -3(8+15+28+2-24+70) - \\ &-(-16+30-4+4+48-10) + 6(-112-8-5-70-8+8) = -1519. \end{aligned}$$

б) Имеем (пояснение ниже):

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} -4 & 2 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 6 \\ -1 & 7 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \\ \\ \leftarrow \\ \end{matrix} = - \begin{vmatrix} -1 & 7 & -2 & 3 \\ 3 & -1 & 0 & 6 \\ -4 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ l_2 + 3l_1 \\ l_3 - 4l_1 \\ l_4 + 2l_1 \end{matrix} = \\ &= - \begin{vmatrix} -1 & 7 & -2 & 3 \\ 0 & 20 & -6 & 15 \\ 0 & -26 & 13 & -11 \\ 0 & 15 & 0 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ 10l_3 + 13l_2 \\ 4l_4 - 3l_2 \end{matrix} = \\ &= - \frac{1}{10} \frac{1}{4} \begin{vmatrix} -1 & 7 & -2 & 3 \\ 0 & 20 & -6 & 15 \\ 0 & 0 & 52 & 85 \\ 0 & 0 & 18 & -29 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ 26l_4 - 9l_3 \end{matrix} = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{26} \begin{vmatrix} -1 & 7 & -2 & 3 \\ 0 & 20 & -6 & 15 \\ 0 & 0 & 52 & 85 \\ 0 & 0 & 0 & -1519 \end{vmatrix} = -\frac{-1}{10 \cdot 4 \cdot 26} (-1) 20 \cdot 52 \times$$

$$\times (-1519) = -1519.$$

Поясним выкладки. Если в i -ю строку записывается результат операции $\alpha l_i + \beta l_j$, то определитель матрицы увеличится в α раз; чтобы этого не произошло, мы при каждом таком действии домножаем определитель на

$$\frac{1}{\alpha} \left(\text{в нашем примере последовательно на } \frac{1}{10}, \frac{1}{4}, \frac{1}{26} \right).$$

Матрица $A \in M_n$, определитель которой равен нулю, называется *вырожденной*.

Геометрический смысл определителя состоит в следующем:

1) модуль определителя $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a} = a_{11}\mathbf{i} + a_{12}\mathbf{j}$ и $\mathbf{b} = a_{21}\mathbf{i} + a_{22}\mathbf{j}$;

2) модуль определителя

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

равен объему параллелепипеда, построенного на векторах

$$\mathbf{a} = a_{11}\mathbf{i} + a_{12}\mathbf{j} + a_{13}\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = a_{21}\mathbf{i} + a_{22}\mathbf{j} + a_{23}\mathbf{k}, \quad \mathbf{c} = a_{31}\mathbf{i} + a_{32}\mathbf{j} + a_{33}\mathbf{k}.$$

3. Обратная матрица

Матрица $B \in M_n$ называется *обратной* к матрице $A \in M_n$, если $AB = BA = I$; при этом пишут $B = A^{-1}$. Матрица A имеет обратную только в том случае, если она невырожденная.

Если $A = (a_{ij}) \in M_n$ – невырожденная матрица, то

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & A_{3n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} – алгебраические дополнения элементов a_{ij} .

Пример 4. Найти A^{-1} , если

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

Сделать проверку.

Решение. $\det A = 32 + 84 - 45 - 30 - 84 + 48 = 5 \neq 0$, следовательно, существует A^{-1} .

Найдем алгебраические дополнения:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -13; \quad A_{12} = - \begin{vmatrix} -3 & 7 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 66; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -15;$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{23} = - \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = 0;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 9; \quad A_{32} = - \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -3 & 7 \end{vmatrix} = -43; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 10.$$

Отсюда получаем

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -13 & -1 & 9 \\ 66 & 2 & -43 \\ -15 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13/5 & -1/5 & 9/5 \\ 66/5 & 2/5 & -43/5 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Сделаем проверку:

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 8 \end{pmatrix} \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -13 & -1 & 9 \\ 66 & 2 & -43 \\ -15 & 0 & 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{5} \begin{pmatrix} -13 & -1 & 9 \\ 66 & 2 & -43 \\ -15 & 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ -3 & 1 & 7 \\ 6 & 3 & 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A^{-1} найдено верно.

4. Ранг матрицы

Выберем в матрице $A \in M_{m \times n}$ k строк и k столбцов ($k \leq m$, $k \leq n$). Из элементов, стоящих на пересечении выделенных строк и столбцов, составим определитель k -го порядка, который назовем *минором* k -го порядка матрицы A .

Пример 5. Найти минор 2-го порядка матрицы

$$A = \begin{pmatrix} & v & & v & \\ 2 & -3 & 1 & 5 & 4 \\ 0 & 6 & -2 & 7 & 3 \\ 8 & -1 & -4 & 3 & 9 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ v \\ v \\ v \end{matrix}$$

(выбранные строки и столбцы отмечены знаком « v »).

Решение. Имеем

$$\begin{vmatrix} 6 & 7 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 25.$$

Рангом матрицы A называется неотрицательное целое число r , удовлетворяющее двум условиям:

1) существует по крайней мере один минор порядка r матрицы A , отличный от нуля;

2) все миноры порядка $(r+1)$ матрицы A равны нулю.

При этом пишут $\text{rank } A = r$. Если $\text{rank } A = r$, то любой отличный от нуля минор порядка r матрицы A называется *базисным минором*.

Теорема 2. Максимальное число линейно независимых столбцов матрицы A равно максимальному числу линейно независимых строк матрицы A . Больше того, это число равно рангу матрицы A .

Не изменяют ранга матрицы следующие ниже операции:

- 1) перестановка столбцов или строк;
- 2) умножение столбца (строки) на число, отличное от нуля;
- 3) прибавление к столбцу (строке) другого столбца (другой строки), умноженного предварительно на некоторое число;
- 4) зачеркивание нулевого столбца (строки);
- 5) транспонирование.

Трапецидальной матрицей называется матрица $A \in M_{m \times n}$, имеющая вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1m-1} & a_{1m} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2m-1} & a_{2m} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3m-1} & a_{3m} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{mm} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

где $a_{11} \neq 0, a_{22} \neq 0, \dots, a_{mm} \neq 0$. Другими словами, матрица $A = (a_{ij}) \in M_{m \times n}$, $m \leq n$ является трапецидальной, если $a_{ij} = 0$ при $i > j$ и $a_{11}a_{22} \dots a_{mm} \neq 0$.

Ранг трапецидальной матрицы $A \in M_{m \times n}$, $m \leq n$ равен m . Для нахождения ранга матрицы достаточно, пользуясь преобразованиями 1–4, называемыми элементарными, привести матрицу к трапецидальному виду.

Пример 6. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 7 \\ 8 & -1 & 13 & -4 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение. С помощью элементарных преобразований приведем матрицу A к трапецидальному виду:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 7 \\ 8 & -1 & 13 & -4 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & -1 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & 7 \\ 8 & -1 & 13 & -4 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ l_2 + 3l_1 \\ l_3 + l_1 \\ l_4 + 8l_1 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 2 & 10 \\ 0 & 5 & -1 & 2 & 10 \\ 0 & 15 & -3 & -4 & 28 \end{pmatrix} \begin{matrix} I_3 - I_2 \\ I_4 - 3I_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & -2 \end{pmatrix} \sim$$



$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 2 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -2 & -1 & 10 \\ 0 & 0 & -10 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ранг последней матрицы, являющейся трапецидальной, равен 3; следовательно, $\text{rang } A = 3$.

Из определения ранга следует, что матрица $A \in M_n$ является невырожденной в том и только в том случае, если $\text{rang} = n$.

5. Системы линейных алгебраических уравнений

Системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) называется система уравнений вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (3)$$

Система (3) называется *однородной*, если свободные члены равны нулю: $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$. Однородная система всегда является совместной – она имеет решение $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ (возможно, не единственное).

Матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{matrix} \quad \text{называются}$$

матрицей системы (3) и расширенной матрицей системы (3) соответственно; столбцы

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

называются столбцом неизвестных и столбцом свободных членов соответственно. С учетом этих обозначений систему (3) можно записать в матричной форме

$$AX = B. \quad (4)$$

Рассмотрим отдельно случай квадратной системы, когда $m = n$, и общий случай.

1. *Квадратная система.* Существует три основных метода решения совместной СЛАУ

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (5)$$

- а) правило Крамера;
- б) матричный способ;
- в) метод Гаусса.

а) *Правило Крамера.* Обозначим

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad \Delta_i = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & b_n & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

(определитель Δ_i получается из Δ заменой i -го столбца на столбец свободных членов). Правило Крамера состоит в том, что при $\Delta \neq 0$

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

б) Матричный способ. Система (5) совместна при $\det A \neq 0$ и имеет единственное решение – столбец $X = A^{-1}B$.

В этом и состоит матричный способ решения системы (5).

в) Метод Гаусса. При решении методом Гаусса расширенную матрицу \tilde{A} системы (5) элементарными преобразованиями приводят к треугольному виду.

Пример 7. Решить систему

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -1, \\ -3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 = -3. \end{cases}$$

а) по правилу Крамера;

б) матричным способом;

в) методом Гаусса.

Решение. а) Имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -7 \end{vmatrix} = 3; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \\ -3 & 4 & -7 \end{vmatrix} = -3;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & -7 \end{vmatrix} = 9; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 6.$$

Отсюда находим

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 3, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 2.$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Найдем A^{-1} . $\det A = \Delta = 3 \neq 0$.

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -19, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -10;$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -7 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -7 \end{vmatrix} = -13, \quad A_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -7;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = -1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = -1.$$

$$\text{Поэтому } A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -19 & -13 & -1 \\ -10 & -7 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда находим

$$\bar{X} = A^{-1}B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ -19 & -13 & -1 \\ -10 & -7 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6+3+0 \\ 19-13+3 \\ 10-7+3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Итак, $x_1 = -1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$.

в) Решим систему методом Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 \\ -3 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -7 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -7 & -3 \\ -3 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \begin{array}{l} l_2 + 3l_1 \\ l_3 - 2l_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -7 & -3 \\ 0 & 10 & -19 & -8 \\ 0 & -7 & 13 & 5 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ 10l_3 + 7l_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -7 & -3 \\ 0 & 0 & -19 & -8 \\ 0 & 0 & -3 & -6 \end{array} \right).$$

Последней матрице, имеющей треугольный вид (если исключить столбец свободных членов), соответствует следующая СЛАУ, равносильная исходной системе:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 7x_3 = -3, \\ 10x_2 - 19x_3 = -8, \\ -3x_3 = -6. \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим x_3 , подставив его во второе уравнение, найдем x_2 и, наконец, подставив найденные x_2 и x_3 в первое уравнение, найдем x_1 :

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - 14 = -3, \\ 10x_2 - 38 = -8, \\ x_3 = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 + 12 = 11, \\ x_2 = 3, \\ x_3 = 2, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 3, \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

Следует иметь в виду, что при решении СЛАУ методом Гаусса перестановка столбцов приводит к перенумерации неизвестных.

2. *Общий случай.*

Теорема 3 (Кронекер–Капелли). Система (3) совместна в том и только в том случае, если ранг матрицы A равен рангу расширенной матрицы \bar{A} : $\text{rank}A = \text{rank}\bar{A}$.

Систему (3) удобно решать методом Гаусса, который состоит в приведении расширенной матрицы \tilde{A} к трапецидальному виду путем применения элементарных преобразований. Если при этом на некотором этапе получается строка, в которой все элементы, кроме элемента столбца свободных членов, равны нулю, то система несовместна. Если $\text{rank}A = \text{rank}\tilde{A} = r < n$, то система (3) имеет бесчисленное множество решений, и каждое решение зависит от $(n-r)$ не зависящих друг от друга параметров, т.е. степень свободы системы равна $(n-r)$. В качестве параметров удобно брать «лишние неизвестные», которые объявляются свободными.

Пример 8. Решить системы уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 4x_5 = 1, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = -2, \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 6; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} -3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 + 3x_5 = -1, \\ -x_1 + 8x_2 - 3x_3 + 12x_4 + 6x_5 = 2; \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 6x_4 - 8x_5 = -4, \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5 = 2, \\ 5x_1 + 10x_2 - 2x_3 + 9x_4 - 8x_5 = -6. \end{cases}$$

Решение. Во всех трех системах воспользуемся методом Гаусса.

$$\text{а) } \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & -1 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 3 & -1 & 1 & 6 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ l_2 - 3l_1 \sim \\ l_3 - 2l_1 \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 10 & -10 & 5 & -12 & -5 \\ 0 & 4 & -3 & 1 & -7 & 4 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ 5l_3 - 2l_2 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -1 & 4 & 1 \\ 0 & 10 & -10 & 5 & -12 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & -11 & 30 \end{array} \right).$$

Расширенная матрица приведена к трапецидальному виду. Объявляем «лишние неизвестные» x_4 и x_5 свободными; запишем

систему, соответствующую этой трапецидальной матрице, перенеся свободные неизвестные x_4 и x_5 в правую часть:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 + x_4 - 4x_5, \\ 10x_2 - 10x_3 = -5 - 5x_4 + 12x_5, \\ 5x_3 = 30 + 5x_4 + 11x_5. \end{cases}$$

Степень свободы системы равна двум, значит решение системы выразится через два параметра. Положив $x_4 = c_1$, $x_5 = c_2$ и решив систему из трех уравнений с неизвестными x_1, x_2, x_3 , найдем

$$\begin{cases} x_1 = -6 - c_1 - \frac{19}{5}c_2, \\ x_2 = \frac{11}{2} + \frac{1}{2}c_1 + \frac{17}{5}c_2, \\ x_3 = 6 + c_1 + \frac{11}{5}c_2, \\ x_4 = c_1, \\ x_5 = c_2, \end{cases}$$

где c_1, c_2 — произвольные числа.

$$\begin{aligned} \text{б) } \left(\begin{array}{ccccc|c} -3 & 4 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -2 & 5 & 3 & -1 \\ -1 & 8 & -3 & 12 & 6 & 2 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 5 & 3 & -1 \\ -3 & 4 & 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 8 & -3 & 12 & 6 & 2 \end{array} \right) \begin{array}{l} l_2 + 3l_1 \\ l_3 + l_1 \end{array} \\ &\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 10 & -5 & 17 & 9 & 0 \\ 0 & 10 & -5 & 17 & 9 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ l_3 - l_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & -2 & 5 & 3 & -1 \\ 0 & 10 & -5 & 17 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right); \end{aligned}$$

в результате преобразований появилась строка $(0\ 0\ 0\ 0\ 0\ |1)$, следовательно, система несовместна.

$$\begin{aligned} \text{в) } \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & -2 & 6 & -8 & -4 \\ -1 & -2 & 1 & -3 & 4 & 2 \\ 5 & 10 & -2 & 9 & -8 & -6 \end{array} \right) &\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -2 & 1 & -3 & 4 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 6 & -8 & -4 \\ 5 & 10 & -2 & 9 & -8 & -6 \end{array} \right) \begin{array}{l} l_2 + 2l_1 \\ l_3 + 5l_1 \end{array} \\ &\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -2 & 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 12 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} -1 & -2 & 1 & -3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -6 & 12 & 4 \end{array} \right) \sim \end{aligned}$$

$$\sim \begin{pmatrix} & x_3 & x_2 \\ -1 & 1 & -2 & -3 & 4 & | & 2 \\ 0 & 3 & 0 & -6 & 12 & | & 4 \end{pmatrix}.$$

Ранг трапецидальной матрицы равен 2, значит степень свободы равна $(5-2)=3$. Объявляем неизвестные x_2, x_4, x_5 свободными.

Положив $x_2 = c_1, x_4 = c_2, x_5 = c_3$, получим

$$\begin{cases} -x_1 + x_3 = 2 + 2c_1 + 3c_2 - 4c_3, \\ 3x_3 = 4 + 6c_2 - 12c_3, \\ \begin{cases} x_1 = -2 - 2c_1 - 3c_2 + 4c_3 + \frac{4}{3} + 2c_2 - 4c_3, \\ x_3 = \frac{4}{3} + 2c_2 - 4c_3. \end{cases} \end{cases}$$

Таким образом, решением системы является

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{3} - 2c_1 - c_2, \\ x_2 = c_1, \\ x_3 = \frac{4}{3} + 2c_2 - 4c_3, \\ x_4 = c_2, \\ x_5 = c_3, \end{cases}$$

где c_1, c_2, c_3 – произвольные числа (параметры).

Комплексные СЛАУ решаются, как и действительные. Комплексную систему порядка $n \times n$ можно свести к действительной системе порядка $2n \times 2n$ путем разделения действительной и мнимой частей.

Пример 9. Решить систему:

$$\begin{cases} (3+i)z_1 + (-4-i)z_2 + (2-5i)z_3 = 9 + 23i, \\ (-2+2i)z_1 + (3+2i)z_2 + (1-6i)z_3 = 30 + 12i, \\ (1+3i)z_1 + (-2-5i)z_2 + (4+3i)z_3 = -33 + 9i. \end{cases}$$

Решение. Будем искать неизвестные в алгебраической форме $z_1 = x_1 + y_1i, z_2 = x_2 + y_2i, z_3 = x_3 + y_3i$. Система примет вид

$$\begin{cases} (3+i)(x_1+y_1i)+(-4-i)(x_2+y_2i)+(2-5i)(x_3+y_3i)=9+23i, \\ (-2+2i)(x_1+y_1i)+(3+2i)(x_2+y_2i)+(1-6i)(x_3+y_3i)=30+12i, \\ (1+3i)(x_1+y_1i)+(-2-5i)(x_2+y_2i)+(4+3i)(x_3+y_3i)=-33+9i \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (3x_1-y_1-4x_2+y_2+2x_3+5y_3)+(x_1+3y_1-x_2-4y_2-5x_3+2y_3)i=9+23i, \\ (-2x_1-2y_1+3x_2-2y_2+x_3+6y_3)+(2x_1-2y_1+2x_2+3y_2-6x_3+y_3)i=30+12i, \\ (x_1-3y_1-2x_2+5y_2+4x_3-3y_3)+(3x_1+y_1-5x_2-2y_2+3x_3+4y_3)i=-33+9i. \end{cases}$$

Приравняв действительные и мнимые части, получим систему из шести уравнений с шестью неизвестными

$$\begin{cases} 3x_1 - y_1 - 4x_2 + y_2 + 2x_3 + 5y_3 = 9, \\ x_1 + 3y_1 - x_2 - 4y_2 - 5x_3 + 2y_3 = 23, \\ -2x_1 - 2y_1 + 3x_2 - 2y_2 + x_3 + 6y_3 = 30, \\ 2x_1 - 2y_1 + 2x_2 + 3y_2 - 6x_3 + y_3 = 12, \\ x_1 - 3y_1 - 2x_2 + 5y_2 + 4x_3 - 3y_3 = -33, \\ 3x_1 + y_1 - 5x_2 - 2y_2 + 3x_3 + 4y_3 = 9. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем

$$x_1 = 2, \quad y_1 = 1, \quad x_2 = 3, \quad y_2 = -2, \quad x_3 = -1, \quad y_3 = 4.$$

Таким образом, решением исходной системы является $z_1 = 2 + i, \quad z_2 = 3 - 2i, \quad z_3 = -1 + 4i$.

Задание 3.1

Даны матрицы A, B, C, D и числа α и β .

Найдите: а) $\alpha A^2 + \beta BC$; б) ранг матрицы D .

$$1) A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 1 & -3 \\ -2 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ -4 & 4 & 7 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 5 & 0 & 13 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 6 & 0 \\ -1 & 13 & 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha = -2, \quad \beta = 3;$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & 6 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & -5 & 1 \\ 7 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ -2 & 7 & 9 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 2, \beta = -3;$$

$$3) A = \begin{pmatrix} -4 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -2 \\ 5 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ -2 & 7 & 9 & 6 & 6 \\ 1 & 1 & -2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 2, \beta = -3;$$

$$4) A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -2 & 4 & 0 \\ -5 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & -4 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 6 & -2 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 4 & -1 & 7 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 3, \beta = -2;$$

$$5) A = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 7 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 7 & -2 \\ -1 & 1 & 3 & -3 \\ 3 & -1 & 10 & -2 \end{pmatrix}, \alpha = -1, \beta = -2;$$

$$6) A = \begin{pmatrix} -2 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -4 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 5 & 1 \\ -1 & 0 & 7 & 11 & 6 \\ 3 & -2 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \alpha = 2, \beta = -1;$$

$$7) A = \begin{pmatrix} -4 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \\ -3 & 4 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 1 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}, \alpha = 1, \beta = 4;$$

$$8) A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & 0 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \alpha = 2, \beta = -2;$$

$$9) A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & 3 & 9 \\ -1 & -1 & 5 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \alpha = -3, \beta = 1;$$

$$10) A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & 5 & 0 \\ -3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ -4 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 7 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 11 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \alpha = 2, \beta = -1;$$

$$11) A = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 7 & 6 & -9 & -15 \\ 4 & 1 & 3 & 0 & -3 \\ 2 & -1 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \alpha = 3, \beta = -2;$$

$$12) A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 8 & 11 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 13 & 26 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 2, \beta = -2;$$

$$13) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & -4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 & 2 \\ -3 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 6 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 9 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & -4 & -26 & -1 & 7 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 2, \beta = -3;$$

$$14) A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & 0 & 5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & -2 \\ 6 & 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 7 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 6 & -5 & 10 & 7 \\ 2 & 2 & -3 & 3 & 1 \\ -5 & 0 & 4 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \alpha = -2, \beta = -1;$$

$$15) A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & -4 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & -7 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \\ -1 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -5 & 2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & 11 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 4 & 3 \\ 3 & -3 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha = -3, \beta = 1;$$

$$16) A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 5 & 0 \\ -4 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ -1 & 7 & -1 & 2 & 2 \\ -2 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1, \beta = -2;$$

$$17) A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \\ 5 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & -4 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & -9 & 5 & 2 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 2, \beta = -3;$$

$$18) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 7 & 4 & -2 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -6 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ -3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & 9 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 3, \beta = 2;$$

$$19) A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 5 \\ 6 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 7 & 3 & 6 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 10 & 5 & 8 & 15 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1, \beta = -2;$$

$$20) A = \begin{pmatrix} -4 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 3 \\ -2 & 4 & 1 & -1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 10 & -3 & 2 \\ 3 & -1 & 4 & -5 & 2 \\ 4 & -1 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 2; \beta = -2;$$

$$21) A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 4 & -2 & 1 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & -6 & -6 \\ 2 & -2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 1 & -8 & -9 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1, \beta = 4;$$

$$22) A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & 4 \\ -1 & -2 & 4 & -3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & -7 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & -8 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 2, \beta = -1;$$

$$23) A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 5 & 4 & -5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & 5 \\ 2 & -6 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & 8 & 4 \\ 5 & -3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 8 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha = -2, \beta = 1;$$

$$24) A = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -4 & -1 \\ -2 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & -3 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 8 & -1 & 4 \\ -3 & 4 & 1 & 8 \\ 5 & -3 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad \alpha = -1, \beta = 3;$$

$$25) A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 0 \\ -3 & 3 & -1 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \\ 2 & 7 & 0 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & -5 & 10 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 4 & 0 & -1 \\ 4 & -13 & 24 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad \alpha = -2, \beta = 1;$$

$$26) A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 6 & -4 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 7 & -5 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1, \beta = -1;$$

$$27) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & -2 \\ -3 & 0 & 7 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 6 & -2 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ 3 & 3 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 & 0 & 5 \\ 1 & -3 & 4 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & -9 & 6 & -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1, \beta = 2;$$

$$28) A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 5 & -1 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & -3 & -3 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 3 & 6 \end{pmatrix}, \quad \alpha = -2, \quad \beta = -3;$$

$$29) A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 6 & 5 & 0 \\ 1 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 12 & 9 & -2 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1, \quad \beta = -3;$$

$$30) A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -3 \\ -1 & 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 5 & 2 & 6 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & -3 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 2, \quad \beta = -1;$$

Задание 3.2

Вычислите определитель: а) разложением по некоторой строке или столбцу; б) путем приведения матрицы к треугольному виду.

$$1. \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & 3 \\ 5 & 3 & 6 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & -3 \end{vmatrix};$$

$$2. \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 5 & 0 \\ -1 & 2 & 6 & 7 \\ -3 & -5 & 2 & -2 \end{vmatrix};$$

$$3. \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 & 5 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 7 & -4 & 1 \\ -3 & 6 & 1 & 2 \end{vmatrix};$$

$$9. \begin{vmatrix} -3 & 5 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & 6 & 1 \\ -4 & 2 & 4 & 7 \end{vmatrix};$$

$$4. \begin{vmatrix} -4 & -5 & 2 & -2 \\ 2 & 6 & 3 & 5 \\ -3 & 1 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 7 \end{vmatrix};$$

$$10. \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 & -5 \\ -4 & 2 & 7 & -3 \\ 3 & 6 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix};$$

$$5. \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 & 7 \\ 4 & -2 & 0 & -6 \\ -1 & 3 & -5 & -3 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$11. \begin{vmatrix} -5 & 3 & -3 & 0 \\ 2 & -4 & -1 & 2 \\ 1 & 6 & 5 & 3 \\ 7 & -2 & 4 & 1 \end{vmatrix};$$

$$6. \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 & 6 \\ 1 & 4 & 8 & -4 \\ -1 & 5 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix};$$

$$12. \begin{vmatrix} -3 & 5 & 6 & -2 \\ 1 & 3 & -7 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & -5 \\ 4 & 2 & -4 & -1 \end{vmatrix};$$

$$7. \begin{vmatrix} -4 & -3 & 6 & 7 \\ -5 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -4 & 0 \end{vmatrix};$$

$$13. \begin{vmatrix} 6 & 4 & 5 & 2 \\ -1 & -3 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix};$$

$$8. \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 & 5 \\ 4 & -2 & 6 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & -5 & 1 & 4 \end{vmatrix};$$

$$14. \begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 & -5 \\ -2 & 1 & -6 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & -4 \\ -1 & -2 & 8 & 7 \end{vmatrix};$$

$$15. \begin{vmatrix} -2 & 7 & 1 & 0 \\ -1 & -4 & 2 & -3 \\ 3 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 3 & 6 \end{vmatrix};$$

$$21. \begin{vmatrix} 5 & -2 & -3 & -6 \\ -1 & 7 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 8 \end{vmatrix};$$

$$16. \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 0 & 7 \\ -3 & 1 & 5 & -1 \\ -1 & 2 & -4 & 2 \end{vmatrix};$$

$$22. \begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 & 6 \\ -3 & 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -4 & -5 \\ -2 & -1 & -3 & 1 \end{vmatrix};$$

$$17. \begin{vmatrix} -4 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & 5 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & 7 & -1 \end{vmatrix};$$

$$23. \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 & -5 \\ -1 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 6 & 3 \\ 5 & 1 & -4 & 0 \end{vmatrix};$$

$$18. \begin{vmatrix} -5 & -2 & -4 & -3 \\ 3 & 7 & 0 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & 3 \end{vmatrix};$$

$$24. \begin{vmatrix} -3 & 5 & -4 & -1 \\ 3 & 6 & -3 & -5 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix};$$

$$19. \begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \\ -5 & 6 & -1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$25. \begin{vmatrix} 6 & -4 & -5 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 4 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & -2 \end{vmatrix};$$

$$20. \begin{vmatrix} 7 & 3 & -5 & -2 \\ -2 & 4 & 0 & -4 \\ 1 & 2 & -1 & -3 \\ -3 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix};$$

$$26. \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 & 0 \\ -5 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & 2 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & -2 \end{vmatrix};$$

$$27. \begin{vmatrix} -6 & 0 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ -3 & -4 & -1 & -3 \\ -1 & -2 & 1 & -1 \end{vmatrix};$$

$$29. \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 & -3 \\ -2 & -1 & -6 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & -4 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \end{vmatrix};$$

$$28. \begin{vmatrix} 4 & -1 & 1 & -6 \\ -3 & 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -4 & -5 \\ -3 & 5 & -3 & -1 \end{vmatrix};$$

$$30. \begin{vmatrix} -6 & 3 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & -5 & -3 \\ 2 & -4 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix};$$

Задание 3.3

Решите системы уравнений: а) по правилу Крамера;

б) методом Гаусса; в) матричным методом.

$$1) \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -6, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + 6x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -5, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ -2x_1 + 5x_2 + x_3 = 7. \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = -1, \\ -3x_1 - x_2 + x_3 = -1, \\ -x_1 + 4x_2 + 5x_3 = -8. \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} -2x_1 + x_2 - 3x_3 = -11, \\ x_1 + 3x_2 = 6, \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 = 10, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = -14, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 6. \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0, \\ -3x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -11. \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} -5x_1 - 2x_2 + x_3 = -10, \\ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 7, \\ -x_1 - 6x_2 + 5x_3 = 2. \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 = 2, \\ 5x_1 + 2x_3 = 18, \\ -3x_1 + x_2 - 6x_3 = -7. \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -12, \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 2, \\ -x_1 - 5x_2 + x_3 = -6. \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - x_3 = -5, \\ -3x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 - 3x_2 - 4x_3 = -21. \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 - x_3 = 2, \\ -3x_1 + 7x_2 - x_3 = -5, \\ 2x_1 + 8x_2 + 5x_3 = 12. \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 + x_3 = 1, \\ -4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = -2, \\ 3x_2 + 4x_3 = -2. \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} -8x_1 + x_2 + 5x_3 = 4, \\ 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 2, \\ -4x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -20. \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -1, \\ 3x_1 - 5x_2 - x_3 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + x_3 = 5. \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} -4x_1 + 5x_2 - x_3 = 11, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 = -7, \\ -x_1 + 4x_2 - 6x_3 = 11. \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 - x_3 = -13, \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 = 14, \\ -2x_1 + 7x_2 + 4x_3 = -4. \end{cases}$$

$$17) \begin{cases} -7x_1 + 8x_2 - x_3 = -22, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 = 5, \\ 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 = -2. \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 4x_3 = -9, \\ -3x_1 + 5x_2 - x_3 = 26, \\ x_1 - 6x_2 - 7x_3 = -29. \end{cases}$$

$$19) \begin{cases} -2x_1 + 4x_2 + 7x_3 = -21, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 8, \\ 4x_1 + 9x_2 + 2x_3 = -8. \end{cases}$$

$$20) \begin{cases} -7x_1 - 2x_2 + 5x_3 = -11, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 9, \\ 3x_1 - x_2 + 4x_3 = -7. \end{cases}$$

$$21) \begin{cases} 4x_1 + x_2 - 5x_3 = 7, \\ -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -5, \\ 2x_1 + 9x_2 - x_3 = 5. \end{cases}$$

$$22) \begin{cases} 7x_1 - 2x_2 - 3x_3 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 2x_3 = -16, \\ -4x_1 + 5x_2 - 6x_3 = -3. \end{cases}$$

$$23) \begin{cases} x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1, \\ -5x_1 - x_2 + 6x_3 = 21, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 = -17. \end{cases}$$

$$24) \begin{cases} -x_1 + 3x_2 - x_3 = 2, \\ 6x_1 - 4x_2 + 3x_3 = -7, \\ 3x_1 + 5x_2 - x_3 = -4. \end{cases}$$

$$25) \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 = -1, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 5, \\ -x_1 + 6x_2 - 4x_3 = -20. \end{cases}$$

$$26) \begin{cases} -8x_1 - 7x_2 + x_3 = -9, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 16, \\ 5x_1 + 4x_2 - x_3 = 6. \end{cases}$$

$$27) \begin{cases} 5x_1 - x_2 - 10x_3 = -2, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = -5, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 = 5. \end{cases} \quad 29) \begin{cases} 6x_1 - x_2 + 8x_3 = 7, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = -10, \\ 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -3. \end{cases}$$

$$28) \begin{cases} -3x_1 + 7x_2 - x_3 = -2, \\ 8x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -9, \\ 2x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -3. \end{cases} \quad 30) \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1, \\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 = 4, \\ 6x_1 - x_2 + 2x_3 = 14. \end{cases}$$

Задание 3.4

Решите системы уравнений.

$$1. \text{ а) } \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 1, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 + 2x_5 = -2, \\ 3x_1 + 11x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 = -6, \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 - 2x_5 = 3, \\ 3x_1 - 13x_2 - 13x_3 + 5x_4 + x_5 = 2. \end{cases}$$

$$2. \text{ а) } \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 5, \\ -2x_1 - 3x_2 + 6x_3 - x_4 - 5x_5 = -1, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_5 = 2; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 + x_5 = 4, \\ -3x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 - x_5 = -2, \\ -x_2 - 2x_3 - 3x_4 + x_5 = 6. \end{cases}$$

$$3. \text{ а) } \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 3, \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 - x_5 = 1; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} -2x_1 + 5x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = -2, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 + 5x_4 + x_5 = 3, \\ -3x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 3x_5 = 4. \end{cases}$$

$$4. \text{ a) } \begin{cases} -4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 5x_5 = -2, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 2x_1 + 3x_3 + x_4 + 5x_5 = -3; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = -4, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 - 11x_2 - 9x_3 - x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

$$5. \text{ a) } \begin{cases} 6x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 - x_5 = -1, \\ 2x_1 + 7x_2 - 7x_3 + 15x_4 + 2x_5 = 0; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} -5x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 - x_5 = -2, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 4x_5 = -1, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 7x_5 = 3. \end{cases}$$

$$6. \text{ a) } \begin{cases} -7x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 4x_5 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 5x_4 - x_5 = -3, \\ -x_1 - x_2 + 9x_3 - 16x_4 + x_5 = 0; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - 5x_4 + x_5 = 1, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 - x_5 = -2, \\ -x_1 - 7x_2 + 10x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 4. \end{cases}$$

$$7. \text{ a) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 6x_3 + 4x_4 - 3x_5 = -4, \\ -x_1 + 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 + 2x_5 = 3, \\ 3x_1 + x_2 + 16x_3 + 2x_4 - x_5 = 0; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} 8x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 3x_5 = -1, \\ -3x_1 - x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 6x_5 = 2, \\ -x_1 - 4x_2 + 17x_3 - 2x_4 + 21x_5 = -2. \end{cases}$$

$$8. \text{ a) } \begin{cases} x_1 - 7x_2 - x_3 + 5x_4 - x_5 = 8, \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 - x_4 + 4x_5 = -3, \\ 5x_1 - 12x_2 + 4x_3 + 9x_4 + 2x_5 = 2; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 9x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 7x_4 + x_5 = 0, \\ -4x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = -2, \\ x_1 + 8x_2 + x_3 - 11x_4 + 2x_5 = 3. \end{cases}$$

$$9. \text{ a) } \begin{cases} 10x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 + 2x_5 = -3, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 2, \\ -x_1 - 6x_2 + x_3 + x_4 + 3x_5 = 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} -6x_1 + 4x_2 - 7x_3 + x_4 - 2x_5 = -1, \\ 5x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 2x_4 - x_5 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 8x_4 - 7x_5 = -3. \end{cases}$$

$$10. \text{ a) } \begin{cases} -6x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 2, \\ 7x_1 - x_2 - 2x_3 - 5x_4 + x_5 = -1, \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 5; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} -4x_1 + 7x_2 + x_3 - 5x_4 + x_5 = -4, \\ 3x_1 + 6x_2 - x_3 + 2x_4 + 2x_5 = -3, \\ 2x_1 + 20x_2 - x_3 + 9x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases}$$

$$11. \text{ a) } \begin{cases} 5x_1 - 3x_2 - 6x_3 + x_4 - 4x_5 = 1, \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 + 2x_5 = -1, \\ 4x_1 - 9x_2 - x_4 - 2x_5 = 5; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} -2x_1 + 7x_2 - 4x_3 - x_4 + 6x_5 = -2, \\ -3x_1 + 5x_2 + 4x_3 - x_4 - 2x_5 = 1, \\ -x_1 + 13x_2 - 28x_3 + 2x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$$

$$12. \text{ a) } \begin{cases} -x_1 + 3x_2 + 7x_3 - 2x_4 - x_5 = -5, \\ 2x_1 + 4x_2 - 5x_3 + x_4 + 3x_5 = 2, \\ 4x_1 - 6x_2 - x_3 + 2x_4 - 5x_5; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 6x_5 = 4, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_3 + 5x_4 - x_5 = -2, \\ -x_1 - x_2 - 6x_3 - 6x_4 + 7x_5 = -1. \end{cases}$$

$$13. \text{ a) } \begin{cases} 8x_1 - x_2 + 6x_3 + 2x_4 + 3x_5 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_4 - x_5 = 2, \\ x_1 + 7x_2 - 9x_3 + x_4 + 6x_5 = 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 4x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -6, \\ 5x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 + x_5 = 2, \\ 3x_1 - 4x_2 - 4x_3 + 6x_4 - 7x_5 = -1. \end{cases}$$

$$14. \text{ a) } \begin{cases} -9x_1 + 5x_2 - x_3 + 2x_4 - 7x_5 = 3, \\ 4x_1 + 3x_2 - 8x_3 - x_4 + x_5 = -2, \\ -x_1 + 11x_2 - 17x_3 - 5x_5 = -1; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 + 7x_5 = 6, \\ 5x_1 + 2x_2 + x_3 - 6x_4 - 3x_5 = -2, \\ x_1 - 5x_2 - 4x_3 + 24x_5 = 2. \end{cases}$$

$$15. \text{ a) } \begin{cases} 5x_1 - 4x_2 - 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 7, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - 5x_4 + x_5 = -5, \\ x_1 - 2x_2 - 8x_3 + 13x_4 = 4; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 8, \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = -3, \\ 5x_1 - 15x_2 + x_3 + 4x_4 + 2x_5 = 1. \end{cases}$$

$$16. \text{ a) } \begin{cases} 10x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = -6, \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 - x_5 = 3, \\ x_1 - 5x_2 + 13x_3 - 7x_4 + 6x_5 = 2; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 6x_1 + 5x_2 - x_3 - 4x_4 + 2x_5 = -2, \\ 7x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - 6x_5 = -1, \\ -x_1 + 6x_2 - 4x_3 + 2x_4 - x_5 = 3. \end{cases}$$

$$17. \text{ a) } \begin{cases} -7x_1 + 4x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 - 5x_4 + 6x_5 = -1, \\ -x_1 + 8x_2 + 2x_4 + x_5 = 2; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} -3x_1 - x_2 + 5x_3 + x_4 - 6x_5 = -9, \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 11x_3 - x_4 - 2x_5 = 4. \end{cases}$$

$$18. \text{ a) } \begin{cases} -2x_1 - x_2 - 8x_3 + 9x_4 + 4x_5 = -3, \\ 5x_3 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 2, \\ x_1 - x_2 - 18x_3 + 2x_4 - x_5 = -4; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 12x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 - x_5 = -4, \\ 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 2, \\ 2x_1 + 7x_3 - 4x_4 - 3x_5 = 5. \end{cases}$$

$$19. \text{ a) } \begin{cases} 4x_1 - 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 + 7x_5 = -1, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 - 4x_5 = 0, \\ -x_1 + 6x_2 + 4x_3 - 2x_4 - 11x_5 = 1; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 7x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 2, \\ -5x_1 + 2x_2 - 4x_3 - x_4 + x_5 = -4, \\ -3x_1 - 11x_3 + 5x_5 = 3. \end{cases}$$

$$20. \text{ a) } \begin{cases} -5x_1 - 4x_2 - x_3 + 2x_4 + 4x_5 = -3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = -2, \\ -2x_1 - x_2 - 7x_3 + 5x_4 - 5x_5 = 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x_1 - 8x_2 - x_3 + 4x_4 - 3x_5 = 6, \\ -5x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 - 2x_5 = -1, \\ -x_1 - 12x_2 + 7x_4 + x_5 = 3. \end{cases}$$

$$21. \text{ a) } \begin{cases} -2x_1 - x_2 + 9x_3 - 5x_4 - 6x_5 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = -1, \\ -x_1 + 2x_2 + 19x_3 + x_4 - x_5 = 2; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - x_4 + 2x_5 = -2, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 - 6x_4 + 3x_5 = -3, \\ -x_1 + 8x_2 - 17x_3 - 9x_4 = 1. \end{cases}$$

$$22. \text{ a) } \begin{cases} 5x_1 + x_2 - 6x_3 - 2x_4 + x_5 = -5, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 + 4x_4 - x_5 = 2, \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 - x_5 = 2; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 4x_1 - x_2 + 2x_3 - 9x_4 - 6x_5 = 4, \\ 5x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 6x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$$

$$23. \text{ a) } \begin{cases} -3x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 + 6x_5 = 1, \\ 2x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 = -1, \\ x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 = -1; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} -2x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ 7x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 - x_5 = -2, \\ x_1 + 7x_2 - 7x_3 - 7x_4 + 5x_5 = 4. \end{cases}$$

$$24. \text{ a) } \begin{cases} -6x_1 + 2x_2 - x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 7, \\ 5x_1 - x_2 - 4x_3 + 6x_4 - x_5 = -2, \\ 4x_1 - 9x_3 + 8x_4 + 3x_5 = -1; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} -5x_1 - 2x_2 - 4x_3 + x_4 - x_5 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 5x_4 + x_5 = 7, \\ -x_1 - 5x_2 - 2x_3 - x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$25. \text{ a) } \begin{cases} -4x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = -6, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_4 - x_5 = 2, \\ x_1 - x_2 + 12x_3 - 17x_4 + x_5 = -6; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 7x_1 - 2x_2 - x_3 + 3x_4 - 6x_5 = 4, \\ -3x_1 - x_2 - 5x_3 + x_4 - 4x_5 = -3, \\ x_1 - 5x_2 - 7x_3 + 7x_4 - 16x_5 = -1. \end{cases}$$

$$26. \text{ a) } \begin{cases} 8x_1 - x_2 - 5x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 3, \\ -3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 6x_5 = -2, \\ -x_1 - 7x_2 + 7x_3 - x_4 + 22x_5 = 0; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 7x_3 + 5x_4 - x_5 = -4, \\ 5x_1 + x_2 + 6x_3 - 2x_4 + 2x_5 = -1, \\ x_1 + 3x_2 - 8x_3 + x_4 + x_5 = 2. \end{cases}$$

$$27. \text{ a) } \begin{cases} 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - x_4 - x_5 = 2, \\ -x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 2x_5 = -3, \\ x_1 - 10x_2 + 9x_3 + x_4 - 5x_5 = -4; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - x_3 - 2x_4 - 6x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 5x_5 = -2, \\ -x_1 + 6x_2 - 5x_3 - 16x_5 = 1. \end{cases}$$

$$28. \text{ а) } \begin{cases} x_1 + 7x_2 - x_3 - 2x_4 + x_5 = 4, \\ -3x_1 + x_2 + 4x_3 + 2x_4 - 3x_5 = -1, \\ x_1 + 15x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 2; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} -4x_1 - 2x_2 - 6x_3 + 5x_4 + x_5 = 3, \\ 5x_1 + 4x_2 - x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 7x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 8. \end{cases}$$

$$29. \text{ а) } \begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 - x_5 = 5, \\ 4x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 5; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} x_1 - 6x_2 + 5x_3 + 2x_4 - 3x_5 = 0, \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - x_4 - 2x_5 = 1, \\ x_1 - 14x_2 + 12x_3 + 7x_4 - 7x_5 = 4. \end{cases}$$

$$30. \text{ а) } \begin{cases} -2x_1 + 9x_2 + x_3 - 6x_4 + 3x_5 = -4, \\ 5x_1 - x_2 + 4x_3 + 2x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 - x_4 + 2x_5 = 3; \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 - x_4 - 2x_5 = 6, \\ -4x_1 + x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 5x_5 = -1, \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 3x_4 + 3x_5 = -2. \end{cases}$$

Задание 3.5

Решите матричные уравнения: а) $AX = B$; б) $XA = B$,

в) $AXC = B$.

$$1) A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$2) A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$3) A = \begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$4) A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -6 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$5) A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$6) A = \begin{pmatrix} -9 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$7) A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -8 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -5 \end{pmatrix};$$

$$8) A = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$9) A = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$10) A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$11) A = \begin{pmatrix} -6 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix};$$

$$12) A = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ 1 & -10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix};$$

$$13) A = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$14) A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix};$$

- 15) $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$;
- 16) $A = \begin{pmatrix} 9 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;
- 17) $A = \begin{pmatrix} -8 & -2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$;
- 18) $A = \begin{pmatrix} -7 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$;
- 19) $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;
- 20) $A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 8 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$;
- 21) $A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$;
- 22) $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;
- 23) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -6 & 7 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$;
- 24) $A = \begin{pmatrix} -9 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$;
- 25) $A = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 11 & 2 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;
- 26) $A = \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

$$27) \quad A = \begin{pmatrix} -10 & 3 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix};$$

$$28) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$29) \quad A = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};$$

$$30) \quad A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание 3.6

Решите системы уравнений.

$$1) \quad \begin{cases} (3-2i)z_1 + iz_2 + (-2+i)z_3 = -3+i, \\ (1+i)z_1 + (-4-2i)z_2 + (-3+i)z_3 = 2+2i, \\ (4+i)z_1 + (2-i)z_2 - iz_3 = -4+2i. \end{cases}$$

$$2) \quad \begin{cases} (-1+5i)z_1 + (-1-4i)z_2 + (2+3i)z_3 = 3i, \\ (2-3i)z_1 + (1-6i)z_2 + (-3-i)z_3 = 1+i, \\ (2-i)z_1 + (-3+i)z_2 + (-5-i)z_3 = 2+3i. \end{cases}$$

$$3) \quad \begin{cases} (4-i)z_1 + (-3+2i)z_2 + (-2-3i)z_3 = 1+5i, \\ 2iz_1 + (5+2i)z_2 + (-4+3i)z_3 = 2-i, \\ (-1+5i)z_1 + (1-6i)z_2 + (-3-4i)z_3 = -3+i. \end{cases}$$

$$4) \quad \begin{cases} (6-i)z_1 + (2-i)z_2 + 3iz_3 = -1-i, \\ (-2+i)z_1 + (-1+3i)z_2 + 2z_3 = 3+i, \\ (4-i)z_1 + (-2-3i)z_2 + (1-i)z_3 = 5. \end{cases}$$

$$5) \quad \begin{cases} 4z_1 + (-3-i)z_2 + (2-2i)z_3 = -4+i, \\ (-1+3i)z_1 + (1+2i)z_2 + (3+2i)z_3 = 4-2i, \\ (5+i)z_1 + 2iz_2 + (-2-3i)z_3 = 2+5i. \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} (-2-i)z_1 + (3+i)z_2 + (-4-i)z_3 = 2+5i, \\ (3-2i)z_1 + 4iz_2 + (5+i)z_3 = -3-i, \\ (4+i)z_1 + (1-5i)z_2 + (-3+2i)z_3 = 6-2i. \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} (1+2i)z_1 + (-3-2i)z_2 + 4iz_3 = -4+i, \\ -6z_1 + (2-5i)z_2 + (-3-i)z_3 = 6+2i, \\ (-5-2i)z_1 + (4-i)z_2 + (-1+3i)z_3 = -5-3i. \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} (-4-3i)z_1 + (2+i)z_2 + (1-3i)z_3 = -2-i, \\ (3-2i)z_1 + (-3+i)z_2 + (-5-i)z_3 = 4-2i, \\ (-1-i)z_1 + 4z_2 + (-6+i)z_3 = 3+2i. \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} (1+3i)z_1 + (-2-4i)z_2 + (3-i)z_3 = 4+i, \\ (-2+3i)z_1 + (4+i)z_2 + (1-2i)z_3 = -3+i, \\ (5-i)z_1 + (-2+i)z_2 + (7+i)z_3 = -1-i. \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} (-1-2i)z_1 + (3+i)z_2 + (-4-i)z_3 = 5-2i, \\ (-3+2i)z_1 + (4-3i)z_2 + 5iz_3 = -2+i, \\ (2+5i)z_1 + (-1+3i)z_2 + (2-i)z_3 = -6+4i. \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} (2-5i)z_1 + (-3-3i)z_2 + z_3 = -4-3i, \\ (1+5i)z_1 + (2-6i)z_2 + (1+2i)z_3 = 7+4i, \\ (-2+3i)z_1 + (4-2i)z_2 + (-1-i)z_3 = 6-5i. \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} (1+5i)z_1 + (-2+i)z_2 + (-4+i)z_3 = -5+2i, \\ (-4-i)z_1 + (1-i)z_2 + 3iz_3 = 2+4i, \\ (-1-3i)z_1 + (-3+4i)z_2 + (1+2i)z_3 = -3+2i. \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} (-5+i)z_1 + (2+3i)z_2 + (-4+2i)z_3 = -8+5i, \\ (-4+i)z_1 + (-2-2i)z_2 + (-1-5i)z_3 = 6+3i, \\ (2+5i)z_1 + (-1+i)z_2 + (-1-3i)z_3 = -4+i. \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} (-1+3i)z_1 + (1+4i)z_2 + (2-5i)z_3 = -3-i, \\ (2-2i)z_1 + (3+2i)z_2 + (-2+3i)z_3 = 4+5i, \\ (-3-i)z_1 + (2+3i)z_2 + (1-i)z_3 = 6-4i. \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} 2z_1 + (-5 - 4i)z_2 + (2 - i)z_3 = -3 - 6i, \\ (-1 + 4i)z_1 + (2 + i)z_2 + (-3 + 5i)z_3 = 7 + 5i, \\ (3 + 2i)z_1 + (-4 + i)z_2 + (-3 - 3i)z_3 = 8 - 4i. \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} (-3 - 2i)z_1 + (-1 + 5i)z_2 + (2 - 4i)z_3 = 10 - i, \\ (2 + i)z_1 + (-4 + i)z_2 + (-1 - i)z_3 = 6 + 3i, \\ (-1 + 5i)z_1 + (2 + 2i)z_2 - 3iz_3 = 4 - 5i. \end{cases}$$

$$17) \begin{cases} (-2 + 3i)z_1 + (2 - i)z_2 + (-1 - 4i)z_3 = 5 + 6i, \\ (3 + i)z_1 + (-4 - 3i)z_2 + (5 + i)z_3 = -9 + 2i, \\ (1 + 3i)z_1 + (-2 - 5i)z_2 + 4z_3 = 6. \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} (1 + 6i)z_1 + (-2 + 3i)z_2 + (4 + i)z_3 = -3 + 5i, \\ (2 - 5i)z_1 + (1 - 4i)z_2 + (-2 + i)z_3 = 5 - i, \\ (-3 - 4i)z_1 + (-2 + i)z_2 + (3 + i)z_3 = -6 + 4i. \end{cases}$$

$$19) \begin{cases} (-1 + 5i)z_1 + (2 + 3i)z_2 + (4 - i)z_3 = -5 - 4i, \\ (2 - i)z_1 + (-4 - i)z_2 + (-5 - i)z_3 = 10 + 6i, \\ (5 + 2i)z_1 + (3 - i)z_2 + (-2 + 2i)z_3 = 13 + 6i. \end{cases}$$

$$20) \begin{cases} (2 - 2i)z_1 + (1 - 3i)z_2 + (2 + i)z_3 = -6 - 4i, \\ (3 + 2i)z_1 + (-1 - i)z_2 + (4 + 2i)z_3 = -8 + 6i, \\ (-1 + i)z_1 + (-3 + 4i)z_2 + iz_3 = 5 + i. \end{cases}$$

$$21) \begin{cases} (-1 + 3i)z_1 + (1 + 2i)z_2 + (4 - 2i)z_3 = -9 + 5i, \\ (2 + 4i)z_1 + (-3 + i)z_2 + (-1 + i)z_3 = 8 + 2i, \\ (-3 - 2i)z_1 + (1 + 5i)z_2 + (-3 + i)z_3 = 6. \end{cases}$$

$$22) \begin{cases} (-3 + 3i)z_1 + (2 - 5i)z_2 + (-4 - i)z_3 = -7 - 4i, \\ (1 + 3i)z_1 + 4z_2 + (-5 - i)z_3 = 10 - 2i, \\ (-2 - 2i)z_1 + (-3 + 2i)z_2 + (4 + i)z_3 = 11 + 6i. \end{cases}$$

$$23) \begin{cases} (4 - i)z_1 + (-2 - 3i)z_2 + 3iz_3 = -12 + 5i, \\ (-1 + 3i)z_1 + (5 + i)z_2 + (-4 - 3i)z_3 = -2 + 7i, \\ (3 + i)z_1 + (2 - i)z_2 + (-2 + 5i)z_3 = -3 + 10i. \end{cases}$$

$$24) \begin{cases} (-5 - 2i)z_1 + (-5 + i)z_2 + (2 + 3i)z_3 = 11 - 4i, \\ (2 + i)z_1 + (-3 - i)z_2 + (-4 - 2i)z_3 = 13 + 7i, \\ (-1 - i)z_1 + (4 + i)z_2 + (-5 - 3i)z_3 = -14 + 2i. \end{cases}$$

$$25) \begin{cases} (2 - i)z_1 + (3 + 3i)z_2 + (-4 + 2i)z_3 = -5 + 2i, \\ (-3 - i)z_1 + (2 + i)z_2 + (5 + i)z_3 = 13 + 3i, \\ (4 - i)z_1 + (-2 - 5i)z_2 + (-1 + 3i)z_3 = -9 + 4i. \end{cases}$$

$$26) \begin{cases} (1 + i)z_1 + (-4 - 3i)z_2 + (-5 + 4i)z_3 = -11 - 9i, \\ (-2 - i)z_1 + (3 + 3i)z_2 + (2 + 5i)z_3 = 14 + 2i, \\ (3 - i)z_1 + (2 - 5i)z_2 + (-4 - i)z_3 = -15 + 3i. \end{cases}$$

$$27) \begin{cases} (-5 + i)z_1 + (-1 - 3i)z_2 + (2 + 2i)z_3 = -11 - 9i, \\ -3iz_1 + (2 + 4i)z_2 + (-4 + 3i)z_3 = -12 + 8i, \\ (1 + 4i)z_1 + (-3 + 5i)z_2 + (-1 - i)z_3 = 13 + 7i. \end{cases}$$

$$28) \begin{cases} (2 - 7i)z_1 + (1 + i)z_2 + (-4 - 3i)z_3 = -5 + i, \\ (-1 + 5i)z_1 + (-1 + 4i)z_2 + (4 + i)z_3 = 8 + 2i, \\ (3 + i)z_1 + (-2 + i)z_2 + (1 + 2i)z_3 = 10 - 5i. \end{cases}$$

$$29) \begin{cases} (-3 + 4i)z_1 + (2 + 5i)z_2 + (-2 - 6i)z_3 = -9 + 4i, \\ (-2 + 2i)z_1 + (4 - i)z_2 + (3 - 2i)z_3 = -13 + 8i, \\ (1 + i)z_1 + (2 - i)z_2 + (5 + i)z_3 = -8 + 6i. \end{cases}$$

$$30) \begin{cases} (2 + i)z_1 + (-3 - i)z_2 + (2 - 5i)z_3 = 10 - i, \\ (-2 + 3i)z_1 + (4 - 5i)z_2 + 6z_3 = 11 + 3i, \\ (1 - 3i)z_1 + (-2 + i)z_2 + (3 - i)z_3 = -7 - 2i. \end{cases}$$

IV. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

1. Векторная алгебра

Вектором \mathbf{a} называется направленный отрезок в пространстве (на плоскости). Вектор имеет две характеристики: длину, называемую также модулем и обозначаемую $|\mathbf{a}|$, и направление.

Принято также вектор обозначать двумя буквами, первая из которых указывает начало вектора, вторая – конец: $\mathbf{a} = \overline{AB}$.



Два вектора считаются равными, если они:

1) равны по длине, 2) лежат на параллельных прямых, 3) сонаправлены. Вектор, имеющий нулевую длину (т.е. у которого совпадают начало и конец), называется нуль-вектором или нулевым вектором и обозначается $\mathbf{0}$, нуль-вектор считается параллельным любому вектору. Вектор, модуль которого равен единице, называется единичным вектором или ортом.

Суммой векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} называется вектор \mathbf{c} , определяемый по правилу: если путём параллельного переноса совместить начало вектора \mathbf{b} с концом вектора \mathbf{a} , то начало вектора \mathbf{c} совпадает с началом \mathbf{a} , а конец \mathbf{c} – с концом \mathbf{b} ; при этом пишут $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ (рис. 1). Векторы можно складывать и по «правилу параллелограмма» (рис. 2). Если слагаемых больше, то используют правило замыкания ломаной (рис. 3).

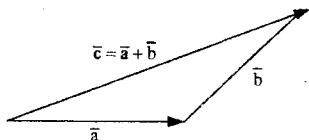


Рис.1

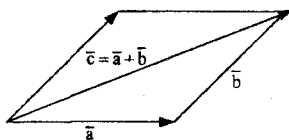


Рис.2

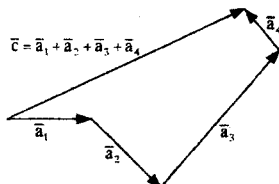


Рис.3

Справедливо правило уничтожения средней буквы:
 $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

Произведением вектора a на действительное число λ называется вектор, обозначаемый λa (или $a\lambda$) и удовлетворяющий следующим требованиям:

1) $|\lambda a| = |\lambda| \cdot |a|$; 2) λa и a параллельны; 3) λa и a сонаправлены при $\lambda > 0$ и направлены в противоположные стороны при $\lambda < 0$.

Эти две операции обладают привычными для нас свойствами: $a + b = b + a$, $a + (b + c) = (a + b) + c$, $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$ и т.д.

Единичный вектор, параллельный a и сонаправленный с ним, называется ортом вектора \bar{a} и обозначается a^0 ; $a^0 = a/|a|$.

Векторы a_1, a_2 называются коллинеарными, если они параллельны.

Тройка векторов a_1, a_2, a_3 называется компланарной, если путём параллельного переноса все три вектора удаётся поместить в одну плоскость.

Система векторов a_1, a_2, \dots, a_n называется линейно-зависимой, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, не все равные нулю и такие, что $\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \dots + \lambda_n a_n = 0$. Если же равенство $\sum_{j=1}^n \lambda_j a_j = 0$ возможно лишь при $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$, то система векторов $\{a_j\}_{j=1}^n$ называется линейно независимой.

Теорема 1. а) Векторы a_1, a_2 коллинеарны в том и только в том случае, если они линейно-зависимы; б) векторы a_1, a_2, a_3 компланарны в том и только в том случае, если они линейно-зависимы.

Упорядоченная тройка e_1, e_2, e_3 (двойка e_1, e_2) некопланарных (неколлинеарных) векторов пространства (плоскости) называется базисом во множестве всех векторов пространства (плоскости). Любой вектор a в пространстве может быть представлен в виде линейной комбинации векторов базиса e_1, e_2, e_3 :

$$a = X_1 e_1 + X_2 e_2 + X_3 e_3,$$

более того, такое представление единственно; числа X_1, X_2, X_3 называются координатами вектора a в базисе e_1, e_2, e_3 .

При сложении векторов складываются их соответствующие координаты; при умножении вектора на число каждая координата вектора умножается на это число.

Векторы a и b коллинеарны в том и только в том случае, если координаты этих векторов (в произвольном базисе) пропорциональны.

Если векторы e_1, e_2, e_3 единичные и взаимно перпендикулярны, то они образуют базис, который называется ортонормированным.

Упорядоченная тройка некопланарных векторов a_1, a_2, a_3 образует правую (левую) тройку, если после совмещения их начал путём параллельного переноса, кратчайший поворот от первого вектора a_1 ко второму вектору a_2 виден из конца третьего вектора a_3 , совершающимся против (по) часовой стрелки.

Для ортонормированного базиса e_1, e_2, e_3 , образующего правую тройку, приняты обозначения $e_1 = i, e_2 = j, e_3 = k$.

Проекцией вектора a на вектор b (или на ось, параллельную и сонаправленную b) называют число $\text{пр}_b a = |a| \cdot \cos \varphi$, где φ – угол между векторами a и b . В ортонормированном базисе координаты X, Y, Z вектора a совпадают с его проекциями на базисные орты i, j, k : $X = \text{пр}_i a, Y = \text{пр}_j a, Z = \text{пр}_k a$, при этом

$$|a| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}.$$

Обозначим через α, β, γ углы между вектором $a = Xi + Yj + Zk$ и векторами i, j, k соответственно. Числа $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ называются направляющими косинусами вектора a . Имеют место формулы

$$\cos \alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}, \quad \cos \beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}},$$

$$\cos \gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}.$$

Часто краткости ради вместо $a = Xi + Yj + Zk$ пишут $a\{X; Y; Z\}$.

Аналогичные определения приняты на множестве векторов плоскости.

Теорема 2. Тройка векторов $e_1\{x_1; y_1; z_1\}, e_2\{x_2; y_2; z_2\}, e_3\{x_3; y_3; z_3\}$ образует базис в том и только в том случае, если

$$\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Пример 1. Доказать, что векторы $e_1 \{-2; 1; 3\}$, $e_2 \{1; 2; -1\}$, $e_3 \{4; 0; 1\}$ образуют базис. Найти разложение вектора $a \{1; 4; 6\}$ в этом базисе.

Решение. Имеем

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4 - 4 + 0 - 24 - 0 - 1 = -33 \neq 0.$$

Следовательно, векторы e_1, e_2, e_3 образуют базис. Координаты X, Y, Z вектора $a \{1; 4; 6\}$ в этом базисе должны удовлетворять равенству $Xe_1 + Ye_2 + Ze_3 = a$, или в матричной записи

$$X \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + Y \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + Z \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Это приводит к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} -2X + Y + 4Z = 1, \\ X + 2Y = 4, \\ 3X - Y + Z = 6. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдём $X = 2, Y = 1, Z = 1$.

Таким образом, $a = 2e_1 + e_2 + e_3$.

Прямоугольная система координат в пространстве задаётся точкой O – началом координат – и ортонормированным базисом i, j, k .

Оси Ox, Oy, Oz , проведённые через точку O параллельно векторам i, j, k , называются *координатными осями*.

Каждой точке M пространства ставится в соответствие вектор \overline{OM} , называемый радиус-вектором точки M ; это соответствие является взаимно-однозначным. Координатами x, y, z точки M называются координаты её радиус-вектора $\overline{OM} \{X; Y; Z\}$: $x = X, y = Y, z = Z$.

Координаты вектора $\overline{M_1M_2} \{X; Y; Z\}$ выражаются через координаты начала $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и конца $M_2(x_2; y_2; z_2)$ вектора по формулам

$$X = x_2 - x_1, \quad Y = y_2 - y_1, \quad Z = z_2 - z_1.$$

Расстояние между точками $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ выражается формулой

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Скалярным произведением ab векторов a и b называется произведение модулей этих векторов на косинус угла между a и b :
 $ab = |a| \cdot |b| \cdot \cos \varphi$.

(Наряду с обозначением ab принято и другое: (a, b) .)

Теорема 3. а) Пусть $a \neq 0$, $b \neq 0$. Тогда $a \perp b$ в том и только в том случае, если $ab = 0$;

б) $ab = ba$; в) $(\lambda a)b = \lambda(ab)$; г) $a(b+c) = ab+ac$; д) $aa \geq 0$, причём $aa = 0$ в том и только в том случае, если $a = 0$.

Из определения скалярного произведения следует

$$|a| = \sqrt{aa}, \quad \text{пр}_b a = \frac{ab}{|b|}.$$

Теорема 4. Если $a = X_1i + Y_1j + Z_1k$, $b = X_2i + Y_2j + Z_2k$, то $ab = X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2$.

Отсюда следует формула косинуса угла между векторами a и b ;

$$\cos \varphi = \frac{X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2}{\sqrt{X_1^2 + Y_1^2 + Z_1^2} \sqrt{X_2^2 + Y_2^2 + Z_2^2}}.$$

$a \perp b$ в том и только в том случае, если $X_1X_2 + Y_1Y_2 + Z_1Z_2 = 0$.

Пример 2. Даны точки $A(-2; 1; 3)$, $B(0; -1; 2)$, $C(3; -2; 1)$.
 Найти: а) длину отрезка AB ; б) косинус угла B в треугольнике ABC ;
 в) $\text{пр}_{(\overline{BC}, \overline{2AC})} \overline{AB}$; г) \overline{AB}^0 и направляющие косинусы \overline{AB} .

Решение.

$$\text{а) } \rho(A, B) = \sqrt{(0 - (-2))^2 + (-1 - 1)^2 + (2 - 3)^2} = \sqrt{4 + 4 + 1} = 3;$$

б) угол B в треугольнике ABC есть угол между векторами \overline{BA} и \overline{BC} .
 Имеем $\overline{BA} \{-2; 2; 1\}$, $\overline{BC} \{3; -1; -1\}$, $|\overline{BA}| = 3$,

$$|\overline{BC}| = \sqrt{9 + 1 + 1} = \sqrt{11},$$

$$\cos \varphi = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{|\overline{BA}| \cdot |\overline{BC}|} = \frac{-2 \cdot 3 + 2 \cdot (-1) + 1 \cdot (-1)}{3 \cdot \sqrt{11}} = \frac{-9}{3\sqrt{11}} = -\frac{3}{\sqrt{11}};$$

$$\text{в) } \overline{AB} \{2; -2; -1\}, \quad \overline{BC} \{3; -1; -1\}, \quad \overline{AC} \{5; -3; -2\},$$

$$2\overline{BC} - 3\overline{AC} = 2(3i - j - k) - 3(5i - 3j - 2k) = -9i + 7j + 4k,$$

отсюда находим

$$\text{пр}_{(2\overline{BC}-3\overline{AC})} \overline{AB} = \frac{\overline{AB} \cdot (2\overline{BC} - 3\overline{AC})}{|2\overline{BC} - 3\overline{AC}|} = \frac{-18 - 14 - 4}{\sqrt{81 + 49 + 16}} = \frac{36}{\sqrt{146}};$$

$$\text{г) } \overline{AB}^0 = \frac{\overline{AB}}{|\overline{AB}|} = \frac{1}{3} \{2; -2; -1\} = \left\{ \frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{1}{3} \right\}.$$

Направляющими косинусами вектора \overline{AB} являются $2/3, -2/3, -1/3$.

Векторным произведением $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ упорядоченной пары неколлинеарных векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} называется вектор \mathbf{c} , удовлетворяющий следующим трём требованиям:

- 1) $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin \varphi$, где φ – угол между векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} ;
- 2) \mathbf{c} перпендикулярен каждому из векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} ;
- 3) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ образуют правую тройку.

Векторное произведение принято также обозначать $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Теорема 5. а) $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ равен площади параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{a} и \mathbf{b} ; б) $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$; в) $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$; г) $(\lambda \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \lambda(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$.

Теорема 6. Если $\mathbf{a} = X_1\mathbf{i} + Y_1\mathbf{j} + Z_1\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = X_2\mathbf{i} + Y_2\mathbf{j} + Z_2\mathbf{k}$, то $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (Y_1Z_2 - Z_1Y_2)\mathbf{i} + (Z_1X_2 - X_1Z_2)\mathbf{j} + (X_1Y_2 - Y_1X_2)\mathbf{k}$,

или, в символической записи,

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}.$$

Смешанным произведением упорядоченной тройки векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ называется число $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$; смешанное произведение векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ обозначается $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$.

Теорема 7. а) $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ компланарны в том и только в том случае, если $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = 0$;

б) для некомпланарной тройки векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) > 0$ в том и только в том случае, если $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ образуют правую тройку, и $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) < 0$ в том и только в том случае, если $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ образуют левую тройку;

в) $|\mathbf{c}| \cdot (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ равен объёму параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$;

г) $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}) = (\mathbf{c}, \mathbf{a}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}) = -(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b}) = -(\mathbf{c}, \mathbf{b}, \mathbf{a})$.

Теорема 8. Если $\mathbf{a} = X_1\mathbf{i} + Y_1\mathbf{j} + Z_1\mathbf{k}$, $\mathbf{b} = X_2\mathbf{i} + Y_2\mathbf{j} + Z_2\mathbf{k}$, $\mathbf{c} = X_3\mathbf{i} + Y_3\mathbf{j} + Z_3\mathbf{k}$, то

$$(a, b, c) = \begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix}.$$

Пример 3. Даны точки $A(4; -1; 3)$, $B(0; 1; 2)$, $C(3; -2; 5)$, $D(1; -1; 1)$.
Найти: а) площадь треугольника ABC ; б) высоту h_A треугольника ABC , опущенную из вершины A на сторону BC ;
в) объём пирамиды $ABCD$.

Решение. а) Площадь S_{Δ} треугольника ABC равна половине площади параллелограмма S , построенного на векторах \overline{AB} и \overline{AC} , т.е.

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}|. \text{ Имеем } \overline{AB} \{-4; 2; -1\}, \overline{AC} \{-1; -1; 2\},$$

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} |\overline{AB} \times \overline{AC}| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} i & j & k \\ -4 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} |i \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} -4 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} +$$

$$+ k \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}| = \frac{1}{2} |3i + 9j + 6k| = \frac{3}{2} |i + 3j + 2k| = \frac{3}{2} \sqrt{1 + 9 + 4} = \frac{3\sqrt{14}}{2};$$

$$\text{б) } h_A = 2S_{\Delta} / |\overline{BC}|; \overline{BC} \{3; -3; 3\}, |\overline{BC}| = 3\sqrt{3};$$

$$h_A = 3\sqrt{14} / (3\sqrt{3}) = \sqrt{14/3}.$$

в) Объём V_{Δ} пирамиды $ABCD$ равен $\frac{1}{6}$ объёма параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$. Имеем $\overline{AB} \{-4; 2; -1\}$, $\overline{AC} \{-1; -1; 2\}$, $\overline{AD} \{-3; 0; -2\}$;

$$V_{\Delta} = \frac{1}{6} |(\overline{AB} \cdot \overline{AC} \cdot \overline{AD})| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} |-8 - 12 + 0 + 3 + 0 - 4| =$$

$$= 21/6 = 7/2.$$

2. Прямая на плоскости

Прямая на плоскости, в которой определена прямоугольная система координат, может быть задана следующими уравнениями:

$Ax + By + C = 0$ – общее уравнение;

$y = kx + b$ – уравнение с угловым коэффициентом (k – угловой коэффициент – есть тангенс угла наклона прямой к оси Ox);

$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m}$ – каноническое уравнение (прямая проходит через точку

$M(x_0; y_0)$ параллельно вектору $q\{l; m\}$ – направляющему вектору прямой);

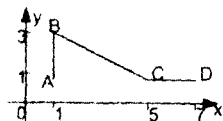
$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ – уравнение прямой, проходящей через точку $M(x_0; y_0)$ перпендикулярно вектору $n\{A; B\}$ – нормали прямой;

$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$ – уравнение прямой, проходящей через точки

$M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2)$.

Уравнение прямой, параллельной оси Oy и проходящей через точку $(a; 0)$, имеет вид $x = a$.

Пример 4. Составить уравнения прямых: а) AB ; б) BC ; в) CD .



Решение. а) AB параллельна Oy , поэтому её уравнением будет $x = 1$.

б) составим уравнение BC как прямой, проходящей через точки $B(1; 3), C(5; 1)$:

$$\frac{x-1}{5-1} = \frac{y-3}{1-3}; \quad \frac{x-1}{4} = \frac{y-3}{-2};$$

$$-2x + 2 = 4y - 12; \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}.$$

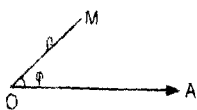
в) Прямая CD параллельна Ox , поэтому уравнением CD является $y = 1$.

3. Полярная система координат

Полярная система координат определяется заданием точки O , называемой полюсом, исходящего из этой точки луча OA , называемого полярной осью, и масштаба для измерения длины.

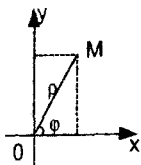
Каждой точке M на плоскости ставятся в соответствие два числа: $\rho = |\overline{OM}|$ – полярный

радиус и φ – полярный угол, на который нужно повернуть полярную ось для совмещения с вектором \overline{OM} ; при этом вращение против часовой стрелки считается положительным, по часовой стрелке – отрицательным. Если точка M совпадает с полюсом O , то полярный угол не определён.



Полярный угол φ определяется с точностью до 2π , $n \in \mathbb{Z}$. Принято договариваться о главных значениях полярного угла; обычно таковыми считаются углы в пределах $[-\pi; \pi)$ или $[0; 2\pi)$.

Рассмотрим декартову прямоугольную систему координат на плоскости, начало которой совпадает с полюсом O , а положительная полуось Ox – с полярной осью (в этом случае говорят, что декартова прямоугольная система координат согласована с полярной системой координат). Тогда декартовы прямоугольные $(x; y)$ и полярные $(\rho; \varphi)$ координаты точки M связаны соотношениями



$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

Это есть формулы перехода от полярных координат к декартовым.

Пример 5. Найти полярные координаты точки M , если в согласованной декартовой прямоугольной системе координат она имеет координаты $x = -2$, $y = 2\sqrt{3}$.

Решение. $\rho = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2} = 4$;

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi = \operatorname{arctg} \left(-\sqrt{3} \right) + \pi = 2\pi/3.$$

Пример 6. Составить полярные уравнения:

а) прямой $y = -2x + 3$; б) параболы $y = 2x^2$.

Решение. Имеем $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Поэтому

а) $\rho \sin \varphi = -2\rho \cos \varphi + 3$; $\rho = \frac{3}{\sin \varphi + 2 \cos \varphi}$ – уравнения прямой
 $y = -2x + 3$.

б) $\rho \sin \varphi = 2 \rho^2 \cos^2 \varphi$, $\rho = \frac{\sin \varphi}{2 \cos^2 \varphi}$ – уравнения параболы $y = 2x^2$.

4. Плоскость и прямая в пространстве

Плоскость (Π) в пространстве с заданной декартовой прямоугольной системой координат может быть задана одним из следующих уравнений:

1) $Ax + By + Cz + D = 0$ – общее уравнение плоскости;

2) $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ – уравнение плоскости (Π) , проходящей через точку $M(x_0; y_0; z_0)$ и перпендикулярной вектору

$\mathbf{n}\{A; B; C\}$ – вектору нормали к (Π) (вектором нормали к плоскости (Π) называется любой ненулевой вектор, перпендикулярный (Π));

3) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ – уравнение плоскости в отрезках, где a, b, c – направленные отрезки, отсекаемые плоскостью на осях $Ox, Oy,$ и Oz соответственно;

4) $x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma = \rho$ – нормированное (или нормальное) уравнение плоскости (Π) , где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – направляющие косинусы вектора нормали \mathbf{n} к (Π) , направленного из начала координат в сторону плоскости (Π) , ρ – расстояние от начала координат до плоскости (Π) ;

$$5) \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$
 – уравнение плоскости,

проходящей через три точки $M_1(x_1; y_1; z_1), M_2(x_2; y_2; z_2), M_3(x_3; y_3; z_3)$, не лежащие на одной прямой.

Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости (Π) , заданной общим уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, находится по формуле

$$\rho(M, (\Pi)) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Две различные плоскости $(\Pi_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $(\Pi_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ параллельны в том и только в том случае,

если $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \left(\neq \frac{D_1}{D_2} \right).$

Угол φ между плоскостями $(\Pi_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $(\Pi_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ есть угол между нормальными $\mathbf{n}_1\{A_1; B_1; C_1\}$ и $\mathbf{n}_2\{A_2; B_2; C_2\}$ (с поправкой на направление, если угол тупой) к этим плоскостям:

$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2|}{|\mathbf{n}_1| \cdot |\mathbf{n}_2|}.$$

Эти плоскости: а) параллельны в том и только в том случае, если \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 коллинеарны; б) перпендикулярны в том и только в том случае, если $\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = 0$.

Прямая (L) в пространстве с заданной прямоугольной системой координат может быть задана:

1) каноническими уравнениями $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$; при этом

(L) проходит через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ и параллельна направляющему вектору прямой $\mathbf{q}\{l; m; n\}$;

2) параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \quad -\infty < t < \infty, \\ z = z_0 + nt, \end{cases}$$

заданные числа x_0, y_0, z_0, l, m, n имеют тот же смысл, что и в канонических уравнениях;

3) общим уравнением

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$$

где ранг матрицы $\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ равен 2, при этом (L) есть прямая пересечения плоскостей

(Π_1): $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, (Π_2): $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Угол φ между прямыми (L_1) и (L_2) есть угол между направляющими векторами \mathbf{q}_1 и \mathbf{q}_2 (с поправкой на направление, если угол между ними тупой):

$$\cos \varphi = \frac{|\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{q}_2|}{|\mathbf{q}_1| \cdot |\mathbf{q}_2|}.$$

Угол ψ между прямой (L): $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ и плоскостью

(Π): $Ax + By + Cz + D = 0$ определяется по формуле

$$\sin \psi = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}.$$

Пример 7. Даны плоскость (Π): $-2x + y + 3z - 1 = 0$, прямая (L):

$\frac{x-5}{4} = \frac{y+2}{-6} = \frac{z+1}{1}$ и точка $M(-4; 1; 7)$: а) составить уравнение

плоскости, проходящей через точку M и параллельной (Π); б) составить канонические уравнения прямой, проходящей через точку M и параллельной (L); в) составить уравнение плоскости, проходящей через

точку M и перпендикулярной (L) ; г) составить уравнение прямой, проходящей через точку M и перпендикулярной (Π') ;
 д) составить уравнение плоскости, проходящей через точку M и прямую (L) ; е) составить уравнение плоскости, проходящей через точку M и перпендикулярной плоскостям (Π') : $x - 3y - z + 2 = 0$ и (Π'') : $4x + 2y - 5z + 7 = 0$; ж) найти точку пересечения прямой (L) и плоскости (Π) ; з) найти расстояние от точки M до плоскости (Π) .

Решение. а) В качестве вектора нормали к искомой плоскости (Π_1) можно взять $\mathbf{n} \{-2; 1; 3\}$ – нормаль к (Π) . Поэтому уравнением (Π_1) будет $-2(x + 4) + 1(y - 1) + 3(z - 7) = 0$, или $-2x + y + 3z - 30 = 0$.

б) В качестве направляющего вектора искомой прямой (L_1) можно взять $\mathbf{q} \{4; -6; 1\}$ – направляющий вектор (L) . Тогда уравнениями (L_1) будут $\frac{x+4}{4} = \frac{y-1}{-6} = \frac{z-7}{1}$.

в) В качестве вектора нормали к искомой плоскости (Π_2) можно взять $\mathbf{q} \{4; -6; 1\}$ – направляющий вектор (L) ; и уравнением (Π_2) будет $4(x + 4) - 6(y - 1) + 1(z - 7) = 0$ или $4x - 6y + z + 15 = 0$.

г) Направляющим вектором искомой прямой (L_2) можно взять $\mathbf{n} \{-2; 1; 3\}$ – нормаль к (Π) . Отсюда получаем уравнения (L_2) :

$$\frac{x+4}{-2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-7}{3}.$$

д) Запишем уравнения (L) в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = 4t + 5, \\ y = -6t - 2, & -\infty < t < \infty, \\ z = t - 1. \end{cases}$$

Придав t два различных значения, скажем, $t = 0$ и $t = 1$, найдём две точки прямой (L) :

$$t = 0: \begin{cases} x = 5, \\ y = -2, \\ z = -1, \end{cases} \quad M_1(5; -2; -1),$$

$$t = 1: \begin{cases} x = 9, \\ y = -8, \\ z = 0, \end{cases} \quad M_2(9; -8; 0).$$

Точки M , M_1 , и M_2 лежат в искомой плоскости (Π_3) . Составим уравнение (Π_3) как уравнение плоскости, проходящей через эти три точки:

$$\begin{vmatrix} x+4 & y-1 & z-7 \\ 5+4 & -2-1 & -1-7 \\ 9+4 & -8-1 & 0-7 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} x+4 & y-1 & z-7 \\ 9 & -3 & -8 \\ 13 & -9 & -7 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(x+4) \begin{vmatrix} -3 & -8 \\ -9 & -7 \end{vmatrix} - (y-1) \begin{vmatrix} 9 & -8 \\ 13 & -7 \end{vmatrix} + (z-7) \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ 13 & -9 \end{vmatrix} = 0;$$

$$-51(x+4) - 41(y-1) - 42(z-7) = 0;$$

$$-51x - 41y - 42z + 131 = 0.$$

Это и есть уравнение (Π_3) .

е) В качестве вектора нормали к искомой плоскости (Π_4) можно взять векторное произведение $\mathbf{n}'\{1; -3; -1\}$ на $\mathbf{n}''\{4; +2; -5\}$ — нормалей к плоскости (Π') и (Π'') :

$$\mathbf{n}' \times \mathbf{n}'' = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -3 & -1 \\ 4 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} - \bar{j} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} + \bar{k} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 17\bar{i} + \bar{j} + 14\bar{k}.$$

Зная точку $M(-4; 1; 7)$, через которую проходит плоскость (Π_4) , и вектор нормали $\mathbf{n}' \times \mathbf{n}'' = 17\bar{i} + \bar{j} + 14\bar{k}$, составляем уравнение (Π_4) :

$$17(x+4) + 1(y-1) + 14(z-7) = 0;$$

$$17x + y + 14z - 31 = 0.$$

ж) Запишем ещё раз уравнения (L) в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = 4t + 5, \\ y = -6t - 2, & -\infty < t < \infty, \\ z = t - 1. \end{cases} \quad (1)$$

Подставим эти выражения в уравнение плоскости (Π) :

$$-2(4t+5) + (-6t-2) + 3(t-1) - 1 = 0;$$

$$-11t = 16; \quad t = -\frac{16}{11}.$$

Подставив найденное t в (1), находим координаты искомой точки:

$$x = 4 \cdot \frac{-16}{11} + 5 = -\frac{9}{11}, \quad y = -6 \left(\frac{-16}{11} \right) - 2 = \frac{74}{11}, \quad z = \frac{16}{11} - 1 = -\frac{27}{11}.$$

Таким образом, точкой пересечения (L) и (Π) является

$$M \left(-\frac{9}{11}; \frac{74}{11}; -\frac{27}{11} \right).$$

$$3) \rho(M, (\Pi)) = \frac{|-2(-4) + 1 + 3 \cdot 7 - 1|}{\sqrt{4+1+9}} = \frac{29}{\sqrt{14}}.$$

Пример 8. Составить канонические уравнения прямой (L), заданной в виде

$$\begin{cases} -3x + 2y - z + 1 = 0, \\ x - 5y + 6z + 21 = 0. \end{cases} \quad (2)$$

Решение. Прямая (L) задана как пересечение плоскостей (П₁): $-3x + 2y - z + 1 = 0$ и (П₂): $x - 5y + 6z + 21 = 0$. Векторы нормалей $\mathbf{n}_1 \{-3; 2; -1\}$, $\mathbf{n}_2 \{1; -5; 6\}$ перпендикулярны к (L). Поэтому в качестве направляющего вектора \mathbf{q} прямой (L) можно взять векторное произведение $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} = \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 2 & -1 \\ 1 & -5 & 6 \end{vmatrix} = \mathbf{i} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 6 \end{vmatrix} - \mathbf{j} \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} + \mathbf{k} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = \\ &= 7\mathbf{i} + 17\mathbf{j} + 13\mathbf{k}. \end{aligned}$$

Для составления канонических уравнений прямой достаточно знать её направляющий вектор и точку, через которую проходит прямая. Найдём некоторую точку (L). Определитель $\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 13$

отличен от нуля. Перепишем систему (2) в виде $\begin{cases} -3x + 2y = z - 1, \\ x - 5y = -6z - 21. \end{cases}$

Положим $z = 0$ (можно было взять любое другое), получим систему

$$\begin{cases} -3x + 2y = -1, \\ x - 5y = -21. \end{cases}$$

Эта система имеет решение $x = 47/13$, $y = 64/13$. Вспомнив, что $z = 0$, находим точку прямой (L): $M(47/13; 64/13; 0)$. Составим уравнение прямой (L) по её направляющему вектору $\bar{\mathbf{q}} \{7; 17; 13\}$ и точке $M(47/13; 64/13; 0)$, через которую она проходит:

$$\frac{x - \frac{47}{13}}{7} = \frac{y - \frac{64}{13}}{17} = \frac{z}{13}.$$

5. Кривые второго порядка на плоскости

Эллипсом называется геометрическое место всех таких точек на плоскости, для которых сумма расстояний до двух фиксированных

точек плоскости F_1 и F_2 , называемых фокусами, есть величина постоянная.

Гиперболой называется геометрическое место всех таких точек на плоскости, для которых разность расстояний до двух фиксированных точек плоскости F_1 и F_2 , называемых фокусами, есть величина постоянная.

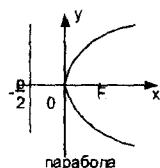
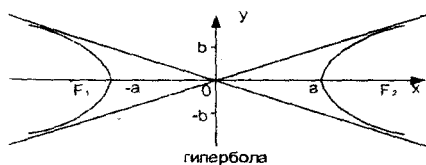
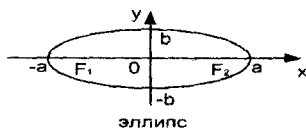
Параболой называется геометрическое место всех таких точек на плоскости, для каждой из которых расстояние до некоторой фиксированной точки F , называемой фокусом, равно расстоянию до некоторой фиксированной прямой, называемой директрисой.

Для каждой из этих кривых существует такая декартова прямоугольная система координат, что кривая описывается каноническим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ для эллипса,}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ для гиперболы,}$$

$$y^2 = 2px \text{ для параболы.}$$



Эллипс, заданный уравнением в канонической форме, имеет центр симметрии – точку O , две оси симметрии – координатные оси Ox и Oy , заключён в прямоугольнике $-a \leq x \leq a$, $-b \leq y \leq b$ и касается его сторон.

Гипербола, заданная уравнением в канонической форме, имеет центр симметрии – точку O , две оси симметрии – координатные оси Ox и Oy , имеет две асимптоты – прямые $y = -\frac{b}{a}x$ и $y = \frac{b}{a}x$.

Парабола, заданная уравнением в канонической форме, имеет одну ось симметрии – ось Ox .

Алгебраической кривой второго порядка называется кривая, которая в декартовой прямоугольной системе координат задаётся уравнением

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_1x + a_2y + a_0 = 0. \quad (3)$$

Если кривая, задаваемая уравнением (3), не является вырожденной, то она является либо эллипсом, либо гиперболой, либо параболой (к вырожденным относятся: пустое множество, точка, пара точек, прямая, пара прямых).

Пример 9. Дано уравнение кривой в полярной системе координат:

$$\rho = \frac{3}{2 - \cos \varphi}$$

а) изобразить кривую по точкам, придавая φ значения из промежутка $[0; 2\pi)$ с шагом $\pi/8$;

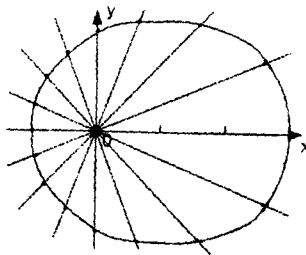
б) составить уравнение этой кривой в декартовой прямоугольной системе координат, согласованной с полярной, и определить вид этой кривой.

Решение. а) Составим таблицу значений функции.

φ	0	$\pi/8$	$\pi/4$	$3\pi/8$	$\pi/2$	$5\pi/8$	$3\pi/4$	$7\pi/8$
ρ	3	2,8	2,32	1,72	1,5	1,26	1,11	1,02

φ	π	$9\pi/8$	$5\pi/8$	$11\pi/8$	$3\pi/2$	$13\pi/8$	$7\pi/4$	$15\pi/8$
ρ	1	1,02	1,11	1,26	1,5	1,72	2,32	2,8

По этим данным отметим точки на плоскости и, плавно соединяя соседние точки, построим линию.



б) Перейдём к декартовой прямоугольной системе координат, пользуясь формулами $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\rho \cos \varphi = x$, $\rho \sin \varphi = y$:

$$\rho(2 - \cos \varphi) = 3; \quad 2\rho - \rho \cos \varphi = 3; \quad 2\sqrt{x^2 + y^2} - x = 3; \quad 2\sqrt{x^2 + y^2} = x + 3;$$

$$4(x^2 + y^2) = x^2 + 6x + 9; \quad 3x^2 - 6x + 4y^2 = 9;$$

$$3(x^2 - 2x + 1 - 1) + 4y^2 = 9; \quad 3(x - 1)^2 + 4y^2 = 12; \quad \frac{(x - 1)^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1.$$

Это уравнение эллипса с центром в точке (1; 0) и полуосями

$$a = 2, \quad b = \sqrt{3}.$$

Задание 4.1

Докажите, что векторы e_1, e_2, e_3 образуют базис. Найдите разложение вектора \bar{a} в этом базисе.

№	e_1	e_2	e_3	a
1	{3;-2;1}	{1;1;-4}	{-2;3;1}	{-1;-1;3}
2	{2;1;-1}	{-3;-2;1}	{4;2;-3}	{-2;-2;4}
3	{-1;-2;3}	{2;0;-4}	{3;-2;1}	{5;-1;-2}
4	{-4;-1;1}	{3;-2;-1}	{2;-5;3}	{-2;1;0}
5	{-3;1;-2}	{4;-2;-1}	{1;-1;2}	{3;1;-4}
6	{2;-1;2}	{3;1;-4}	{4;3;-1}	{0;2;-3}
7	{1;-3;2}	{2;0;-1}	{0;6;1}	{-5;2;-1}
8	{-2;-2;1}	{3;1;-2}	{1;-1;3}	{4;-2;1}
9	{1;-2;4}	{-2;-3;1}	{1;5;-2}	{3;0;2}
10	{4;1;-1}	{-3;1;-1}	{1;3;-4}	{-2;1;-1}
11	{-2;0;5}	{3;-1;2}	{1;-1;1}	{2;-4;3}
12	{-5;1;-1}	{-2;-2;3}	{-1;5;1}	{0;-1;2}
13	{2;-4;5}	{3;1;-3}	{-1;-5;0}	{2;3;-5}
14	{-4;-2;1}	{0;2;-1}	{3;-2;-2}	{5;-1;1}
15	{-3;-3;2}	{2;-1;4}	{-1;-4;1}	{2;-3;-2}
16	{-1;5;1}	{3;-2;0}	{2;3;3}	{-4;-1;1}
17	{2;-3;-2}	{-1;-1;4}	{-1;-6;1}	{-2;-3;1}
18	{-1;-1;5}	{2;-1;-3}	{1;-2;-1}	{3;-1;1}
19	{0;2;-1}	{3;-1;-3}	{3;1;-2}	{1;-4;-1}
20	{-5;1;-1}	{2;1;-3}	{-3;2;1}	{4;2;-3}
21	{2;-3;2}	{1;-4;-1}	{1;3;-2}	{1;0;-5}
22	{4;-1;5}	{-2;3;1}	{2;2;-1}	{3;1;-1}
23	{-2;1;5}	{3;-3;1}	{1;-2;2}	{3;1;0}

№	e_1	e_2	e_3	a
24	{-1;1;6}	{2;-3;-1}	{1;2;-1}	{-4;-1;-2}
25	{3;-1;5}	{2;-2;-1}	{4;0;-1}	{-3;-2;1}
26	{2;2;-5}	{-1;2;-1}	{3;6;-1}	{2;-4;1}
27	{-3;-1;2}	{2;-4;0}	{4;-1;1}	{-5;1;-1}
28	{1;-5;2}	{-2;1;1}	{3;-6;-3}	{1;-1;7}
29	{-4;1;4}	{2;-1;3}	{0;-1;2}	{1;-3;4}
30	{2;-5;2}	{-1;3;0}	{1;-2;3}	{4;-4;3}

Задание 4.2

Даны точки А, В, С, D. Найдите: а) длину отрезка АВ; б) косинус угла В в треугольнике ABC; в) $\text{pr}_{\overline{AB}}(\alpha\overline{BC} + \beta\overline{AD})$;

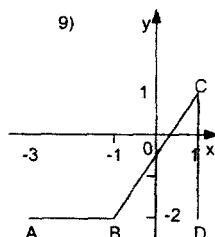
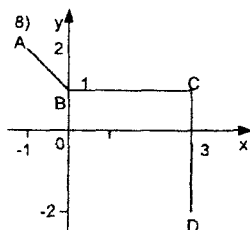
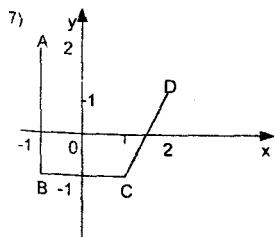
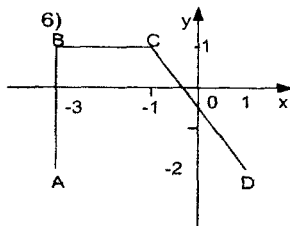
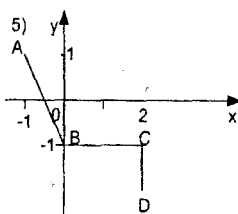
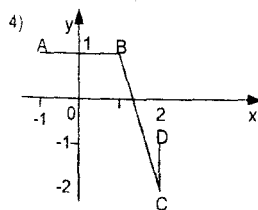
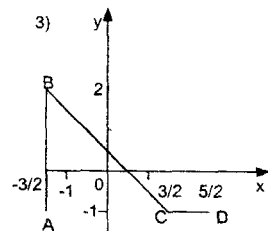
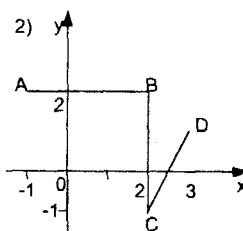
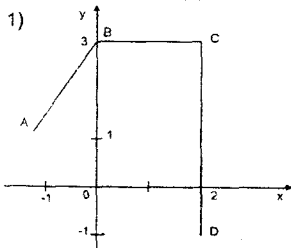
г) \overline{AB}^0 и направляющие косинусы вектора \overline{AB} ; д) площадь треугольника ABC; е) высоту h треугольника ABC, опущенную из вершины С на сторону АВ; ж) объём пирамиды ABCD.

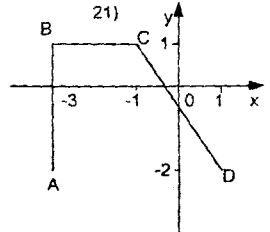
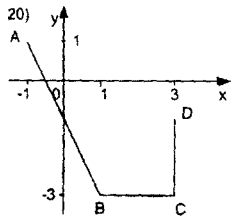
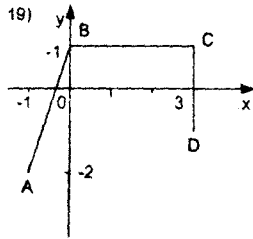
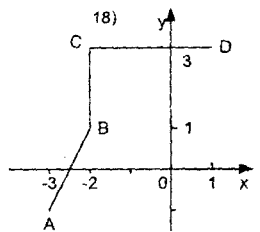
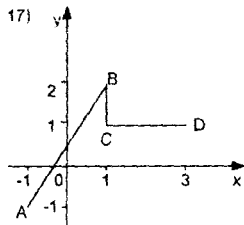
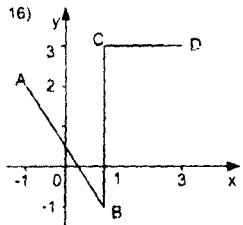
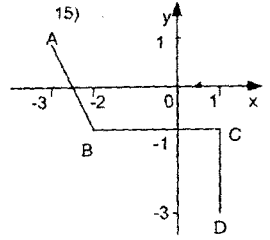
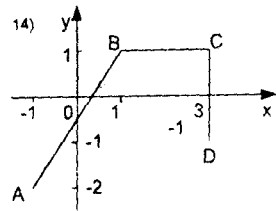
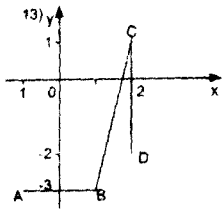
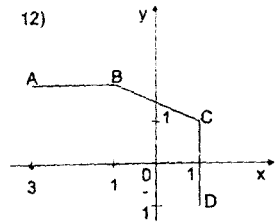
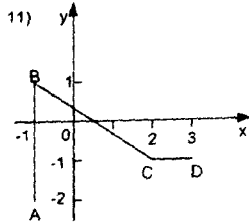
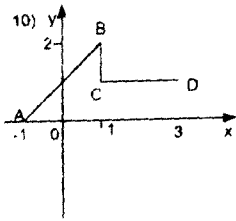
№	A	B	C	D	α	β
1	(-3;2;-1)	(1;-1;4)	(2;0;1)	(1;-3;5)	2	-1
2	(1;-2;1)	(3;0;2)	(-4;2;-1)	(-1;-1;3)	-2	3
3	(-4;-1;1)	(-2;0;-1)	(-1;-2;3)	(1;-3;-1)	-2	1
4	(2;0;-3)	(1;-1;2)	(3;1;-1)	(-2;-1;-1)	3	-2
5	(-1;-1;1)	(2;-2;0)	(3;1;-4)	(-2;1;3)	4	-1
6	(-2;2;1)	(3;0;-1)	(2;1;-4)	(3;2;-2)	-2	-3
7	(1;-1;-1)	(2;-1;0)	(4;1;-2)	(3;0;1)	1	2
8	(4;1;-1)	(-2;-1;1)	(0;2;-1)	(3;1;-2)	-3	1
9	(0;-2;-1)	(3;1;-2)	(4;2;1)	(1;-1;4)	2	5
10	(1;3;-3)	(2;1;0)	(-1;2;-1)	(3;2;1)	-2	-1
11	(-2;1;1)	(1;-1;0)	(2;3;-1)	(-1;-2;1)	3	2
12	(-3;1;2)	(-2;3;1)	(-1;4;1)	(1;0;3)	-1	-3
13	(2;1;-5)	(3;0;-2)	(1;-1;0)	(-1;2;-4)	-3	2
14	(0;-1;4)	(2;-2;5)	(4;1;0)	(-2;2;3)	4	-2
15	(3;-2;1)	(5;-3;4)	(2;1;1)	(-1;2;3)	2	-3
16	(-3;5;-1)	(-2;3;2)	(0;1;-2)	(-1;1;-1)	5	3
17	(2;-1;-4)	(-1;-1;-2)	(1;0;1)	(3;1;2)	4	-3
18	(3;5;2)	(0;4;1)	(2;-1;-1)	(4;2;-3)	-2	5
19	(-4;-1;2)	(-2;0;5)	(-1;1;3)	(-3;4;7)	1	3
20	(6;-1;1)	(4;0;5)	(3;-2;1)	(1;-4;4)	-2	4

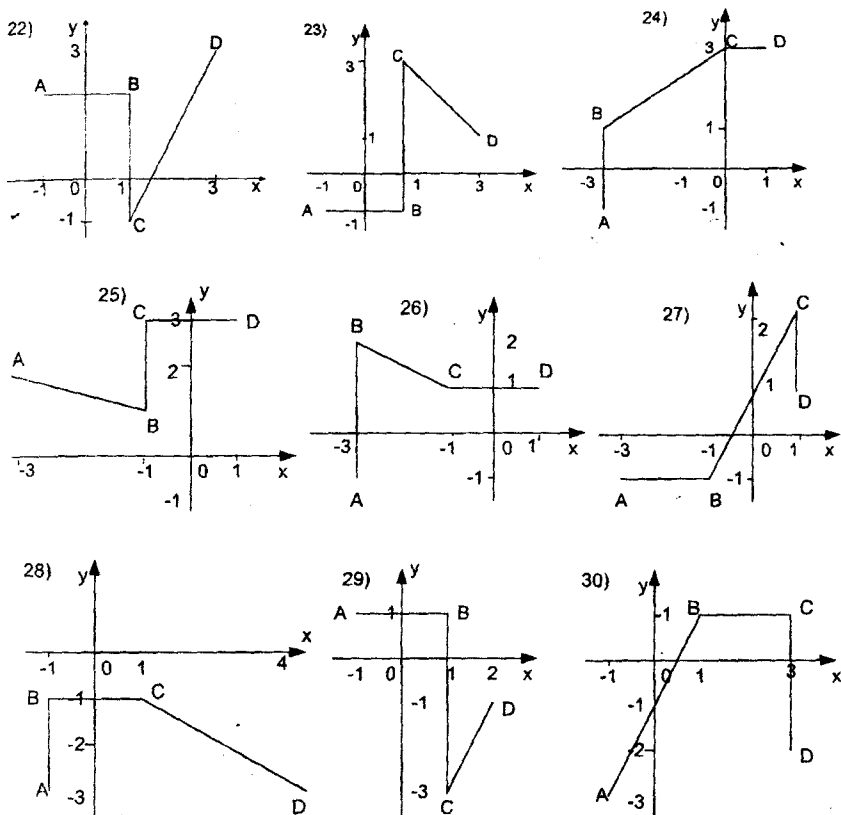
№	A	B	C	D	α	β
21	(5;2;-3)	(1;3;-1)	(2;4;-5)	(4;-1;1)	-5	2
22	(-1;-1;7)	(1;-3;5)	(2;-4;3)	(3;1;-1)	-4	3
23	(2;-7;-5)	(1;-4;-6)	(-1;-8;-3)	(5;-4;-2)	5	-3
24	(-3;2;8)	(1;1;5)	(-1;3;3)	(0;4;1)	3	4
25	(6;-1;-1)	(4;-2;0)	(7;0;1)	(2;-3;2)	-2	-5
26	(-5;2;-4)	(-3;1;-6)	(0;-1;-1)	(-1;-2;2)	4	5
27	(4;-2;-3)	(2;1;-2)	(-1;0;-1)	(3;2;-4)	3	5
28	(-1;-1;4)	(2;1;3)	(-3;2;1)	(0;1;-1)	-3	4
29	(-5;-3;1)	(-6;-2;2)	(-1;-4;1)	(-4;1;-1)	1	5
30	(-6;-2;1)	(-8;0;1)	(-4;-3;2)	(-5;3;-1)	5	4

Задание 4.3

Составьте уравнения прямых AB, BC, CD.







Задание 4.4

Даны плоскости

$$(\Pi): Ax + By + Cz + D = 0, \quad (\Pi'): A'x + B'y + C'z + D' = 0,$$

$$(\Pi''): A''x + B''y + C''z + D'' = 0;$$

прямая (L): $\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}$; точка $M(x'; y'; z')$:

а) составьте уравнение плоскости, проходящей через точку M , и параллельной плоскости (Π) ; б) составьте уравнение прямой, проходящей через точку M , и параллельной прямой (L);

в) составьте уравнение плоскости, проходящей через точку М, и перпендикулярной прямой (L); г) составьте уравнение прямой, проходящей через точку М, и перпендикулярной (Π);

д) составьте уравнение плоскости, проходящей через точку М и прямую (L); е) найдите точку пересечения прямой (L) и плоскости (Π);

ж) составьте уравнение плоскости, проходящей через точку М, и перпендикулярной плоскостям (Π') и (Π'');

з) составьте канонические уравнения прямой

$$\begin{cases} A'x + B'y + C'z + D' = 0, \\ A''x + B''y + C''z + D'' = 0; \end{cases}$$

и) найдите расстояние от точки М до плоскости (Π).

№	(A;B;C;D)	(A';B';C';D')	(A'';B'';C'';D'')	(x ₀ ;y ₀ ;z ₀)	(l; m; n)	(x; y; z)
1	(-5;2;-1;3)	(2;1;-1;4)	(-3;-1;0;1)	(2;-2;3)	(1;5;-4)	(2;-1;-3)
2	(1;3; 4;1)	(-3; 1;2;6)	(2;5;-1;-4)	(-1;-4;2)	(2;-1;3)	(-2;1;1)
3	(-2;2;3;7)	(1;-1;3;4)	(-1;-2;3;5)	(2;7;-9)	(3;-2;-1)	(3;-1;1)
4	(-1;5;-3;8)	(2;7;-1;3)	(-2;1;-1;6)	(-9;-6;1)	(-4;-2;-5)	(2;1;-1)
5	(4;-2;1;3)	(-1;-3;5;0)	(3;2; 1;9)	(3;5;-7)	(2;1;-4)	(3;-1;1)
6	(1;-3;0;5)	(-2;6;1;-7)	(2;4;-3;-8)	(7;-7;5)	(3;-3;2)	(-1;-2;-3)
7	(3;-2;1;-5)	(1;-1;-4;6)	(-6;2;1;7)	(3;0;1)	(2;-3;0)	(4;1;1)
8	(-4;1;-3;-6)	(0;2;1;-8)	(3;5;-1;1)	(7;-9;-6)	(5;-2;1)	(-3;-2;1)
9	(0;3;-2;3)	(-4;-1;2;7)	(1;3;-5;6)	(3;-3;4)	(-1;3;7)	(2;-2;1)
10	(2;-3;1;5)	(-1;-1;3;4)	(-4;1;-1;5)	(4;9;-9)	(2;7;3)	(1;-2;-2)
11	(-1; 5;3;0)	(1;2; 1;4)	(-3;-1;1;8)	(5;-3;-2)	(2;-1;-4)	(-5;-2;-3)
12	(6;-2;-1;3)	(-2;1;-3;5)	(-1;3;4;1)	(6;2;-1)	(5;-1;2)	(1;-1;4)
13	(4;-3;1;2)	(0;3;-2;6)	(2;1;-1;3)	(-3;-5;1)	(0;2;-1)	(1;-1;3)
14	(-3;0;2;-6)	(1;-2;4;-5)	(-2;3;1;3)	(2;-8;5)	(1;-2;-3)	(-1;1;-2)
15	(-4;-3;1;9)	(2;-2;5;1)	(1;3;-1;4)	(3;-2;-4)	(1;2;-3)	(-1;-2;3)
16	(-2;5;-1;2)	(-3;1;3;4)	(1;-2;-1;6)	(-4;-2;3)	(2;-1;6)	(2;1;-1)
17	(4;1;-1;5)	(3;-3;1;1)	(2;0;1;-4)	(7;-5;2)	(3;-4;1)	(-1;2;0)
18	(5;1;-1;8)	(-2;1;-3;4)	(3;-1;2;9)	(5;2;-4)	(-1;2;-1)	(1;2;3)
19	(1;-2;4;3)	(3;-1;0;6)	(-2;-1;3;4)	(2;-7;9)	(2;-1;2)	(1;3;-1)
20	(3;-2;-1;7)	(2;1;3;-8)	(1;-3;-3;5)	(6;-1;8)	(-2;0;1)	(-1;2;1)
21	(2;2;5;-1)	(1;-1;4;7)	(0;2;1;3)	(2;9;3)	(1;-4;1)	(4;-3;-1)
22	(-3;5;1;4)	(2;1;-1;3)	(4;-2;-1;5)	(6;8;-1)	(2;1;-2)	(1;-1;2)
23	(0;2;-1;7)	(3;-4;1;6)	(2;1;-3;7)	(2;-4;-6)	(3;-4;1)	(-4;2;1)
24	(2; 2;3;1)	(4;-1;1;3)	(-3;3;2;5)	(6;-2;4)	(2;-1;1)	(3;3;1)
25	(-5;1;-1;3)	(2;1;-2;5)	(4;-1;3;0)	(2;-5;4)	(1;-2;3)	(2;-2;3)
26	(3;4;-5;1)	(-2;3;4;6)	(2;0;1;9)	(3;-4;1)	(2;-3;2)	(-1;-1;-2)
27	(4;3;-1;8)	(-3;1;2;5)	(1;-1;5;4)	(4;-2;1)	(-3;1;3)	(2;1;-5)

№	(A;B;C;D)	(A';B';C';D')	(A";B";C";D")	(x ₀ ;y ₀ ;z ₀)	(l; m; n)	(x;y;z)
28	(1;-4;1;5)	(2;1;4;-6)	(3;-3;2;1)	(5;0;2)	(-1;2;-4)	(-3;-2;1)
29	(2;1;-3;4)	(-5;2;3;4)	(1;-1;3;-2)	(-8;1;3)	(-1;3;2)	(4;-2;1)
30	(5;-2;1;3)	(2;1;-1;3)	(-4;2;3;1)	(3;-2;7)	(1;-2;-4)	(-1;-2;4)

Задание 4.5

Кривая в полярной системе координат задана уравнением $\rho = \rho(\varphi)$: а) изобразите кривую по точкам, придавая φ значения из промежутка $[0; 2\pi)$ с шагом $\pi/8$; б) составьте уравнение этой кривой в декартовой прямоугольной системе координат, согласованной с полярной, и определите тип этой кривой.

$$1) \rho = \frac{2}{1 - \cos \varphi};$$

$$11) \rho = \frac{3}{2 + \sin \varphi};$$

$$21) \rho = \frac{4}{1 - 2 \sin \varphi};$$

$$2) \rho = \frac{5}{1 + \sin \varphi};$$

$$12) \rho = \frac{2}{3 - \cos \varphi};$$

$$22) \rho = \frac{1}{1 + 2 \cos \varphi};$$

$$3) \rho = \frac{2}{1 - 3 \sin \varphi};$$

$$13) \rho = \frac{1}{3 + \cos \varphi};$$

$$23) \rho = \frac{3}{1 - \sin \varphi};$$

$$4) \rho = \frac{1}{3 - 2 \cos \varphi};$$

$$14) \rho = \frac{2}{1 + \cos \varphi};$$

$$24) \rho = \frac{3}{4 - 2 \sin \varphi};$$

$$5) \rho = \frac{2}{2 + 3 \sin \varphi};$$

$$15) \rho = \frac{1}{4 + 3 \cos \varphi};$$

$$25) \rho = \frac{1}{2 - 2 \sin \varphi};$$

$$6) \rho = \frac{3}{4 - 3 \sin \varphi};$$

$$16) \rho = \frac{2}{3 + 3 \cos \varphi};$$

$$26) \rho = \frac{1}{1 - 3 \sin \varphi};$$

$$7) \rho = \frac{2}{2 - 3 \cos \varphi};$$

$$17) \rho = \frac{4}{3 - 3 \cos \varphi};$$

$$27) \rho = \frac{6}{3 + 2 \sin \varphi};$$

$$8) \rho = \frac{1}{3 + \sin \varphi};$$

$$18) \rho = \frac{8}{2 + 3 \cos \varphi};$$

$$28) \rho = \frac{6}{3 - 2 \cos \varphi};$$

$$9) \rho = \frac{2}{4 - \sin \varphi};$$

$$19) \rho = \frac{4}{1 + 4 \cos \varphi};$$

$$29) \rho = \frac{3}{3 - \sin \varphi};$$

$$10) \rho = \frac{5}{4 + 4 \cos \varphi};$$

$$20) \rho = \frac{6}{2 + 3 \sin \varphi};$$

$$30) \rho = \frac{4}{3 + 3 \sin \varphi};$$

У. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1. Производная. Правила дифференцирования

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 . Придадим значению переменной x в точке x_0 приращение Δx , при этом $f(x)$ получит приращение $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Если существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

то он называется производной функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$. Общеприняты и другие обозначения производной функции

$y = f(x)$: $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df}{dx}$; если же y зависит от значения переменной t (времени), то часто вместо y' пишут \dot{y} . Если вышеуказанный предел существует в каждой точке интервала (a, b) , то $f'(x)$ становится функцией, определённой на (a, b) .

Пример 1. Используя определение производной, найти производную функции $y = \sin(2x + 1)$.

Решение. Придадим значению переменной x приращение Δx , тогда функция y получит приращение

$$\begin{aligned} \Delta y &= f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(2(x + \Delta x) + 1) - \sin(2x + 1) = \\ &= 2 \sin \frac{2x + 2\Delta x + 1 - 2x - 1}{2} \cdot \cos \frac{2x + 2\Delta x + 1 + 2x + 1}{2} = \end{aligned}$$

$$= 2 \sin \Delta x \cos(2x + \Delta x + 1).$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \Delta x \cdot \cos(2x + \Delta x + 1)}{\Delta x} = \\ &= 2 \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \cos(2x + \Delta x + 1) = 2 \cdot 1 \cdot \cos(2x + 1) = 2 \cos(2x + 1). \end{aligned}$$

Таким образом, $(\sin(2x + 1))' = 2 \cos(2x + 1)$.

Процесс нахождения производной часто называют дифференцированием.

2. Таблица производных

(Здесь и ниже C – постоянная величина.)

$$(C)' = 0; \quad (\cos x)' = -\sin x;$$

$$(x^p)' = px^{p-1}; \quad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$(a^x)' = a^x \ln a; \quad (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a}; \quad (\arcsin x)' = -(\arccos x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$(\sin x)' = \cos x; \quad (\operatorname{arctg} x)' = -(\operatorname{arccot} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

3. Правила дифференцирования

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ имеют производные $f'(x)$ и $g'(x)$, то функции $C \cdot f(x)$, $f(x) + g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$ также имеют производные (последняя – при условии $g(x) \neq 0$), и при этом

$$(C f(x))' = C \cdot f'(x); \quad (f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x);$$

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x); \quad \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Теорема 1 (о производной сложной функции). Пусть функции $y = f(x)$, определённая в окрестности точки x_0 , и $z = g(y)$, определённая в окрестности точки $y_0 = f(x_0)$, обладают тем свойством, что существуют производные $f'(x_0)$ и $g'(y_0)$. Тогда функция $u(x) = g(f(x))$ имеет производную в точке x_0 и при этом

$$u'(x_0) = g'(y_0)f'(x_0).$$

Пример 2. Найти производные функций:

$$a) y = 3 \ln x + 5\sqrt{x} \cdot \cos x + e^3; \quad б) y = \frac{\operatorname{arctg} x}{x^3};$$

$$в) y = (2x^2 + x + 5)^4; \quad г) y = \left(\log_5 \operatorname{ctg} \frac{1-x^2}{1+x^2} \right)^4 + 3^{\arccos(x^2\sqrt{3-x})}.$$

Решение. а), б) Применяя правила дифференцирования, находим

$$\begin{aligned}
(3 \ln x + 5\sqrt{x} \cos x + e^3)' &= 3(\ln x)' + 5\left(x^{\frac{1}{2}} \cos x\right)' + (e^3)' = \\
&= 3 \frac{1}{x} + 5 \left[\left(x^{\frac{1}{2}}\right)' \cos x + x^{\frac{1}{2}} (\cos x)'\right] + 0 = \\
&= \frac{3}{x} + 5 \left[\frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} \cos x + x^{\frac{1}{2}} (-\sin x) \right] = \frac{3}{x} + \frac{5 \cos x}{2\sqrt{x}} - 5\sqrt{x} \cdot \sin x; \\
\left(\frac{\operatorname{arctg} x}{x^3}\right)' &= \frac{(\operatorname{arctg} x)' x^3 - (x^3)' \operatorname{arctg} x}{(x^3)^2} = \frac{\frac{x^3}{1+x^2} - 3x^2 \cdot \operatorname{arctg} x}{x^6} = \\
&= \frac{1}{x^3(1+x^2)} - \frac{3 \cdot \operatorname{arctg} x}{x^4}.
\end{aligned}$$

в), г) Применяя теорему о дифференцировании сложной функции, находим

$$\begin{aligned}
\left((2x^2 + x + 5)^4\right)' &= 4(2x^2 + x + 5)^{4-1} (2x^2 + x + 5)' = \\
&= 4(2x^2 + x + 5)^3 (4x + 1); \\
\left(\left(\log_5 \left(\operatorname{ctg} \frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right)^4 + 3^{\arccos(x^2\sqrt{3-x})}\right)' &= \left(\left(\log_5 \left(\operatorname{ctg} \frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right)^4\right)' + \\
&+ \left(3^{\arccos(x^2\sqrt{3-x})}\right)' = 4 \left(\log_5 \left(\operatorname{ctg} \frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\right)^3 \frac{1}{\ln 5 \cdot \operatorname{ctg} \frac{1-x^2}{1+x^2}} \left(-\frac{1}{\sin^2 \frac{1-x^2}{1+x^2}}\right) \times \\
&\times \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' + 3^{\arccos(x^2\sqrt{3-x})} \ln 3 \frac{-1}{\sqrt{1-x^4}(3-x)} \left(2x\sqrt{3-x} - x^2 \frac{1}{2\sqrt{3-x}}\right) = \\
&= \frac{16x}{(\ln 5)(1+x^2)^2} \left(\log_5 \operatorname{ctg} \frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^3 \operatorname{cosec} \frac{2-2x^2}{1+x^2} - 3^{\arccos(x^2\sqrt{3-x})} \ln 3 \times \\
&\times \frac{1}{\sqrt{1-3x^4+x^5}} \frac{12x-5x^2}{2\sqrt{3-x}}.
\end{aligned}$$

Пример 3. Показать, что функция $y = \sqrt{2 \ln \frac{1+e^x}{2} + 1}$ удовлетворяет уравнению

$$(1+e^x) \cdot y \cdot y' = e^x. \quad (1)$$

Решение. Найдём производную нашей функции

$$y' = \left(\left(2 \ln \frac{1+e^x}{2} + 1 \right)^{\frac{1}{2}} \right)' = \frac{1}{2} \left(2 \ln \frac{1+e^x}{2} + 1 \right)^{-\frac{1}{2}} \left(2 \ln \frac{1+e^x}{2} + 1 \right)' =$$

$$= \frac{1}{2 \sqrt{2 \ln \frac{1+e^x}{2} + 1}} \cdot \left(2 \cdot \frac{2}{1+e^x} \cdot \frac{e^x}{2} \right) = \frac{e^x}{(1+e^x) \sqrt{2 \ln \frac{1+e^x}{2} + 1}}.$$

Подставив это выражение в (1), получим

$$(1+e^x) \sqrt{2 \ln \frac{1+e^x}{2} + 1} \cdot \frac{e^x}{(1+e^x) \sqrt{2 \ln \frac{1+e^x}{2} + 1}} = e^x,$$

или $e^x = e^x$.

Это и доказывает, что наша функция удовлетворяет уравнению (1).

Для дифференцирования степенно-показательной (вида $(u(x))^{v(x)}$) и некоторых других функций удобно пользоваться так называемым логарифмическим дифференцированием.

Пример 4. Найти производные функций:

а) $y = (x+1)^{\arctg x}$; б) $y = \frac{x^{\sin x} \cdot \sqrt[3]{x-1} \cdot \cos^2 x}{(1+x^2) \sqrt{(x+2)^3}}$.

Решение. а) Предварительно прологарифмируем обе части равенства $y = (x+1)^{\arctg x}$, имеем

$$\ln y = (\arctg x) \ln(x+1).$$

Продифференцируем обе части последнего равенства, считая $\ln y$ сложной функцией от x :

$$\frac{1}{y} y' = \frac{1}{1+x^2} \ln(x+1) + \frac{\arctg x}{x+1};$$

отсюда находим

$$y' = y \left[\frac{\ln(x+1)}{1+x^2} + \frac{\operatorname{arctg}x}{x+1} \right].$$

Подставив $y = (x+1)^{\operatorname{arctg}x}$, наконец, получим

$$y' = (x+1)^{\operatorname{arctg}x} \left[\frac{\ln(x+1)}{1+x^2} + \frac{\operatorname{arctg}x}{x+1} \right].$$

б) действуя так же, находим

$$\begin{aligned} \ln y &= \sin x \cdot \ln x + \frac{1}{3} \ln(x-1) + 2 \ln|\cos x| - \ln(1+x^2) - \frac{3}{2} \ln|x+2|; \\ \frac{1}{y} \cdot y' &= \cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} + \frac{1}{3(x-1)} + \frac{2(-\sin x)}{\cos x} - \frac{2x}{1+x^2} - \frac{3}{2(x+2)}; \\ y' &= y \left[\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} + \frac{1}{3(x-1)} - 2 \operatorname{tg}x - \frac{2x}{1+x^2} - \frac{3}{2(x+2)} \right] = \\ &= \frac{x^{\sin x} \cdot \sqrt{x-1} \cdot \cos^2 x}{(1+x^2)\sqrt{(x+2)^3}} \left[\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} + \frac{1}{3(x-1)} - 2 \operatorname{tg}x - \frac{2x}{1+x^2} - \frac{3}{2(x+2)} \right]. \end{aligned}$$

4. Производные высших порядков

Производную от производной $f'(x)$ называют второй производной от функции $f(x)$ и обозначают $f''(x)$: $f''(x) = (f'(x))'$. Производную от $f''(x)$ называют третьей производной функции $f(x)$ и обозначают $f'''(x)$. Таким образом,

$$f''(x) = (f'(x))', \quad f'''(x) = (f''(x))', \quad \dots, \quad f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))', \quad \dots$$

Общепринятыми являются и другие обозначения производной n -го порядка функции $y = f(x)$: $\frac{d^n y}{dx^n}$ или $\frac{d^n f(x)}{dx^n}$. Если функция $f(x)$ зависит от переменного t (времени), то вторую и третью производные иногда обозначают \ddot{x} , $\ddot{\ddot{x}}$.

Пример 5. Найти y'' , y''' , если $y = \ln(\sin x)$.

Решение. $(\ln(\sin x))'' = \left((\ln(\sin x))' \right)' = \left(\frac{1}{\sin x} \cos x \right)' =$

$$= (\operatorname{ctgx})' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

$$\begin{aligned} (\ln(\sin x))''' &= \left((\ln(\sin x))'' \right)' = \left(-\frac{1}{\sin^2 x} \right)' = -\left((\sin x)^{-2} \right)' = \\ &= -(-2)(\sin x)^{-3} \cos x = \frac{2 \cos x}{\sin^3 x}. \end{aligned}$$

5. Дифференцирование функций, заданных неявно или параметрически

Говорят, что уравнение

$$F(x, y) = 0 \quad (2)$$

неявно задаёт функцию $y = f(x)$ в интервале (a, b) , если для любого $x_0 \in (a, b)$ уравнение $F(x_0, y) = 0$ имеет единственное решение $y_0 = f(x_0)$.

Для нахождения производной функции $y = f(x)$, заданной неявно уравнением (2), следует продифференцировать обе части равенства (2), считая y функцией от x ; затем полученное уравнение, в которое будут входить x , y и y' , следует разрешить относительно y' . Для нахождения y'' равенство (2) дифференцируется дважды, в результате чего получается уравнение, содержащее x , y , y' , y'' , которое следует разрешить относительно y'' , затем вместо y' подставить функцию от x и y , найденную указанным выше способом.

Пример 6. Найти значения $y'(0)$, $y''(0)$, если функция y задана неявно уравнением

$$e^y + xy = e. \quad (3)$$

Решение. Считая y функцией от x , продифференцируем обе части равенства (3): $(e^y + xy)' = (e)'$;

$$(e^y)' + (xy)' = 0; \quad e^y \cdot y' + y + xy' = 0. \quad (4)$$

Отсюда находим

$$y' = -\frac{y}{x + e^y}; \quad (5)$$

$$y'(0) = -\frac{y(0)}{0 + e^{y(0)}} = -\frac{y(0)}{e^{y(0)}}.$$

Для нахождения $y(0)$ в равенстве (3) положим $x = 0$:

$$e^{y(0)} + 0 \cdot y(0) = e; \quad e^{y(0)} = e; \quad y(0) = 1.$$

Таким образом,

$$y'(0) = -\frac{1}{e}.$$

Найдём y'' , для чего продифференцируем равенство (4):

$$y''e^y + y'e^y \cdot y' + y' + y' + xy'' = 0;$$

$$y''(e^y + x) = -y'(y' \cdot e^y + 2);$$

$$y'' = -\frac{y'(e^y \cdot y' + 2)}{e^y + x}.$$

Подставив в последнем равенстве вместо y' выражение (5), получим

$$y'' = \frac{y(2x + 2e^y - ye^y)}{(x + e^y)^3},$$

откуда находим

$$y''(0) = \frac{y(0)(2 \cdot 0 + 2e^{y(0)} - y(0)e^{y(0)})}{(0 + e^{y(0)})^3} = \frac{1}{e^2}.$$

Если функция $y = y(x)$ задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t \in (\alpha; \beta), \end{cases}$$

то при условии существования производных $x'(t)$, $y'(t)$ и $x'(t) \neq 0$ существует производная y'_x и при этом

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Вторая производная y''_{xx} находится по формуле

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{(y'_t/x'_t)'_t}{x'_t},$$

или (что то же самое)

$$y''_{xx} = \frac{y''_t x'_t - x''_t y'_t}{(x'_t)^3}.$$

Пример 7. Найти y'_x , y''_{xx} , если

$$\begin{cases} x = \sqrt{1-t^2}, \\ y = 1/t, \quad t \in (-1; 0) \cup (0; 1). \end{cases}$$

Решение. Имеем:

$$x'_t = (\sqrt{1-t^2})' = \frac{1}{2\sqrt{1-t^2}} (-2t) = -\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}; \quad y'_t = \left(\frac{1}{t}\right)' = -\frac{1}{t^2};$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = -\frac{1}{t^2} : \left(-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right) = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t^3};$$

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \left(\frac{\sqrt{1-t^2}}{t^3}\right)' : \left(-\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\right) = -\frac{\sqrt{1-t^2}}{t} \times$$

$$\times \frac{\frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}} \cdot t^3 - \sqrt{1-t^2} \cdot 3t^2}{(t^3)^2} = \frac{\sqrt{1-t^2}}{t^7} \frac{t^4 + 3t^2(1-t^2)}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{3-2t^2}{t^5}.$$

6. Уравнения касательной и нормали

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке

$M(x_0, y_0)$ на графике имеет вид

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0),$$

а уравнение нормали в той же точке $y = y_0 - \frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$,

где $y_0 = f(x_0)$.

Пример 8. Найти площадь треугольника, образованного прямой $y = y_0 + 1$, касательной и нормалью, проведёнными к графику функции $y = x^3 + 2x^2 - x + 1$ в точке с абсциссой $x_0 = 1$ и ординатой y_0 .

Решение. Найдём ординату y_0 точки касания и $y'(x_0) = y'(1)$:

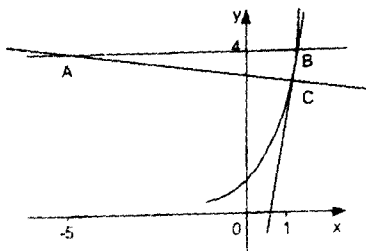
$$y_0 = y(1) = 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 1 + 1 = 3;$$

$$y'(x) = 3x^2 + 4x - 1; \quad y'(1) = 6.$$

Уравнением касательной является $y = 3 + 6(x - 1)$ или $6x - y - 3 = 0$.

Уравнение нормали имеет вид $y = 3 - \frac{1}{6}(x - 1)$ или $x + 6y - 19 = 0$.

Найдём координаты точек А и В (см. рисунок).



$$\begin{cases} y = 4, \\ x + 6y - 19 = 0, \end{cases} \quad A(-5; 4);$$

$$\begin{cases} y = 4, \\ 6x - y - 3 = 0, \end{cases} \quad B\left(\frac{7}{6}; 4\right).$$

Вычислим длины катетов AC и BC прямоугольного треугольника ABC:

$$|AC| = \sqrt{(-5-1)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{37},$$

$$|BC| = \sqrt{\left(\frac{7}{6}-1\right)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{37/36} = \sqrt{37}/6.$$

По этим данным найдём искомую площадь

$$S = \frac{1}{2}|AC| \cdot |BC| = 37/12.$$

7. Дифференциал первого порядка

Придадим аргументу x в точке x_0 приращение Δx , функция $y = f(x)$ получит приращение $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$. Если существует число A , такое, что

$$\Delta f = A \cdot \Delta x + o(\Delta x), \quad (6)$$

то говорят, что $f(x)$ дифференцируемая в точке x_0 ; линейная часть $A \cdot \Delta x$ приращения функции называется дифференциалом функции в точке x_0 и обозначается $df(x_0; \Delta x)$ или $dy(x_0; \Delta x)$ (или просто df , dy). Если x — независимое переменное (т.е. не зависит от других переменных), то полагают $dx = \Delta x$.

Теорема 2. Функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 в том и только в том случае, если $f(x)$ имеет производную в этой точке. При этом $df = f'(x_0)dx$.

Если в равенстве (6) отбросить бесконечно малую величину $o(\Delta x)$, то получим приближённое равенство

$$\Delta f \approx df,$$

которое применяется для нахождения приближённого значения функции.

Пример 9. Найти приближённое значение $\sqrt{15,75}$.

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x}$. Положим $x_0 = 16$; тогда $\Delta x = 15,75 - 16 = -1/4$. Имеем

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + df;$$

$$f(x_0) = \sqrt{16} = 4; \quad df = f'(x_0)dx, \quad dx = \Delta x = -1/4,$$

$$f'(x) = (x^{1/2})' = 1/(2\sqrt{x}); \quad f'(x_0) = 1/(2\sqrt{16}) = 1/8.$$

$$\text{Отсюда находим } df = \frac{1}{8} \left(-\frac{1}{4} \right) = -1/32,$$

$$\sqrt{15,75} \approx 4 - 1/32 = 127/32 = 3,96875 \approx 3,97.$$

8. Дифференциалы высших порядков. Формула Тейлора

Дифференциалом второго порядка $d^2f(x)$ функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала $df(x; \Delta x)$, где $df(x; \Delta x)$ рассматривается как функция от x : $d^2f = d(df)$. Дифференциалом третьего порядка d^3f называется дифференциал от второго дифференциала: $d^3f = d(d^2f)$ и т.д.

Если переменная x является независимой, то $d^2x = d^3x = \dots = 0$. В этом случае $d^2f = f''(x)(dx)^2$, $d^3f = f'''(x)(dx)^3$, ..., $d^n f = f^{(n)}(x)(dx)^n$, ... Для краткости вместо $(dx)^n$ принято писать dx^n ; с учётом этого $d^n f = f^{(n)}(x)dx^n$.

Если функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и в этой окрестности имеет производные до $(n+1)$ -го порядка включительно (т.е. дифференцируема $(n+1)$ раз), то справедлива формула Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_{n+1}(x),$$

где $R_{n+1}(x)$ — остаточный член, являющийся бесконечно малой величиной при $x \rightarrow x_0$. Остаточный член обычно записывают в виде

$$R_{n+1}(x) = o((x-x_0)^n),$$

в форме Пеано или в форме Лагранжа

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1},$$

где c – некоторое число между x_0 и x . Формула Тейлора допускает и другую запись через дифференциалы

$$\Delta f = \frac{df}{1!} + \frac{d^2f}{2!} + \frac{d^3f}{3!} + \dots + \frac{d^n f}{n!} + R_{n+1}(x).$$

Формулу Тейлора применяют для приближенных вычислений.

Пример 10. С помощью формулы Тейлора найти приближённое значение $\sin 1$ с точностью до 0,001.

Решение. Введём в рассмотрение функцию $f(x) = \sin(x)$. Положив $x_0 = 0$, получим

$$f(1) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} + \frac{f''(0)}{2!} + \frac{f'''(0)}{3!} + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!},$$

где $0 < c < 1$ (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа).

$$\text{Имеем } f(0) = \sin 0 = 0, \quad f'(0) = \cos 0 = 1, \quad f''(0) = -\sin 0 = 0,$$

$$f'''(0) = -\cos 0 = -1, \quad f^{IV}(0) = \sin 0 = 0, \quad \dots, \quad |R_{n+1}| = \left| \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \right| \leq \frac{1}{(n+1)!}.$$

Для вычисления требуемого значения нужно взять n таким, чтобы $|R_{n+1}| < 0,001$, или

$$\frac{1}{(n+1)!} < \frac{1}{1000}; \quad (n+1)! > 1000.$$

Это неравенство достигается при $n = 6$, так как $7! = 5040 > 1000$. Поэтому

$$\sin 1 \approx 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} = \frac{101}{120} \approx 0,8417 \approx 0,842.$$

9. Раскрытие неопределённостей по правилу Лопиталья

Теорема 3. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в каждой точке некоторой окрестности точки x_0 , кроме, может быть, самой точки x_0 , и пусть $g'(x) \neq 0$. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ или $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$ и существует

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \text{ то } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Эта теорема, называемая правилом Лопиталья, применяется для раскрытия неопределённостей вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Неопределённости вида $0 \cdot \infty$ или $\infty - \infty$ несложным алгебраическим преобразованием приводятся к неопределённостям вида $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Неопределённости вида 1^∞ , ∞^0 , 0^0 приводятся к неопределённости вида $0 \cdot \infty$ с помощью предварительного логарифмирования или тождества $(f(x))^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$.

Пример 11. Применяя правило Лопиталья, найти пределы:

а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1 + \ln x}{e^x - e}$; б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x}$; в) $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^x$; г) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x}$;

д) $\lim_{x \rightarrow 0+0} (\operatorname{ctg} x + \ln x)$.

Решение. а) *Первый способ.* При $x \rightarrow 1$ числитель и знаменатель стремятся к 0, поэтому имеем неопределённость вида $\frac{0}{0}$. Воспользуемся правилом Лопиталья:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1 + \ln x}{e^x - e} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^3 - 1 + \ln x)'}{(e^x - e)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 1/x}{e^x} = \frac{3+1}{e} = \frac{4}{e}.$$

Второй способ. Неопределённость можно раскрыть и с помощью формулы Тейлора. Обозначим $f(x) = x^3 - 1 + \ln x$, $g(x) = e^x - e$. Эти функции определены и дифференцируемы в окрестности точки $x_0 = 1$. Имеем $f(x_0) = 1^3 - 1 + \ln 1 = 0$, $f'(x) = 3x^2 + 1/x$, $f'(x_0) = 3 + 1 = 4$, $g(x_0) = e - e = 0$, $g'(x) = e^x$, $g'(x_0) = e$. Согласно формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано, имеем

$$f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + o_1(x-1),$$

или

$$f(x) = 4(x-1) + o_1(x-1), \quad g(x) = e(x-1) + o_2(x-1).$$

Поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4(x-1) + o_1(x-1)}{e(x-1) + o_2(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) \left(4 + \frac{o_1(x-1)}{x-1} \right)}{(x-1) \left(e + \frac{o_2(x-1)}{x-1} \right)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 + \frac{o_1(x-1)}{x-1}}{e + \frac{o_2(x-1)}{x-1}} = \frac{4}{e}.$$

б) Имеем неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$. В данном случае приходится трижды применять правило Лопитала:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^3)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x^2)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x}{e^x} =$$

$$= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(6x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{e^x} = 0.$$

в) Имеем неопределённость вида 0^0 . Обозначим $y = x^x$. Тогда $\ln y = x \ln x$,

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0+0} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = - \lim_{x \rightarrow 0+0} x = 0.$$

Таким образом, $\lim_{x \rightarrow 0+0} \ln y = 0$, откуда, ввиду непрерывности логарифмической функции, $\lim_{x \rightarrow 0+0} y = 1$, т. е. $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^x = 1$.

г) Воспользуемся тождеством $(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x} = e^{\operatorname{ctg} x \cdot \ln \operatorname{tg} x}$, $0 < x < \pi/2$. Ввиду непрерывности показательной функции, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{ctg} x} = e^{\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\operatorname{ctg} x \cdot \ln \operatorname{tg} x)}$

Найдём $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\operatorname{ctgx} \cdot \ln \operatorname{tgx})$:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\operatorname{ctgx} \cdot \ln \operatorname{tgx}) = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \frac{\ln \operatorname{tgx}}{\operatorname{tgx}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{обозначим } \operatorname{tgx} = t, \\ t \rightarrow +\infty \text{ при} \\ x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0 \end{array} \right] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\ln t)'}{(t)'} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1/t}{1} = 0.$$

Итак, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} (\operatorname{tgx})^{\operatorname{ctgx}} = e^0 = 1$.

д) Имеем неопределённость вида $\infty - \infty$. Переведём эту неопределённость в неопределённость вида $\frac{\infty}{\infty}$ и затем воспользуемся правилом Лопиталья:

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} (\operatorname{ctgx} + \ln x) = [\infty - \infty] = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\cos x + \sin x \cdot \ln x}{\sin x}.$$

А так как

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \sin x \cdot \ln x = [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{\sin x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1/x}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}} = - \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\sin^2 x}{x \cos x} = \left[\frac{0}{0} \right] =$$

$$= - \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{(\sin^2 x)'}{(x \cos x)'} = - \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{\cos x - x \sin x} = \frac{0}{1} = 0,$$

$$\text{то } \lim_{x \rightarrow 0+0} (\operatorname{ctgx} + \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\cos x + \sin x \cdot \ln x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1+0}{\sin x} = +\infty.$$

Задание 5.1

Используя определение производной, найдите производную функции.

$$1) y = x \sin(2x + 3);$$

$$16) y = (x + 3) \ln x;$$

$$2) y = (4x - 1) \ln(2x);$$

$$17) y = \frac{\cos(2x - 1)}{3x + 2};$$

$$3) y = \cos(2x^2 + x + 1);$$

$$18) y = 4x e^{3x};$$

$$4) y = \frac{\cos(3x + 4)}{x - 2};$$

$$19) y = e^{4x} \sin 2x;$$

$$5) y = x e^{3x};$$

$$20) y = \frac{\ln 2x}{x - 4};$$

$$6) y = e^x \sin 3x;$$

$$21) y = (2x^2 - x + 2) \sin x;$$

$$7) y = \frac{\ln x}{4x + 3};$$

$$22) y = x \cos(3x - 1);$$

$$8) y = (x^2 + 3x + 1) \sin x;$$

$$23) y = \frac{\sin(2x + 3)}{x - 4};$$

$$9) y = \cos(x^2 - x + 2);$$

$$24) y = e^{3x} \cos x;$$

$$10) y = 3x \cos(x + 4);$$

$$25) y = (3x^2 + x + 1) \cos x;$$

$$11) y = \frac{\sin(x - 1)}{2x + 3};$$

$$26) y = (x^2 - 2x + 3);$$

$$12) y = e^{2x} \cos 4x;$$

$$27) y = x \sin(4x + 3);$$

$$13) y = (x^2 - x + 2) \cos x;$$

$$28) y = (3x - 1) \ln 2x;$$

$$14) y = \sin(x^2 + 3x + 2);$$

$$29) y = \frac{\cos(x + 1)}{2x + 1};$$

$$15) y = 4x \sin(x - 2);$$

$$30) y = 2x e^{4x}.$$

Задание 5.2

Найдите производную первого порядка от функции.

- 1) $y = \operatorname{arctg}^5 x - \frac{\log_3^4 x}{4^{2x}};$
- 2) $y = 2^{\operatorname{arctg} x} + \frac{\operatorname{ctg}^4(x)}{\sin \frac{4}{x}};$
- 3) $y = \frac{3^{\operatorname{ctg} x} - \cos 2x}{\log_4 x};$
- 4) $y = e^{\arccos x} + \operatorname{ctg}(x \cdot 4^x) + 1;$
- 5) $y = \arcsin^2(3x) + \frac{x}{\operatorname{ctg}(\sqrt[3]{x})};$
- 6) $y = \frac{5^{\cos 3x}}{x + \arccos\left(\frac{4}{x}\right)};$
- 7) $y = \ln^2(3x) + x \cdot \arcsin(\sqrt{x});$
- 8) $y = \frac{\sqrt{x}}{\arcsin(6x) + \log_4^3 x};$
- 9) $y = \ln \frac{1 + \sqrt{x}}{x} + e^{\sin x} \cdot \operatorname{arctg}(3x);$
- 10) $y = \frac{\operatorname{ctg} 5x + x}{\ln x} + x^2 \cdot 3^{\arcsin x};$
- 11) $y = \operatorname{arctg}^3 x + \frac{x^2}{e^{x^2}};$
- 12) $y = \arcsin^2(4x) + \frac{5^{x^4}}{x};$
- 13) $y = (\operatorname{arctg} x)^3 + \frac{\sqrt{x}}{\ln(x^2 + 1)};$
- 14) $y = x \cdot \operatorname{ctg}^3 x + \ln \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1};$
- 15) $y = \operatorname{arctg}^5(6x) + \frac{2^x}{\ln x};$
- 16) $y = \frac{\sqrt{\cos x}}{3^x} + \log_3^2 x;$
- 17) $y = \frac{1 - e^x}{1 + e^x} \cdot \operatorname{arctg} 2x + \ln(x^3 + 1);$
- 18) $y = \log_3^3 x + \frac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x}};$
- 19) $y = \frac{\arcsin(2x - 1)}{x} + (2x - 1)^4 \cdot e^{x^3};$
- 20) $y = (1 + 4x^2)e^{2x} + \frac{\sqrt{\sin x}}{x};$
- 21) $y = \frac{x}{\operatorname{arctg} \sqrt{x}} + \sqrt[4]{\log_5 x};$
- 22) $y = (\sin 4x) \ln \cos x + \sqrt{\operatorname{arctg} 3x};$
- 23) $y = \arccos^3 x + \sqrt[3]{x^2} \cdot \ln x;$
- 24) $y = \log_3^2 x - e^{2x} \cdot \operatorname{arctg} x;$
- 25) $y = \ln \cos x + \sqrt{x} \cdot 4^x;$
- 26) $y = \frac{(\operatorname{arctg} 5x)}{x^2} - \ln^3 x;$

$$27) y = 3^{\arccos 2x} + \frac{x^2}{\cos 3x};$$

$$29) y = \frac{2^{x^2}}{\operatorname{arctg} 3x} - \sqrt{\ln 6x};$$

$$28) y = \arcsin^4 3x + \frac{10^{x^2}}{x};$$

$$30) y = \frac{x^2}{\ln x} + \arccos^3 2x.$$

Задание 5.3

Найдите производную первого порядка от функции.

$$1) y = \operatorname{arctg}^5 \left(\frac{1-2x}{3+x^3} \right) - \log_3^4 \left(\arcsin \frac{1}{x} \right) 4^{\sqrt{1-2x^2}};$$

$$2) y = 2^{\operatorname{arctg} \left(\frac{x}{\cos x} \right)} + \operatorname{ctg} \sqrt[4]{(1-x^2)^3} \sin \frac{4}{\sqrt{x}};$$

$$3) y = \frac{3^{\operatorname{ctg} \sqrt{1-x}} - \cos(1-x^2)}{\log_4 \operatorname{ch} \frac{x}{2}} + \arcsin^2 \left(e^{2x} \sqrt[3]{x^2} \right);$$

$$4) y = e^{\arccos^3 \left(\frac{x^2}{1-2x} \right)} + \operatorname{ctg} \left(4^{x^3} \cdot \sqrt{x + \sqrt{x}} \right) + \sin^3 \cos 2;$$

$$5) y = \arcsin^2 \left(x \cdot 5^{\sqrt{2-2x}} \right) + \operatorname{ctg} \left(\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}} \right);$$

$$6) y = 5^{\cos^2 3x} \left(x^3 + 4 \right)^3 + \frac{\sqrt{x^4 + 2x}}{x} + \arccos \frac{3}{2x-1};$$

$$7) y = \ln^2 \left(e^{3x} + \sqrt{e^{6x} - 1} \right) + \arcsin^3 \left(\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{5x}} \right);$$

$$8) y = \arcsin \left(\frac{x\sqrt{2}}{1+x} \right) \sqrt{1+2x-x^2} + \log_3^3 \operatorname{ctg} \frac{1}{x\sqrt{x}};$$

$$9) y = \ln \frac{1 + \sqrt{2x-x^2}}{x-1} + \operatorname{arctg} \left(\frac{1}{x} \right) e^{\sin^3 x};$$

$$10) y = \frac{\operatorname{ctg} 5x + x}{1 - x \operatorname{ctg} 5x} + 3^{\arcsin^3 \frac{1}{2x+3}} + \cos \left(\sqrt[3]{\operatorname{ctg} 2} \right);$$

$$11) y = \operatorname{arctg}^3 \frac{\cos x}{\sqrt{\cos 2x}} + e^{x^3 \sqrt[4]{1-x^2}} + \ln \cos \frac{1}{3};$$

$$12) y = \arcsin^2 \frac{3 + \operatorname{ch} x}{1 + 3 \operatorname{ch} x} + 5^{x^4 \operatorname{ctg} \frac{1}{x^3}};$$

$$13) y = \left(\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1-x}}{1-\sqrt{x}} \right)^3 + \ln(x + \sqrt{1+x^2});$$

$$14) y = 3^{\arccos^3 \frac{x}{1-2x}} + (3x^3 + 1) \cos \frac{3}{\sqrt[3]{x^2}};$$

$$15) y = \arcsin^4 \sqrt{\frac{x}{x+1}} + 10^{x \operatorname{tg} x^2};$$

$$16) y = \operatorname{ctg}^3(x \cdot 2^{\sqrt{1-x}}) + \ln \sqrt[3]{\frac{x^2+1}{x^2-1}};$$

$$17) y = \left(\operatorname{arctg} \sqrt{x^2-1} \right)^5 + 2^{\frac{x}{\ln x}} + \cos \ln 2;$$

$$18) y = \sqrt{\cos x} \cdot 3^{\sqrt{\cos x}} + \log_3^2 \sin \frac{e^3 + e^{-3x}}{2};$$

$$19) y = \frac{1-e^{2x}}{1+e^{2x}} \operatorname{arctg} e^{-x} + \ln^3(\cos^2 x + \sqrt{1+\cos^2 x});$$

$$20) y = \log_3^3 \operatorname{arctg} \sqrt{1+x^2} + \sqrt{x} e^{\frac{x}{2}} + \ln \sin \frac{1}{2};$$

$$21) y = \arcsin \left(\frac{1}{2x-1} \right) (2x-1)^4 + e^{\operatorname{ctg}^2 3x^3} + \sqrt{\operatorname{ctg} 4};$$

$$22) y = (1+4x^2) e^{\operatorname{arctg} 2x} + \sqrt[4]{(1+\sin^2 2x)^3};$$

$$23) y = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{2 \operatorname{tg} x}}{1-\operatorname{tg} x} + \sqrt[5]{\log_5^7(x^4-2x)};$$

$$24) y = \ln \frac{\sin x}{\cos x + \sqrt{\cos 2x}} + \sqrt{\operatorname{arctg} \frac{2}{x}} + \operatorname{ctg}^3 \sqrt{5};$$

$$25) y = \arccos^3 \frac{x^2-4}{\sqrt{x^4+16}} + \ln(2^{3-x^3} + \sqrt{6x});$$

$$26) y = \log_3^2 \left(\frac{\ln x}{\sin \frac{1}{x}} \right) + \frac{2}{3} \sqrt{(\operatorname{arctg} e^{2x})^3};$$

$$27) y = \ln^3 \cos \frac{2x+4}{5x+1} + 4^{\operatorname{arctg} \sqrt{x}} + \cos \sqrt[3]{\operatorname{tg} 2};$$

$$28) y = \operatorname{arctg} \left(\frac{5x}{3} - x^3 \sin \frac{1}{x^2} \right) + \log_3^3 (x + \cos 3x);$$

$$29) y = \operatorname{ctg}^3 \left(2^{x^2} \cdot \cos \frac{1}{3x} \right) + \ln \operatorname{arcsin} \sqrt{1 - e^{2x}};$$

$$30) y = \sqrt{1 + \ln \left(1 + x^2 \cos \frac{1}{x} \right)^2} + \left(\arccos \sqrt{1 - e^{4x}} \right)^3.$$

Задание 5.4

Найдите дифференциал dy .

$$1) y = x \operatorname{arcsin}(1/x) + \ln|x + \sqrt{x^2 - 1}|, x > 0;$$

$$2) y = \operatorname{tg} \left(2 \arccos \sqrt{1 - 2x^2} \right), x > 0;$$

$$3) y = \sqrt{1 + 2x} - \ln(x + \sqrt{1 + 2x});$$

$$4) y = x^2 \operatorname{arctg} \sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 1};$$

$$5) y = \arccos \left(1/\sqrt{1 + 2x^2} \right), x > 0;$$

$$6) y = x \ln|x + \sqrt{x^2 + 3}| - \sqrt{x^2 + 3};$$

$$7) y = \operatorname{arctg}(\operatorname{sh} x) + (\operatorname{sh} x) \ln \operatorname{ch} x;$$

$$8) y = \arccos \left((x^2 - 1)/(x^2 \sqrt{2}) \right);$$

$$9) y = \ln \left(\cos^2 x + \sqrt{1 + \cos^4 x} \right);$$

$$10) y = \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) - \sqrt{1 + x^2} \operatorname{arctg} x;$$

$$11) y = \frac{\ln|x|}{1 + x^2} - \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{1 + x^2};$$

$$12) y = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}) + \operatorname{arcsin} e^{-x};$$

$$13) y = x\sqrt{4 - x^2} + 4 \operatorname{arcsin}(x/2);$$

$$14) y = \ln \operatorname{tg}(x/2) - x/\sin x;$$

$$15) y = 2x + \ln|\sin x + 2 \cos x|;$$

$$16) y = \sqrt{\operatorname{ctg} x} - \sqrt{\operatorname{tg}^3 x} / 3;$$

$$17) y = \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{2x} \right|;$$

$$18) y = \sqrt[3]{\frac{x+2}{x-2}};$$

$$19) y = \operatorname{arctg} \frac{x^2 - 1}{x};$$

$$20) y = \ln |x^2 - 1| - \frac{1}{x^2 - 1};$$

$$21) y = \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1 \right);$$

$$22) y = \ln |2x + 2\sqrt{x^2 + x} + 1|;$$

$$23) y = \ln |\cos \sqrt{x}| + \sqrt{x} \operatorname{tg} \sqrt{x};$$

$$24) y = e^x (\cos 2x + 2 \sin 2x);$$

$$25) y = x (\sin \ln x - \cos \ln x);$$

$$26) y = \left(\sqrt{x-1} - \frac{1}{2} \right) e^{2\sqrt{x-1}};$$

$$27) y = \cos x \cdot \ln \operatorname{tg} x - \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2};$$

$$28) y = \sqrt{3+x^2} - x \ln |x + \sqrt{3+x^2}|;$$

$$29) y = \sqrt{x} - (1+x) \operatorname{arctg} \sqrt{x};$$

$$30) y = x \operatorname{arctg} x - \ln \sqrt{1+x^2}.$$

Задание 5.5

Найдите производную y' .

$$1) y = \frac{2(3x^3 + 4x^2 - x - 2)}{15\sqrt{1+x}};$$

$$3) y = \frac{\sqrt{x-1}(3x+2)}{4x^2};$$

$$2) y = \frac{(2x^2 - 1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3};$$

$$4) y = \frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3x^3};$$

$$5) y = \frac{x^4 - 8x^2}{2(x^2 - 4)};$$

$$6) y = \frac{2x^2 - x - 1}{3\sqrt{2+4x}};$$

$$7) y = \frac{(1+x^8)\sqrt{1+x^8}}{12x^{12}};$$

$$8) y = \frac{x^2}{2\sqrt{1-3x^4}};$$

$$9) y = \frac{(x^2 - 6)\sqrt{(4+x^2)^3}}{120x^5};$$

$$10) y = \frac{(x^2 - 8)\sqrt{x^2 - 8}}{6x^3};$$

$$11) y = \frac{4+3x^3}{x^3\sqrt{(2+x^3)^2}};$$

$$12) y = \sqrt[3]{\frac{(1+x^{3/4})^2}{x^{3/2}}};$$

$$13) y = \frac{x^6 + x^3 - 2}{\sqrt{1-x^3}};$$

$$14) y = \frac{(x^2 - 2)\sqrt{4+x^2}}{24x^3};$$

$$15) y = \frac{1+x^2}{2\sqrt{1+2x^2}};$$

$$16) y = (x\sqrt{x+1})/(x^2+x+1);$$

$$17) y = (x^2+2)/(2\sqrt{1-x^4});$$

$$18) y = \frac{128-8x^3-x^6}{\sqrt{8-x^3}};$$

$$19) y = \frac{\sqrt{2x+3}(x-2)}{x^2};$$

$$20) y = (1-x^2)^5 \sqrt[5]{x^3 + \frac{1}{x}};$$

$$21) y = \frac{(2x^2+3)\sqrt{x^2-3}}{9x^3};$$

$$22) y = \frac{x-1}{(x^2+5)\sqrt{x^2+5}};$$

$$23) y = \frac{(2x+1)\sqrt{x^2-x}}{x^2};$$

$$24) y = 2\sqrt{\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}};$$

$$25) y = \frac{1}{(x+2)\sqrt{x^2+4x+5}};$$

$$26) y = 3\sqrt[3]{\frac{x^2+x+1}{x+1}};$$

$$27) y = 3\sqrt[3]{(x+1)/(x-1)^2};$$

$$28) y = (x+7)/(6\sqrt{x^2+2x+7});$$

$$29) y = ((x+3)\sqrt{2x-1})/(2x+7);$$

$$30) y = (3x+\sqrt{x})/(\sqrt{x^2+2}).$$

Задание 5.6

Найдите производную y' .

$$1) y = x - \ln(2 + e^x + 2\sqrt{e^{2x} + e^x + 1});$$

- 2) $y = e^{2x} (2 - \sin 2x - \cos 2x) / 8;$
- 3) $y = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{e^x - 3}{2};$
- 4) $y = \frac{1}{\ln 4} \ln \frac{1 + 2^x}{1 - 2^x};$
- 5) $y = 2\sqrt{e^x + 1} + \ln \frac{\sqrt{e^x + 1} - 1}{\sqrt{e^x + 1} + 1};$
- 6) $y = \frac{2}{3} \sqrt{(\operatorname{arctg} e^x)^3};$
- 7) $y = \frac{1}{2} \ln(e^{2x} + 1) - 2 \operatorname{arctg} e^x;$
- 8) $y = \ln(e^x + 1) + \frac{18e^{2x} + 27e^x + 11}{6(e^x + 1)^3};$
- 9) $y = 2(\sqrt{2^x - 1} - \operatorname{arctg} \sqrt{2^x - 1}) / \ln 2;$
- 10) $y = 2(x - 2)\sqrt{1 + e^x} - 2 \ln \left(\frac{(\sqrt{1 + e^x} - 1)}{(\sqrt{1 + e^x} + 1)} \right);$
- 11) $y = e^{\alpha x} (\alpha \sin \beta x - \beta \cos \beta x) / (\alpha^2 + \beta^2);$
- 12) $y = e^{\alpha x} (\beta \sin \beta x + \alpha \cos \beta x) / (\alpha^2 + \beta^2);$
- 13) $y = e^{\alpha x} \left[\frac{1}{2a} + \frac{a \cos 2bx + 2b \sin 2bx}{2(a^2 + 4b^2)} \right];$
- 14) $y = x + 1/(1 + e^x) - \ln(1 + e^x);$
- 15) $y = x - 3 \ln \left[(1 + e^{x/6}) \sqrt{1 + e^{x/3}} \right] - 3 \operatorname{arctg} e^{x/6};$
- 16) $y = x + \frac{8}{1 + e^{x/4}};$
- 17) $y = \ln(e^x + \sqrt{e^{2x} - 1}) + \arcsin e^{-x};$
- 18) $y = x - e^{-x} \arcsin e^x - \ln(1 + \sqrt{1 - e^{2x}});$
- 19) $y = x - \ln(1 + e^x) - 2e^{-x/2} \operatorname{arctg} e^{x/2} - (\operatorname{arctg} e^{x/2})^2;$
- 20) $y = \frac{e^{x^3}}{1 + x^3};$

$$21) y = \frac{1}{m\sqrt{ab}} \operatorname{arctg} \left(e^{mx} \sqrt{\frac{a}{b}} \right);$$

$$22) y = 3e^{\sqrt{x}} \left(\sqrt[3]{x^2} - 2\sqrt{x} + 2 \right);$$

$$23) y = \ln \frac{\sqrt{1+e^x+e^{2x}} - e^x - 1}{\sqrt{1+e^x+e^{2x}} - e^x + 1};$$

$$24) y = e^{mx} \left(x - \frac{1}{\cos x} \right);$$

$$25) y = \frac{e^x}{2} \left[(x^2 - 1) \cos x + (x - 1)^2 \sin x \right];$$

$$26) y = \operatorname{arctg} (e^x - e^{-x});$$

$$27) y = 3e^{\sqrt{x}} \left[\sqrt[3]{x^5} - 5\sqrt[3]{x^4} + 20x - 60\sqrt[3]{x^2} + 120\sqrt[3]{x} - 120 \right];$$

$$28) y = -e^{3x} / (3\operatorname{sh}^3 x);$$

$$29) y = \arcsin e^x - \sqrt{1 - e^{2x}};$$

$$30) y = -\frac{1}{2} e^{-x^2} (x^4 + 2x^2 + 2).$$

Задание 5.7

Найдите производную y' .

$$1) y = \frac{1 \sin^2 3x}{3 \cos 6x};$$

$$7) y = \frac{\sin^2 15x}{15 \cos 30x};$$

$$2) y = -\frac{1 \cos^2 3x}{3 \sin 6x};$$

$$9) y = \frac{\cos^2 16x}{32 \sin 32x};$$

$$3) y = \frac{1 \sin^2 4x}{4 \cos 8x};$$

$$10) y = \frac{\sin^2 17x}{17 \cos 34x};$$

$$4) y = -\frac{1 \cos^2 4x}{8 \sin 8x};$$

$$11) y = \frac{\cos^2 18x}{36 \sin 36x};$$

$$5) y = \frac{\sin^2 2x}{2 \cos 4x};$$

$$12) y = \frac{\sin^2 19x}{19 \cos 38x};$$

$$6) y = \frac{\cos^2 2x}{4 \sin 4x};$$

$$13) y = -\frac{1 \cos^2 20x}{40 \sin 40x};$$

$$7) y = \frac{\sin^2 7x}{7 \cos 14x};$$

$$14) y = \frac{\sin^2 21x}{21 \cos 42x};$$

$$\begin{array}{ll}
 15) y = -\frac{1 \cos^2 8x}{16 \sin 16x}; & 23) y = -\frac{1 \cos^2 22x}{44 \sin 44x}; \\
 16) y = \frac{1 \sin^2 6x}{6 \cos 12x}; & 24) y = \frac{\sin^2 23x}{23 \cos 46x}; \\
 17) y = -\frac{1 \cos^2 10x}{20 \sin 20x}; & 25) y = -\frac{1 \cos^2 24x}{48 \sin 48x}; \\
 18) y = \frac{1 \sin^2 10x}{10 \cos 20x}; & 26) y = \frac{\sin^2 25x}{25 \cos 50x}; \\
 19) y = -\frac{1 \cos^2 12x}{24 \sin 24x}; & 27) y = -\frac{1 \cos^2 26x}{52 \sin 52x}; \\
 20) y = \frac{1 \sin^2 5x}{5 \cos 10x}; & 28) y = \frac{\sin^2 27x}{27 \cos 54x}; \\
 21) y = \frac{\cos^2 14x}{28 \sin 28x}; & 29) y = \frac{\cos^2 28x}{56 \sin 56x}; \\
 22) y = \frac{\sin^2 29x}{29 \cos 58x}; & 30) y = \frac{\cos^2 30x}{60 \sin 60x}.
 \end{array}$$

Задание 5.8

Применяя метод логарифмического дифференцирования, найдите производные функций.

$$\begin{array}{ll}
 1. a) y = \sqrt[3]{\frac{x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}}; & б) y = (\operatorname{tg} 2x)^{\frac{x}{4}} \cdot \sqrt{3-x}; \\
 2. a) y = \sqrt{x \cos 3x \cdot \sqrt{1-e^{3x}}}; & б) y = (\arcsin x)^{x^2} \cdot x^3; \\
 3. a) y = \sqrt[4]{\frac{x^3 e^x}{\sqrt{3+x}}}; & б) y = (2x \sin 5x + 1)^{\frac{4}{x}}; \\
 4. a) y = \sqrt[5]{\frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}} \operatorname{tg} \frac{x}{3}; & б) y = x^{\arccos x^2} \cdot 2^x; \\
 5. a) y = \sqrt[3]{\frac{(x^2-4)(x+5)}{(x-1)e^{\arctg x}}}; & б) y = x^{\sqrt{x^2+1}} \cdot \cos 2x; \\
 6. a) y = \sqrt{\frac{x^2 \operatorname{tg} x}{\sqrt{x+2}}}; & б) y = (\ln x)^{x^3} \sin 2x;
 \end{array}$$

$$7. a) y = \sqrt[3]{\frac{(x-2)^2 \sqrt[3]{x+1}}{x}};$$

$$8. a) y = \frac{(x^3-4)^2}{\sqrt[3]{(x^3+6)^2 e^{\cos^3 x}}};$$

$$9. a) y = \frac{\operatorname{tg}^2 x \cdot \sqrt{4-x^2}}{\sqrt[3]{2+x}};$$

$$10. a) y = \sqrt{\frac{1-\arcsin x}{1+\arcsin x}};$$

$$11. a) y = \sqrt{\frac{x \ln x}{\sin x}};$$

$$12. a) y = \sqrt[3]{\frac{x^2 e^x}{1+\arcsin x}};$$

$$13. a) y = \sqrt[4]{\frac{e^{\sin x + \cos x}}{(4x^3+2)^5}};$$

$$14. a) y = \frac{\sqrt[3]{(x^3+6)^2 e^{\cos^3 x}}}{(x^3-3)^2};$$

$$15. a) y = \frac{\sqrt{x \arcsin x}}{x^2-4};$$

$$16. a) y = \frac{x^2 \cdot e^{1-\cos x}}{\ln x};$$

$$17. a) y = \frac{x e^{\arctg \frac{x}{2}}}{\ln^5 x};$$

$$18. a) y = \sqrt[3]{\frac{x^2 \operatorname{tg} 2x}{\sqrt{5+x}}};$$

$$19. a) y = \sqrt[5]{\frac{x \sin 3x}{1-\sin 3x}};$$

$$20. a) y = \frac{x^2 \cdot e^x \cdot \ln x}{\sin x};$$

$$6) y = x^{\ln x} \cdot x^2;$$

$$6) y = (\sin x)^x;$$

$$6) y = (\cos 2x)^{\ln \cos 2x};$$

$$6) y = x^{\frac{1}{x}};$$

$$6) y = \left(\frac{x}{\sqrt{1-x}} \right)^{x^2};$$

$$6) y = (\sin 3x)^{\arcsin x};$$

$$6) y = x^{2^x};$$

$$6) y = (2x^2 - 3x + 6)^{\ln x};$$

$$6) y = (\arctg x)^{\frac{2}{x}};$$

$$6) y = x^{\frac{\sin x}{3}};$$

$$6) y = (\sin x)^{\frac{1}{x^2}};$$

$$6) y = x^{\cos x^2};$$

$$6) y = (\arcsin 2x)^{\ln x};$$

$$6) y = (x \cos x)^{\frac{x}{3}};$$

$$21. \text{ a) } y = \frac{x^3 \operatorname{arctg} x \cdot \sin x}{\ln x};$$

$$\text{б) } y = (\operatorname{ctg} x)^{x^2+1};$$

$$22. \text{ a) } y = \frac{e^{x^2} \cdot \operatorname{tg}^3 x}{\arccos x};$$

$$\text{б) } y = (\sin x)^{e^{4x}};$$

$$23. \text{ a) } y = x^3 \cdot \sqrt{\frac{x-1}{(x+2)\sqrt{x-2}}};$$

$$\text{б) } y = (\arcsin x)^{\arccos x};$$

$$24. \text{ a) } y = \frac{(x+3)^2 \operatorname{tg}^4 x}{\sqrt{x}};$$

$$\text{б) } y = (\ln x)^{1/x^2};$$

$$25. \text{ a) } y = \sqrt[3]{\frac{(x^2+1)x}{\sin^2 x}};$$

$$\text{б) } y = (\ln x)^{e^x};$$

$$26. \text{ a) } y = \sqrt[4]{\frac{e^{\operatorname{tg} x} \cdot (x^4+1)}{x \cos x}};$$

$$\text{б) } y = (\cos x)^{\sqrt{x}};$$

$$27. \text{ a) } y = 2^{\sin x} \cdot \frac{(x^2+1)^3}{\sqrt{(x-3)^3}};$$

$$\text{б) } y = (\operatorname{arctg} x)^{1/x};$$

$$28. \text{ a) } y = \frac{x \ln x}{\sqrt[5]{(x-3)^2}};$$

$$\text{б) } y = (\ln x)^{\ln x};$$

$$29. \text{ a) } y = \sqrt{\frac{x \cos 2x \cdot 2^x}{\ln x}};$$

$$\text{б) } y = (\operatorname{arctg} x)^{\frac{1}{x}};$$

$$30. \text{ a) } y = \frac{x^3 (x^2+1)^4}{\sqrt{x(x^4+1)}};$$

$$\text{б) } y = (\sin x)^{e^{-x}}$$

Задание 5.9

Проверьте, что данная функция удовлетворяет дифференциальному уравнению.

$$1) y = \ln \frac{1}{1+x}, \quad xy' + 1 = e^y;$$

$$2) y = C\sqrt{1+e^{2x}}, \quad ye^{2x} - (1+e^{2x})y' = 0;$$

$$3) y = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (1-x^2)y' - xy = 1;$$

- 4) $y = \ln \frac{1}{C - e^x}$, $y' = e^{x+y}$;
5) $y = x + \ln x$, $x^2(1 - \ln x)y'' + xy' - y = 0$;
6) $y = 1 - \ln|x|$, $x - y + xy' = 0$;
7) $y = \sqrt{x^2 - x}$, $x^2 + y^2 - 2xyy' = 0$;
8) $y = (1+x)e^{-x} - 2$, $y'' - 2y' + y = -2$;
9) $y = \frac{e^x + e^{-x}}{x}$, $xy'' + 2y' - xy = 0$;
10) $y = x \ln 2x$, $y'x = x + y$;
11) $y = xe^{2x+1}$, $y'x = y(\ln y - \ln x)$;
12) $y = \ln(3 + e^x)$, $y' = e^{x-y}$;
13) $y = e^{\frac{\pi}{4} - \arctg x}$, $(1+x^2)y' + y = 0$;
14) $y = \arccos e^{4x}$, $\ln \cos y + xy'tgy = 0$;
15) $2^x - 2^y = \frac{3}{32}$, $y' = 2^{x-y}$;
16) $y = \ln \operatorname{tge}^x$, $y' = e^{x+y} + e^{x-y}$;
17) $y = x \arcsin x$, $xy' - y = x \operatorname{tg} \frac{y}{x}$;
18) $y = Ce^{\sqrt{1-x^2}}$, $xy + \sqrt{1-x^2} \cdot y' = 0$;
19) $y = \operatorname{tg} x - 1 + e^{-\operatorname{tg} x}$, $y' \cos^2 x + y = \operatorname{tg} x$;
20) $y = x \sin x$, $xy' - y = x^2 \cos x$;
21) $y = \frac{1}{2}x^2 e^{-x^2}$, $y' + 2xy = xe^{-x^2}$;
22) $y = \frac{x \cos x}{1 + \sin x}$, $y' \cos x + y = 1 - \sin x$;
23) $y = \frac{a(x-1)}{x^n}$, $y' + \frac{n}{x}y = \frac{a}{x^n}$;
24) $y = \arctg x - 1 + e^{-\arctg x}$, $(1+x^2)y' + y = \arctg x$;
25) $y = \frac{1}{2}x^2 \ln x$, $y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x$;

$$26) y = e^{-x} \left(\frac{1}{2} e^x + 1 \right)^2, \quad y' + y = \sqrt{y} \cdot e^{\frac{x}{2}};$$

$$27) y = e^{-\arcsin x} + \arcsin x - 1, \quad y' \sqrt{1-x^2} + y = \arcsin x;$$

$$28) y = (x+1)(x - \operatorname{arctg} x), \quad y - y' = y^2 + xy';$$

$$29) y = \frac{1}{4} x^4 e^{-2x^2}, \quad y' + 4xy = 2x e^{-x^2} \sqrt{y};$$

$$30) y = -\frac{1}{\cos x \cdot \sqrt[3]{3 \operatorname{tg} x}}, \quad y' = y(y^3 \cos x + \operatorname{tg} x).$$

Задание 5.10

Найдите $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$.

$$1) y = \ln \operatorname{tg} x; \quad 11) y = \ln \sin(2x + 5); \quad 21) y = \ln \operatorname{ctg} 2x;$$

$$2) y = 2^{x^2}; \quad 12) y = \sin^3 \frac{x}{2}; \quad 22) y = \ln(x^2 + 5);$$

$$3) y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}; \quad 13) y = \sqrt{1-3x^2}; \quad 23) y = e^{\sqrt{2x}} (\sqrt{2x} - 1);$$

$$4) y = \sin^2 \frac{x}{2}; \quad 14) y = \cos^3 \frac{x}{3}; \quad 24) y = \sqrt{2x^2 + 1};$$

$$5) y = \ln \operatorname{ctg} \frac{x}{2}; \quad 15) y = \operatorname{tg} \frac{3}{x^3}; \quad 25) y = \arcsin \sqrt{2x};$$

$$6) y = \operatorname{arctg} \sqrt{3x}; \quad 16) y = \operatorname{ctg} \frac{1}{x^2}; \quad 26) y = \operatorname{ctg} \sqrt{\frac{x}{2}};$$

$$7) y = \frac{1}{\sqrt{\sin 2x}}; \quad 17) y = \frac{1}{\sqrt{\cos 3x}}; \quad 27) y = \ln \cos 2x;$$

$$8) y = \cos \frac{2}{x^2}; \quad 18) y = \ln \cos \frac{x}{2}; \quad 28) y = \arccos \sqrt{x};$$

$$9) y = \operatorname{arctg} \sqrt{2x}; \quad 19) y = \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}; \quad 29) y = \operatorname{ctg}^3 \frac{x}{3};$$

$$10) y = \operatorname{arctg} e^{2x}; \quad 20) y = 3^{x^3}; \quad 30) y = e^{\frac{1}{x^2}}.$$

Задание 5.11

Найдите производную n-го порядка.

$$1) y = x e^{2x}; \quad 2) y = \sin 2x + \cos(x+1);$$

- 3) $y = \sqrt[5]{e^{7x-1}}$; 17) $y = (4x + 7)/(2x + 3)$;
 4) $y = \lg(5x + 2)$; 18) $y = a^{3x}$;
 5) $y = x/(2(3x + 2))$; 19) $y = \lg(x + 4)$;
 6) $y = \sqrt{x}$; 20) $y = (2x + 5)/(13(3x + 1))$;
 7) $y = 2^{3x+5}$; 21) $y = \sin(x + 1) + \cos 2x$;
 8) $y = \sqrt[3]{e^{2x+1}}$; 22) $y = (4 + 15x)/(5x + 1)$;
 9) $y = \lg(3x + 1)$; 23) $y = 7^{5x}$;
 10) $y = x/(9(4x + 9))$; 24) $y = \lg(1 + x)$;
 11) $y = 4/x$; 25) $y = (5x + 1)/(13(2x + 3))$;
 12) $y = a^{2x+3}$; 26) $y = \sin(3x + 1) + \cos 5x$;
 13) $y = \sqrt{e^{3x+1}}$; 27) $y = (11 + 12x)/(6x + 5)$;
 14) $y = \lg(2x + 7)$; 28) $y = 2^{kx}$;
 15) $y = x/(x + 1)$; 29) $y = \log_3(x + 5)$;
 16) $y = (1 + x)/(1 - x)$; 30) $y = (7x + 1)/(17(4x + 3))$.

Задание 5.12

Найдите производную указанного порядка.

- 1) $y = (2x^2 - 7)\ln(x - 1), y^V = ?$; 10) $y = (3 - x^2)\ln^2 x, y^{III} = ?$;
 2) $y = x \cos x^2, y^{III} = ?$; 11) $y = \frac{\ln(x - 1)}{\sqrt{x - 1}}, y^{III} = ?$;
 3) $y = \frac{\log_2 x}{x^3}, y^{III} = ?$; 12) $y = (4x^3 + 5)e^{2x+1}, y^V = ?$;
 4) $y = x^2 \sin(5x - 3), y^{III} = ?$; 13) $y = (\ln x)/x^2, y^{IV} = ?$;
 5) $y = (2x + 3)\ln^2 x, y^{III} = ?$; 14) $y = (1 + x^2)\operatorname{arctg} x, y^{III} = ?$;
 6) $y = (\ln x)/x^3, y^{IV} = ?$; 15) $y = (4x + 3)2^{-x}, y^V = ?$;
 7) $y = e^{1-2x} \sin(2 + 3x), y^{IV} = ?$; 16) $y = \frac{\ln(3 + x)}{3 + x}, y^{III} = ?$;
 8) $y = (2x^3 + 1)\cos x, y^V = ?$; 17) $y = (x^2 + 3)\ln(x - 3), y^{IV} = ?$;
 9) $y = (1 - x - x^2)e^{(x-1)/2}, y^{IV} = ?$; 18) $y = (1/x)\sin 2x, y^{III} = ?$;

- 19) $y = (x + 7) \ln(x + 4), y^V = ?;$ 25) $y = (3x - 7)3^{-x}, y^{IV} = ?;$
 20) $y = \frac{\ln(2x + 5)}{2x + 5}, y^m = ?;$ 26) $y = e^{x/2} \sin 2x, y^{IV} = ?;$
 21) $y = (\ln x) / x^5, y^m = ?;$ 27) $y = x \ln(1 - 3x), y^{IV} = ?;$
 22) $y = (x^2 + 3x + 1)e^{3x+2}, y^V = ?;$ 28) $y = (5x - 8)2^{-x}, y^{IV} = ?;$
 23) $y = \frac{\ln(x - 2)}{x - 2}, y^V = ?;$ 29) $y = e^{-x} (\cos 2x - 3 \sin 2x), y^{IV} = ?;$
 24) $y = (5x - 1) \ln^2 x, y^m = ?;$ 30) $y = \frac{\log_3 x}{x^2}, y^{IV} = ?.$

Задание 5.13

Найдите производные первого и второго порядков в точке $M(x_0, y_0)$ от функции, заданной неявно.

- 1) $\ln x + e^{-\frac{y}{x}} = \frac{1}{e}, M(1; 1);$ 15) $\sin(xy) + \cos(xy) = 0, M(1; -\pi/4);$
 2) $3^{x+y} = \frac{-x}{y}, M(1; -1);$ 16) $\sin(x + 4y) = xy, M(0; \pi/4);$
 3) $e^{x-y} = xy, M(1; 1);$ 17) $\cos(x + 2y) = xy, M(0; \pi/4);$
 4) $ye^y = e^{x+1}, M(0; 1);$ 18) $xe^{3y} - y \ln x = 1, M(1; 0);$
 5) $xy^3 = \ln(x + y), M(0; 1);$ 19) $y \ln x = x \ln y, M(1; 1);$
 6) $e^{x-2} + xy - 3y - 2 = 0, M(2; -1);$ 20) $xe^y + ye^x = 2, M(0; 2);$
 7) $y^2 = x + \ln \frac{y}{x}, M(1; 1);$ 21) $(x + y)^3 = 27(x - y), M(2; 1);$
 8) $\operatorname{tgy} = xy, M(4/\pi; \pi/4);$ 22) $y^4 = 4x^4 + 6xy, M(1; 2);$
 9) $y = 1 + xe^y, M(-1; 0);$ 23) $5^{xy} = x + y, M(0; 1);$
 10) $\operatorname{arctg}(xy) = x + y, M(0; \pi/2);$ 24) $\operatorname{ctgy} = xy, M(0; \pi/2);$
 11) $\operatorname{arctg}(x + y) = xy, M(0; 0);$ 25) $e^y + xe^{-y} = \frac{4}{9}x^2, M(3; 0);$
 12) $xy = \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{4x}{y}, M(1/4; 1);$ 26) $\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2), M(1; 0);$
 13) $\arcsin(x + y) = xy, M(0; 0);$ 27) $\operatorname{arctg} \frac{x}{y} = xy, M(0; 1);$
 14) $x - y = \arcsin x - \arcsin y, M(0; 0);$ 28) $3^x + 3^y = 2 \cdot 3^{x+y}, M(0; 0);$

29) $2y \ln y = x$, $M(0;1)$;

30) $x + y = 1 + xe^y$, $M(0;1)$.

Задание 5.14

Найдите производные 1-го и 2-го порядков от функций, заданных параметрически.

1)
$$\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t), \\ y = a(\sin t - t \cos t). \end{cases}$$

10)
$$\begin{cases} x = a \cos 5t, \\ y = at \sin 5t. \end{cases}$$

19)
$$\begin{cases} x = \cos 2t, \\ y = 2/\cos^2 t. \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} x = \sin \frac{t}{2}, \\ y = 3/\sin^2 \frac{t}{2}. \end{cases}$$

11)
$$\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \ln(1-t^2). \end{cases}$$

20)
$$\begin{cases} x = \cos 7t, \\ y = \ln \sin 7t, \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} x = \arcsin(t^2 - 1), \\ y = \arccos t/2. \end{cases}$$

12)
$$\begin{cases} x = (1 + \ln t)/t^2, \\ y = (3 + \ln t)/t. \end{cases}$$

21)
$$\begin{cases} x = \log_2 \operatorname{tg} t, \\ y = 1/\sin t. \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} x = a \left(\cos t - \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right), \\ y = a \sin t. \end{cases}$$

13)
$$\begin{cases} x = \frac{\cos t}{1 + 2 \cos t}, \\ y = \frac{\sin t}{1 + 2 \cos t}. \end{cases}$$

22)
$$\begin{cases} x = \operatorname{tg}(t/3), \\ y = \cos^2(t/3). \end{cases}$$

5)
$$\begin{cases} x = \arccos 1/t, \\ y = \sqrt{t^2 - 1} + \arcsin 1/t. \end{cases}$$

14)
$$\begin{cases} x = e^{3t} \cos 5t, \\ y = e^{3t} \sin 5t. \end{cases}$$

23)
$$\begin{cases} x = \sin^2 3t, \\ y = 3 \cos^2 3t, \end{cases}$$

6)
$$\begin{cases} x = \arcsin \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \\ y = \arccos 1/(\sqrt{1+t^2}). \end{cases}$$

15)
$$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} e^{\frac{1}{t}}, \\ y = \sqrt{1+e^t}. \end{cases}$$

24)
$$\begin{cases} x = \arccos t, \\ y = t/\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$$

7)
$$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} \frac{t+1}{t-1}, \\ y = \arcsin \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$$

16)
$$\begin{cases} x = \log_5(1+t^2), \\ y = t + \operatorname{arctg} t. \end{cases}$$

25)
$$\begin{cases} x = \arcsin t, \\ y = \sqrt{1-t^2}. \end{cases}$$

8)
$$\begin{cases} x = \arcsin \sqrt{1-t^2}, \\ y = (\arccos t)^2. \end{cases}$$

17)
$$\begin{cases} x = t/\sqrt{1-t^2}, \\ y = \operatorname{arctg} t, \end{cases}$$

26)
$$\begin{cases} x = \ln \operatorname{ctg} 3t, \\ y = 1/\cos^2 3t. \end{cases}$$

9)
$$\begin{cases} x = t(\cos t - 2 \sin t), \\ y = t(t \sin t + 2 \cos t). \end{cases}$$

18)
$$\begin{cases} x = 1/\cos 2t, \\ y = \operatorname{tg} 2t. \end{cases}$$

27)
$$\begin{cases} x = \cos^2 3t, \\ y = \ln \cos 3t. \end{cases}$$

$$28) \begin{cases} x = \operatorname{tg}(2e^{3t}), \\ y = \log_5 \operatorname{ctg} e^{3t}. \end{cases}$$

$$29) \begin{cases} x = \arccos \sqrt{t}, \\ y = \sqrt{1 + \sqrt{t}}. \end{cases}$$

$$30) \begin{cases} x = \cos^2 5t, \\ y = \sin^3 5t. \end{cases}$$

Задание 5.15

Используя дифференциал первого порядка, найдите приближённо ($\ln 2 \approx 0,693$, $\ln 3 \approx 1,099$, $\ln 5 \approx 1,609$, $\pi \approx 3,1416$).

- | | | | | |
|---------------------------------|-----------------------|-----------------------------------|----------------------------------|-------------------------------------|
| 1) $\sqrt[3]{8,125}$; | 7) $2^{1,8}$; | 13) $\operatorname{arctg} 1,05$; | 19) $\sqrt{3,75}$; | 25) $\arcsin 0,05$; |
| 2) $\log_2 8,1$; | 8) $3^{2,1}$; | 14) $\sqrt{4,16}$; | 20) $\operatorname{arctg} 0,9$; | 26) $\sqrt[3]{27,216}$; |
| 3) $\cos 1$; | 9) $5^{1,9}$; | 15) $\sqrt{9,36}$; | 21) $\sqrt[3]{7,875}$; | 27) $\operatorname{tg} 1$; |
| 4) $4^{1,8}$; | 10) $\sqrt{16,16}$; | 16) $\sin 32^\circ$; | 22) $\sqrt[3]{26,875}$; | 28) $\operatorname{tg} 44^\circ$; |
| 5) $2^{3,1}$; | 11) $\cos 31^\circ$; | 17) $\sqrt{25,64}$; | 23) $3^{1,8}$; | 29) $\operatorname{ctg} 47^\circ$; |
| 6) $\operatorname{arctg} 1,2$; | 12) $\sin 88^\circ$; | 18) $2^{3,8}$; | 24) $\cos 93^\circ$; | 30) $\sqrt{3,84}$. |

Задание 5.16

С помощью формулы Тейлора найдите приближённое значение числа с точностью до 0,001.

- | | | | | |
|--------------------|-----------------------|--------------------|----------------------------------|----------------------------------|
| 1) e^2 ; | 7) $\cos 3/2$; | 13) $\ln 4$; | 19) $\sin 2$; | 25) $\operatorname{arctg} 2$; |
| 2) \sqrt{e} ; | 8) $\sin 3/2$; | 14) $\ln 5$; | 20) $\cos 2$; | 26) $\operatorname{arctg} 3$; |
| 3) $e^{3/2}$; | 9) $\cos 1$; | 15) $\ln 6$; | 21) $\sin 3$; | 27) $\operatorname{arctg} 3/2$; |
| 4) $e^{5/2}$; | 10) $\sin 4$; | 16) $\sqrt{1,5}$; | 22) $\cos 3$; | 28) $\operatorname{arctg} 5/2$; |
| 5) $\sqrt[3]{e}$; | 11) $\sin 5/2$; | 17) $\cos 4$; | 23) $\operatorname{arctg} 7/2$; | 29) e^3 ; |
| 6) $\sin 7/2$; | 12) $\sqrt[3]{1,5}$; | 18) $\cos 9/2$; | 24) $\operatorname{arctg} 4$; | 30) $\sin 5$. |

Задание 5.17

Найдите площадь треугольника, образованного прямой $x = x_0 + 1$, касательной и нормалью, проведёнными к графику заданной функции в точке с заданной абсциссой x_0 или в точке, соответствующей значению параметра t_0 .

- | | |
|---|--|
| 1) $y = 2x^{3/2} + 3x^{2/3}$; $x_0 = 1$; | 3) $\arcsin(x + y) = xy$, $x_0 = 0$; |
| 2) $\begin{cases} x = e^{3t} + \ln(t + 1), \\ y = t^2 + \operatorname{tg} t, \end{cases}$ $t_0 = 0$; | 4) $y = 3x^{2/3} + 4x^{3/4}$, $x_0 = 1$; |

5) $\arctg(x+y) = xy, \quad x_0 = 0;$

6) $y = x + 3x^{2/3}; \quad x_0 = 1;$

7)
$$\begin{cases} x = t^3 - 2t, \\ y = e^t + \arctg 2t, \quad t_0 = 0; \end{cases}$$

8) $xy = \arctg(y-x), \quad x_0 = 0;$

9) $y = x^2 + 4x^{3/4}; \quad x_0 = 1;$

10)
$$\begin{cases} x = \sin t - \arccos t, \\ y = \operatorname{tg} t + \arctg t, \quad t_0 = 0; \end{cases}$$

11) $\arctg(xy) = x + y, \quad x_0 = 0;$

12) $y = x + 4x^{3/4}; \quad x_0 = 1;$

13)
$$\begin{cases} x = \arcsin t + \cos t, \\ y = \ln(3t+1) + \operatorname{tg} 2t, \quad t_0 = 1; \end{cases}$$

14) $\arctg(xy) = x - y, \quad x_0 = 0;$

15) $y = x^3 + 2x^{3/2}; \quad x_0 = 1;$

16)
$$\begin{cases} x = \arccos 2t - \arcsin 3t, \\ y = e^{2t} - t^2, \quad t_0 = 0; \end{cases}$$

17) $\arctg(x-y) = xy, \quad x_0 = 0;$

18)
$$\begin{cases} x = \ln(3t+1) + \operatorname{tg} 2t, \\ y = \arcsin 2t + \cos t, \quad t_0 = 0; \end{cases}$$

19) $\arcsin(y-x) = xy, \quad x_0 = 0;$

20) $y = 2x^{3/2} + x^2; \quad x_0 = 1;$

21)
$$\begin{cases} x = e^{2t} - t^2, \\ y = \arccos 2t - \arcsin 3t, \quad t_0 = 0; \end{cases}$$

22) $\arcsin(xy) = x + y, \quad x_0 = 0;$

23) $y = 3x^{2/3} + x^2; \quad x_0 = 1;$

24)
$$\begin{cases} x = t^2 + \operatorname{tg} t, \\ y = e^{3t} + \ln(1+t), \quad t_0 = 0; \end{cases}$$

25) $\arcsin(xy) = y - x, \quad x_0 = 0;$

26) $y = x + 2x^{3/2}; \quad x_0 = 1;$

27)
$$\begin{cases} x = e^t + \arctg 2t, \\ y = t^3 - 2t, \quad t_0 = 0; \end{cases}$$

28) $\arcsin(x-y) = yx, \quad x_0 = 0;$

29) $y = 3x^{2/3} + x^3; \quad x_0 = 1;$

30)
$$\begin{cases} x = \operatorname{tg} t + \arctg t, \\ y = \sin t - \arccos t, \quad t_0 = 0. \end{cases}$$

Задание 5.18

Пользуясь правилом Лопиталя, найдите пределы.

1. а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin x} - 1}{x^2 \cos x},$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{tg} x} \right);$

2. а) $\lim_{x \rightarrow 0+0} (\ln x + \operatorname{ctg} x),$

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right);$

3. a) $\lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{tg} x)^x$, б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 - e^x} - \frac{1}{x} \right)$;
4. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)\sin^2 x}{x^2 e^x}$, б) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - \ln x)$;
5. a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{x+1}$, б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln x + \frac{1}{x} \right)$;
6. a) $\lim_{x \rightarrow +0} (\ln x)^{\arcsin x}$, б) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x} \right)$;
7. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x}{\ln(x+1)}$, б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 - \cos x} - \frac{1}{x^2} \right)$;
8. a) $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{x \ln^2 x}{x + e^x}$, б) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{\sin \pi x} \right)$;
9. a) $\lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{arctg} x}$, б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{x} \right)$;
10. a) $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{x} + \ln x \right)$, б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} \right)$;
11. a) $\lim_{x \rightarrow +0} (1 - \sin x)^{\operatorname{ctg} x}$, б) $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\ln^2 x - \frac{1}{x^2} \right)$;
12. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)\sin^2 x}{x \ln(x+1)}$, б) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{e^x - e} - \frac{1}{x-1} \right)$;
13. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - e^{\sin 2x}}{x - \sin x}$, б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} + \ln 2x \right)$;
14. a) $\lim_{x \rightarrow +0} (\ln x)^{\operatorname{arctg} x}$, б) $\lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \right)$;
15. a) $\lim_{x \rightarrow +0} x^{\sin x}$, б) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{\sin x} \right)$;
16. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln^2 x}{x}$, б) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{\sin \pi x} \right)$;
17. a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^{x^2} + 1)}{x e^{x^2}}$, б) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\cos x} - \frac{1}{x - \pi/2} \right)$;

$$18. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos x}{e^{x \sin x} - 1},$$

$$19. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1) \sin^2 x}{(x+a) \ln^2(x+1)},$$

$$20. a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + \ln x - x^2}{e^x - \ln x + x^2},$$

$$21. a) \lim_{x \rightarrow +0} \left(\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \right)^{\operatorname{ctgx}},$$

$$22. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x},$$

$$23. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^2},$$

$$24. a) \lim_{x \rightarrow +0} (\operatorname{arctg} x)^x,$$

$$25. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x \sin x} - 1}{x \ln(x+1)},$$

$$26. a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - \ln x}{3x^2 - \ln^2 x},$$

$$27. a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 + x)}{\ln(x^2 - x)},$$

$$28. a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln^2(x+1)}{x \cos x},$$

$$29. a) \lim_{x \rightarrow +0} (1 - \sin x)^{\ln x},$$

$$30. a) \lim_{x \rightarrow r} \frac{e^x}{x^3},$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 4+0} \left(\frac{1}{\sqrt{x-4}} - \frac{1}{\operatorname{tg} \pi x} \right);$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{1 - \cos x} - \frac{1}{e^x - e^{-x}} \right);$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 2+0} \left(\ln(x-2) + \frac{1}{x-2} \right);$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x - \sin x} - \frac{1}{x^2} \right);$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 5+0} \left(\frac{1}{x-5} - \frac{1}{e^x - e^5} \right);$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{1}{\operatorname{tg} x} - \frac{1}{x - \pi} \right);$$

$$6) \lim_{x \rightarrow -1+0} \left(\frac{1}{\sqrt{x+1}} - \frac{1}{x+1} \right);$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\arcsin x} \right);$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{arctg} x} \right);$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\sin \pi x} \right);$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{\sin \pi x} \right);$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x^2 - 4} - \frac{1}{x - 2} \right);$$

$$6) \lim_{x \rightarrow +0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right).$$

VI. ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ. ПОСТРОЕНИЕ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

1. Возрастание и убывание функции. Точки экстремума

Говорят, что функция $y = f(x)$ возрастает (убывает) на интервале $(a; b)$, если для любых различных точек x_1, x_2 из $(a; b)$ справедливо неравенство $(f(x_2) - f(x_1))(x_2 - x_1) > 0$ ($(f(x_2) - f(x_1))(x_2 - x_1) < 0$), т.е. если большему значению аргумента соответствует большее (меньшее) значение функции.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ дифференцируема на $(a; b)$ и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для любого $x \in (a; b)$, то $f(x)$ возрастает (убывает) на (a, b) .

Точка x_0 называется точкой максимума (минимума) функции $f(x)$, определённой в некоторой окрестности x_0 , если существует некоторая окрестность $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ этой точки, такая, что для любого $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$ справедливо неравенство $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$); при этом $f(x_0)$ называют максимумом (минимумом) функции. Точки максимума и точки минимума называют точками экстремума.

Теорема 2 (необходимое условие экстремума). Если функция $f(x)$ дифференцируема в промежутке (a, b) и $x_0 \in (a, b)$ является точкой экстремума $f(x)$, то $f'(x_0) = 0$.

Точки, в которых $f'(x_0) = 0$, называются стационарными точками $f(x)$. Не всякая стационарная точка является точкой экстремума.

Теорема 3 (достаточное условие экстремума). Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в окрестности стационарной точки x_0 . Если при переходе через точку x_0 $f'(x)$ меняет свой знак, то x_0 является точкой экстремума. А именно, если при переходе через точку x_0 $f'(x)$:

а) меняет свой знак с минуса на плюс (т.е. $f'(x)(x - x_0) > 0$ при достаточно малых значениях $|x - x_0|$, $x \neq x_0$), то x_0 является точкой минимума;

б) меняет свой знак с плюса на минус (т.е. $f'(x)(x - x_0) < 0$ при достаточно малых значениях $|x - x_0|$, $x \neq x_0$), то x_0 является точкой максимума функции;

в) не меняет своего знака, то x_0 не является точкой экстремума.

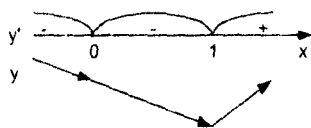
Иногда удобно пользоваться другим достаточным условием экстремума.

Теорема 4 (достаточное условие экстремума). Пусть x_0 – стационарная точка функции $f(x)$, дважды дифференцируемой в точке x_0 . Если $f''(x_0) \neq 0$, то x_0 является точкой экстремума. Точнее говоря, если: а) $f''(x_0) > 0$, то x_0 – точка минимума; б) $f''(x_0) < 0$, то x_0 – точка максимума.

Точкой экстремума $f(x)$ может оказаться и точка, в которой $f'(x)$ не определена. Стационарные точки и точки, в которых $f'(x)$ не определена, называют критическими точками функции.

Пример 1. Найти точки экстремума функции $f(x) = x^4 - \frac{4}{3}x^3$.

Решение. Наша функция дифференцируема на всей числовой оси. Найдём стационарные точки. $f'(x) = 4x^3 - 4x^2 = 4x^2(x-1)$.



Стационарными точками являются $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. При переходе через точку $x = 0$ $f'(x)$ не меняет своего знака, поэтому эта точка не является точкой экстремума. При переходе через точку $x = 1$ $f'(x)$ меняет свой знак с «-» на «+», следовательно, $x = 1$ – точка минимума (на рисунке получается «впадина»).

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке $[a, b]$ находят значения функции в критических точках, принадлежащих этому отрезку, и на концах отрезка, после чего сравнивают эти значения и выбирают наибольшее и наименьшее.

Пример 2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^4 - 8x^2$ на отрезке $[-1; 3]$.

Решение. Функция дифференцируема на всей числовой оси. Найдём стационарные точки

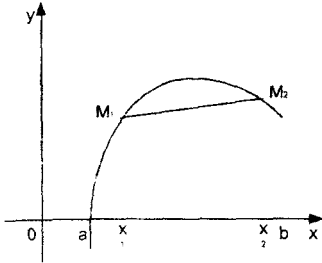
$$f'(x) = 4x^3 - 16x = 4x(x-2)(x+2).$$

Стационарными точками являются $x_1 = -2$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$; из них лишь $x_2 = 0$ и $x_3 = 2$ принадлежат промежутку $[-1; 3]$. Найдём значения функции в точках $x = 0$, $x = 2$, а также на концах отрезка: $f(0) = 0$, $f(2) = 16 - 32 = -16$, $f(-1) = 1 - 8 = -7$, $f(3) = 81 - 72 = 9$. Сравнив полученные значения, находим:

$$\max_{x \in [-1; 3]} f(x) = f(3) = 9, \quad \min_{x \in [-1; 3]} f(x) = f(2) = -16.$$

2. Выпуклость и вогнутость

Дифференцируемая функция $y = f(x)$ называется выпуклой (вогнутой) или выпуклой вверх (вниз) на интервале $(a; b)$, если она удовлетворяет следующему условию:



для любых различных точек $x_1, x_2 \in (a; b)$ часть графика функции $y = f(x)$, соответствующая интервалу $(x_1; x_2)$, расположена выше (ниже) отрезка M_1M_2 , где $M_1(x_1; f(x_1)), M_2(x_2; f(x_2))$.

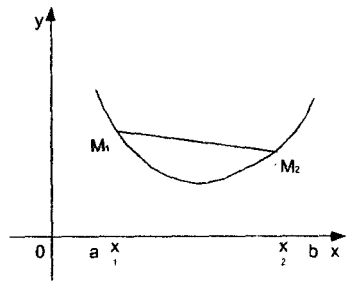
Точка графика функции, разделяющая выпуклый и вогнутый участки графика, называется точкой перегиба (часто точкой перегиба называют абсциссу этой

точки графика функции).

Теорема 5. Если для функции $f(x)$, дважды дифференцируемой в $(a; b)$, $f''(x) < 0$ ($f''(x) > 0$) при всех

$x \in (a; b)$, то функция $f(x)$ является выпуклой (вогнутой) на $(a; b)$.

Теорема 6. Пусть функция $f(x)$ дважды дифференцируема на $(a; b)$. Точка $x_0 \in (a; b)$ является точкой перегиба в том и только в том случае, если одновременно выполняются два условия: 1) $f'''(x_0) = 0$; 2) при переходе через точку x_0 $f''(x)$ меняет свой знак.



В последней теореме при условии трижды дифференцируемости функции условие 2) можно заменить на $f'''(x_0) \neq 0$.

3. Асимптоты

Прямая (L) называется асимптотой графика функции (или просто асимптотой функции), если расстояние $d(M; (L))$ от точки M на графике функции $y = f(x)$ до прямой (L) стремится к 0 при неограниченном удалении точки M от начала координат.

Различают два вида асимптот: вертикальные и наклонные.

Прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой, если по крайней мере один из односторонних пределов $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$ равен $-\infty$ или $+\infty$.

Наклонная асимптота $y = kx + b$ соответствует случаю $x \rightarrow -\infty$ или $x \rightarrow +\infty$. Коэффициенты k и b при $x \rightarrow +\infty$ находятся из равенств

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx)$$

(то же при $x \rightarrow -\infty$). Если же не существует одного из пределов или один из этих пределов равен $-\infty$ или $+\infty$, то у функции отсутствует наклонная асимптота при $x \rightarrow +\infty$ (то же при $x \rightarrow -\infty$).

4. Построение графика функции

При построении графика функции сначала проводят исследование функции. При этом придерживаются следующего (примерного) плана:

- 1) находят область определения функции;
- 2) указывают точки пересечения с осями координат;
- 3) определяют точки разрыва и устанавливают тип разрыва;
- 4) с помощью первой производной устанавливают интервалы монотонности (т.е. интервалы возрастания и убывания) функции и находят точки экстремума и значения функции в этих точках;
- 5) с помощью второй производной устанавливают интервалы выпуклости, вогнутости и находят точки перегиба;
- 6) находят асимптоты функции. Затем по этим данным строят график функции.

Пример 3. Построить график функции $y = \frac{x^3}{x^2 - 4x - 32}$.

Решение. 1) Нулями знаменателя являются $x = -4$ и $x = 8$. Следовательно, областью определения функции является множество $(-\infty; -4) \cup (-4; 8) \cup (8; +\infty)$.

2) Найдём точки пересечения с осями координат:

а) с осью Ox . Найдём нули функции: $\frac{x^3}{x^2 - 4x - 32} = 0$ лишь при $x = 0$; значит, график функции пересекает ось Ox (или касается оси Ox) в точке $O(0; 0)$ – начале координат;

б) с осью Oy . Для нахождения общей точки графика функции и оси Oy следует найти $f(0)$: $f(0) = 0$. Поэтому график пересекает ось Oy в точке $O(0; 0)$.

3) Наша функция представляет собой отношение двух многочленов, поэтому она непрерывна всюду, за исключением нулей

знаменателя: $x = -4$ и $x = 8$. Найдём левые и правые пределы в этих точках.

Для точки $x = -4$:

$$\lim_{x \rightarrow -4-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4-0} \frac{x^3}{(x+4)(x-8)} = -\infty;$$

$$\lim_{x \rightarrow -4+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow -4+0} \frac{x^3}{(x+4)(x-8)} = +\infty.$$

Отсюда делаем вывод, что $x = -4$ является точкой разрыва второго рода.

Для точки $x = 8$:

$$\lim_{x \rightarrow 8-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8-0} \frac{x^3}{(x+4)(x-8)} = -\infty;$$

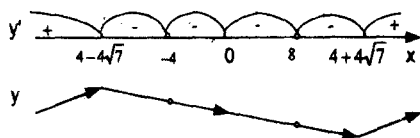
$$\lim_{x \rightarrow 8+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 8+0} \frac{x^3}{(x+4)(x-8)} = +\infty.$$

Поэтому $x = 8$ также является точкой разрыва второго рода.

4) Имеем

$$y' = \left(\frac{x^3}{x^2 - 4x - 32} \right)' = \frac{x^2(x^2 - 8x - 96)}{(x+4)^2(x-8)^2} = \frac{x^2(x-4+4\sqrt{7})(x-4-4\sqrt{7})}{(x+4)^2(x-8)^2}.$$

Критическими точками функции являются её стационарные точки $x_1 = 4 - 4\sqrt{7}$, $x_2 = 4 + 4\sqrt{7}$, $x_3 = 0$. Знак y' совпадает со знаком выражения $x^2(x-4+4\sqrt{7})(x-4-4\sqrt{7})$.



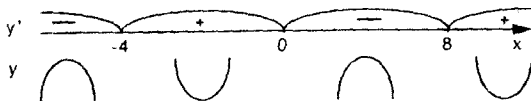
Видно, что функция возрастает на промежутках $(-\infty; 4 - 4\sqrt{7})$ и $(4 + 4\sqrt{7}; +\infty)$ и убывает на промежутках $(4 - 4\sqrt{7}; -4)$, $(-4; 8)$, $(8; 4 + 4\sqrt{7})$. Следовательно, точка $x = 4 - 4\sqrt{7}$ является точкой максимума (на рисунке ей соответствует «горка»), точка $x = 4 + 4\sqrt{7}$ — точкой минимума (ей соответствует «впадина»). Стационарная точка

$x = 0$ не является точкой экстремума. Найдём значение функции в точках экстремума: $f(4 - 4\sqrt{7}) \approx -7,57$; $f(4 + 4\sqrt{7}) \approx 25,35$.

$$5) y'' = (y')' = \frac{96x(x^2 + 8x + 64)}{(x+4)^3(x-8)^3}.$$

Трёхчлен $x^2 + 8x + 64 > 0$ при всех x (его дискриминант меньше 0). Поэтому знак y'' совпадает со знаком дроби $x / ((x+4)^3(x-8)^3)$.

Составим схему. Видно, что функция выпукла в интервалах $(-\infty; -4)$



и $(0; 8)$ и вогнута в интервалах $(-4; 0)$ и $(8; +\infty)$. При переходе через точки $-4, 8, 0$ y'' меняет свой знак. Поэтому точка $x = 0$ является точкой перегиба (в точках $x = -4, x = 8$ функция не определена).

6) Так как $f(-4 \pm 0) = \mp\infty$, $f(8 \pm 0) = \pm\infty$, то прямые $x = -4$ и $x = 8$ являются вертикальными асимптотами. Найдём наклонные асимптоты при $x \rightarrow -\infty$ и при $x \rightarrow +\infty$. Уравнения этих асимптот будем искать в виде $y = kx + b$:

а) $x \rightarrow -\infty$.

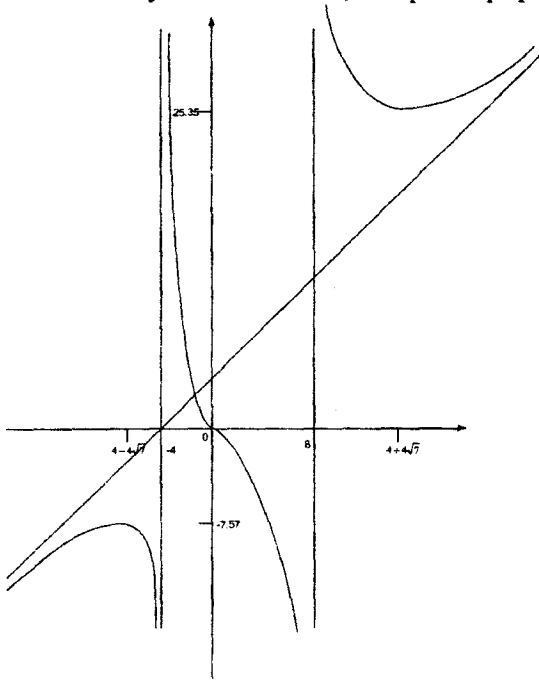
$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 - 4x - 32} = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 4x - 32} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 32x}{x^2 - 4x - 32} = 4.$$

Таким образом, прямая $y = x + 4$ является асимптотой при $x \rightarrow -\infty$;

б) при $x \rightarrow +\infty$ получим тот же результат: прямая $y = x + 4$ является асимптотой.

Основываясь на полученных данных, построим график функции.



Пример 4. Построить график функции $y = e^{-(x-2)^2}$.

Решение. 1) Областью определения функции является $(-\infty; +\infty)$.

2) Найдём точки пересечения с осями координат:

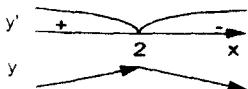
а) с осью Ox . Функция не имеет нулей, следовательно, она не имеет общих точек с осью Ox ;

б) с осью Oy . Имеем $f(0) = e^{-4} \approx 0,0183$. Точка $(0; e^{-4})$ является точкой пересечения графика с осью Oy .

3) Наша функция является суперпозицией непрерывных функций, поэтому она непрерывна на всей числовой оси.

4) Имеем

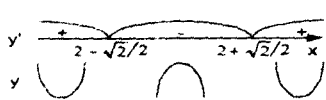
$$y' = \left(e^{-(x-2)^2} \right)' = -2(x-2)e^{-(x-2)^2}$$



Функция имеет одну стационарную точку $x = 2$. Функция $y = f(x)$ возрастает на промежутке $(-\infty; 2)$ и убывает на промежутке $(2; +\infty)$, точка $x = 2$ является точкой максимума.

Максимум функции равен $f(2)=1$.

$$5) y'' = (y')' = 2(2x^2 - 8x + 7)e^{-(x-2)^2}.$$



Функция y'' имеет нули $x_1=2-\sqrt{2}/2$, $x_2=2+\sqrt{2}/2$. Она выпукла на интервале $(2-\sqrt{2}/2; 2+\sqrt{2}/2)$ и вогнута на интервалах $(-\infty; 2-\sqrt{2}/2)$, $(2+\sqrt{2}/2; +\infty)$. Точки $x = 2 - \sqrt{2}/2$ и $x = 2 + \sqrt{2}/2$ являются точками перегиба.

б) Так как функция определена и непрерывна на всей числовой оси, то она не имеет вертикальных асимптот. Найдём наклонные асимптоты.

а) $x \rightarrow -\infty$. Ищем асимптоту в виде $y = kx + b$.

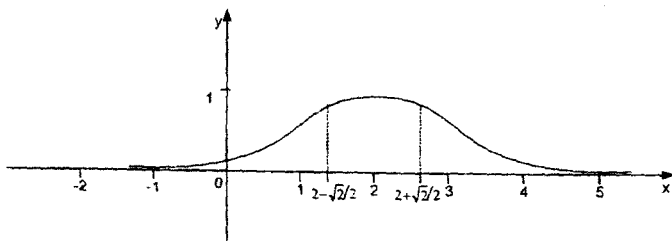
$$k = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-(x-2)^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{xe^{(x-2)^2}} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-(x-2)^2} = 0.$$

Таким образом, прямая $y = 0$ является асимптотой функции при $x \rightarrow -\infty$.

б) При $x \rightarrow +\infty$ получим тот же результат: $y = 0$ является асимптотой при $x \rightarrow +\infty$.

По полученным данным построим график функции.



Пример 5. Построить график функции $y = \sqrt{x^2 - x^3}$.

Решение. 1) Область определения функции $x^2 - x^3 \geq 0$, $x^2(1-x) \geq 0$, $x \in (-\infty, 1]$.

2) Точки пересечения с осями координат
 $x_1 = 0$; $y_1 = 0$; $y = 0 \Rightarrow x^2 - x^3 = 0$; $x^2(1-x) = 0$;

$$x_2 = 1; \quad y_2 = 0.$$

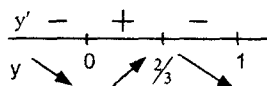
3) Функция непрерывна на всей области определения.

$$4) y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 - x^3}} (2x - 3x^2) = \frac{x(2-3x)}{2\sqrt{x^2 - x^3}} = \left| \sqrt{x^2} = |x| \right| =$$

$$= \frac{x(2-3x)}{2|x|\sqrt{1-x}} = \begin{cases} \frac{2-3x}{2\sqrt{1-x}} & 0 < x < 1, \\ \frac{3x-2}{2\sqrt{1-x}} & x < 0. \end{cases}$$

Следовательно, производная y' в точке $x = 0$ не определена.

$y' = 0$, $2 - 3x = 0$, $x_0 = 2/3$ – стационарная точка.



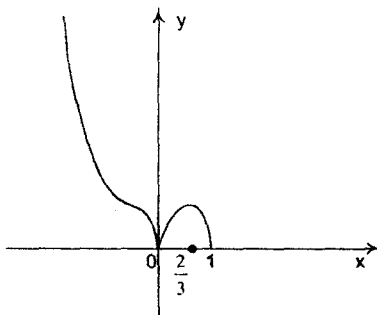
Функция убывает на промежутках $(-\infty, 0) \cup (2/3, 1)$ и возрастает на промежутке $(0, 2/3)$.

Следовательно, точка $x_0 = 2/3$ является точкой максимума; $x_1 = 0$ – критическая точка, является точкой минимума.

$$y_{\max} = y(x_0) = \sqrt{\frac{4}{9} - \frac{8}{27}} \cong 0,385,$$

$$y_{\min} = y(x_1) = 0.$$

График данной функции приведен на рисунке.



5. Элементарные преобразования графиков

Напомним некоторые приемы, которые часто используются при построении графиков функций. Пусть построен график функции $y = f(x)$. Тогда:

1) график функции $y = f(x + a)$ получается из графика функции $y = f(x)$ переносом вдоль оси OX на a единиц влево, если $a > 0$, или на $|a| = -a$ единиц вправо, если $a < 0$;

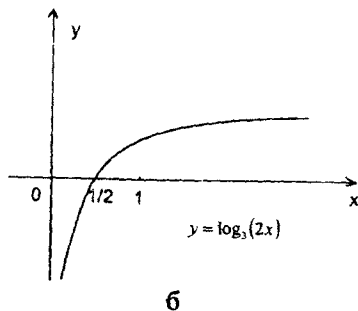
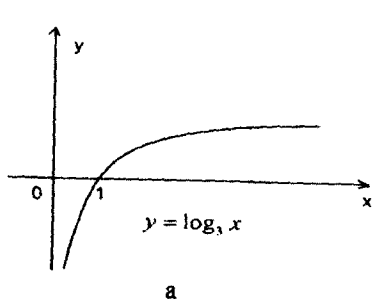
2) график функции $y = f(x) + b$ получается из графика функции $y = f(x)$ переносом на b единиц вверх, если $b > 0$, или на $|b| = -b$ единиц вниз, если $b < 0$;

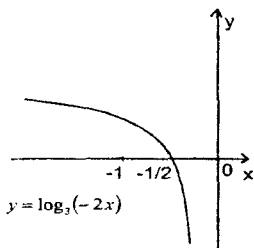
3) график функции $y = f(kx)$ ($k > 0$) получается из графика функции $y = f(x)$ сжатием вдоль оси OX в k раз, если $k \geq 1$, или растяжением в $\frac{1}{k}$ раз, если $0 < k < 1$;

4) график функции $y = cf(x)$ получается из графика функции ($c > 0$) $y = f(x)$ растяжением вдоль оси OY в c раз, если $c \geq 1$ (при $c < 1$ сжатием в $\frac{1}{c}$ раз);

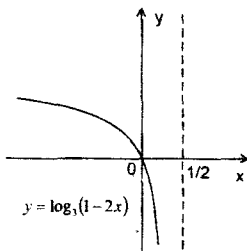
5) графики функций $y = f(x)$ и $y = f(-x)$ симметричны относительно оси OY ; графики функций $y = f(x)$ и $y = -f(x)$ симметричны относительно оси OX .

Пример 6. Построить график функции $y = \log_3(1 - 2x)$.





в



г

Подчеркнем, что величина сдвига вдоль оси OX определяется той постоянной, которая прибавляется непосредственно к аргументу x , а не к аргументу kx . Поэтому для нахождения этой постоянной функцию

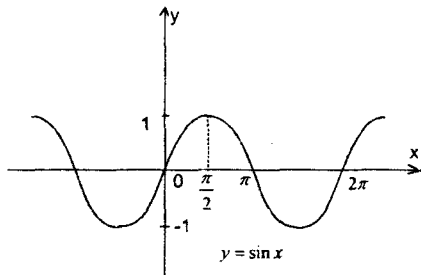
$y = Cf(kx + p) + b$ преобразуют к виду $y = Cf\left(k\left(x + \frac{p}{k}\right)\right) + b$. Здесь

сдвиг вдоль оси OX на $\frac{p}{k}$ единиц.

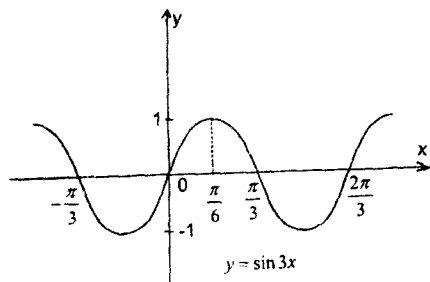
Например, $y = \log_3(1 - 2x) = \log_3\left(-2\left(x - \frac{1}{2}\right)\right)$. Значит, график функции $y = \log_3(1 - 2x)$ получается из графика функции $y = \log_3(-2x)$ переносом вдоль оси OX на $\frac{1}{2}$ единиц вправо.

Пример 7. Построить график функции

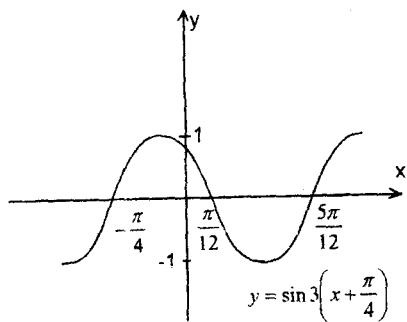
$$y = 2\sin\left(3x + \frac{3\pi}{4}\right) = 2\sin 3\left(x + \frac{\pi}{4}\right).$$



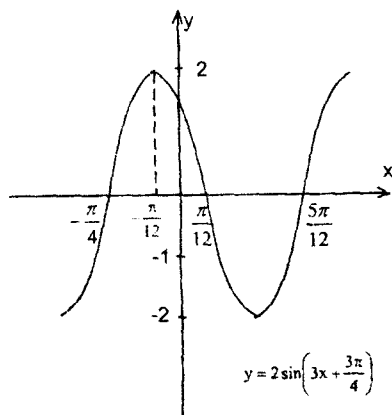
а



6



B



Г

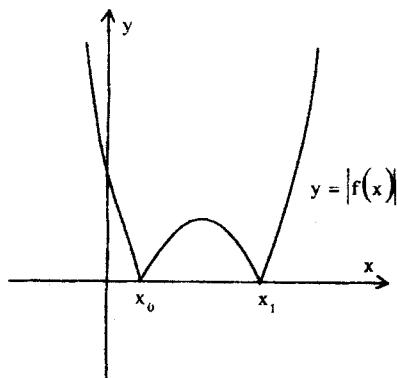
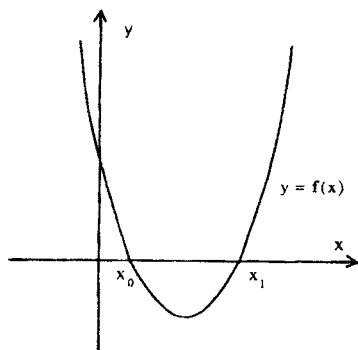
Отметим также следующее. Пусть заданы функция $y = f(x)$ и ее график. Тогда выражения $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$ и $|y| = f(x)$ определяются следующим образом:

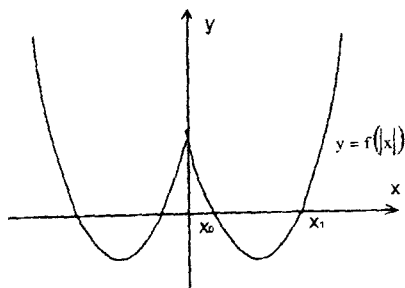
$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x) & \text{там, где } f(x) \geq 0, \\ -f(x) & \text{там, где } f(x) \leq 0; \end{cases}$$

$$y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \text{при } x \geq 0, \\ -f(x) & \text{при } x < 0; \end{cases}$$

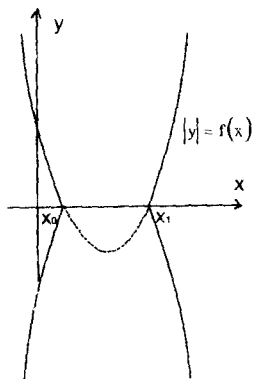
$$|y| = f(x) = \begin{cases} \emptyset & \text{там, где } f(x) < 0, \\ y = \pm f(x) & \text{там, где } f(x) \geq 0. \end{cases}$$

Графики этих функций приведены на рисунках, представленных ниже.





в



Задание 6.1

Для заданной функции $f(x) = x^4 + px^3 + qx^2 + gx + c$ и отрезка $[a; b]$ (коэффициенты приведены в таблице) найдите:

- промежутки возрастания, убывания и точки экстремума;
- наибольшие и наименьшие значения функции на отрезке $[a; b]$.

№ варианта	p	q	г	c	a	b
1	12	52	96	-5	-5	0
2	-8/3	-2	8	3	0	3
3	16/3	2	-24	1	-4	0
4	8/3	-10	-24	2	-2	3
5	-16/3	12	0	-1	-2	2

№ варианта	p	q	r	c	a	b
6	8/3	2	-8	1	-3	1
7	32/3	-38	48	-3	-3	1
8	-4/3	-12	0	5	-3	1
9	4	-8	-48	1	-4	1
10	4/3	-18	-36	2	-2	4
11	20/3	4	-32	-1	-3	2
12	-28/3	28	-8	3	0	3
13	20/3	-4	-36	-1	-3	3
14	16/3	-8	-64	2	-3	3
15	16/3	-18	-144	1	-4	1
16	4/3	-8	-16	-3	-3	1
17	28/3	24	0	5	-3	1
18	-20/3	2	24	1	0	4
19	4	-20	-96	0	-1	4
20	8/3	-18	-72	-1	-3	1
21	0	-26	-48	6	-2	2
22	-6/3	6	0	5	-1	2
23	8	22	24	-1	-2	0
24	4	-2	-12	2	-2	2
25	0	-14	-24	-3	-3	0
26	-4/3	-20	-32	1	-3	1
27	-8/3	-10	24	-2	-2	2
28	-20/3	12	0	3	-1	1
29	-4/3	-8	16	-4	0	3
30	-4/3	-4	0	-5	-2	1

Задание 6.2

Исследовать и построить графики функций:

а) $y = \frac{Bx^3}{x^2 + Bx \pm C} (-1)^n$; б) $y = e^{\frac{1}{x^2 + Bx + C}}$

Коэффициенты B, C приведены в таблице, n – номер варианта (в задании б) точное нахождение точек перегиба не предполагается).

№ вар.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
B	2	3	4	1	2	3	4	5	7	-2	-1	1	2	3	4	5	-2
C	3	4	5	6	8	10	12	16	18	3	6	12	15	18	21	24	8

№ вар.	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
В	-1	-4	-3	-2	-1	-5	-3	-4	-4	-3	-2	2	1
С	2	21	18	15	12	16	10	5	12	4	8	24	2

Задание 6.3

Построить графики функций с помощью производной первого порядка.

$$1) y = 2x - 3\sqrt[3]{x^2}; \quad 16) y = \sqrt{x^2 + 5x - 6};$$

$$2) y = x \sin x; \quad 17) y = \sqrt[3]{x^2} - x;$$

$$3) y = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{x^2}; \quad 18) y = \sqrt{x^2 - x^4};$$

$$4) y = \sqrt{x^2 - 4x}; \quad 19) y = \frac{1}{e^x - 1};$$

$$5) y = \sqrt[3]{x^2 + 6x + 8}; \quad 20) y = e^{\frac{1}{x}} - x;$$

$$6) y = \sin x + \ln \sin x; \quad 21) y = x - \cos x;$$

$$7) y = \sqrt[3]{x(x+2)}; \quad 22) y = x + \frac{\ln x}{x};$$

$$8) y = \cos x - \ln \cos x; \quad 23) y = e^{\ln x};$$

$$9) y = \frac{\sin x}{x}; \quad 24) y = e^{\operatorname{ctg} x};$$

$$10) y = x - \ln(x+1); \quad 25) y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^3;$$

$$11) y = x - 2 \operatorname{arctg} x; \quad 26) y = \sqrt{x^2 + 4x + 3};$$

$$12) 17) y = x^2 - 5x; \quad 27) y = \sqrt{x^3 - x};$$

$$13) y = 3\sqrt[3]{(x+4)^2} - 2x - 8; \quad 28) y = x + \sin x;$$

$$14) y = e^{\sin x} - \sin x; \quad 29) y = (x-1)^{\frac{2}{3}}(x+1)^3;$$

$$15) y = x\sqrt{x-1}; \quad 30) y = x^2 \cos x.$$

Задание 6.4

Исследовать и построить графики функций.

$$1) y = (2x+3)e^{-2x}; \quad 2) y = \ln \frac{x}{x+2} + 1;$$

3) $y = \frac{e^{x+2}}{x+2}$;

4) $y = 3 \ln \frac{x}{x-3} + 1$;

5) $y = \frac{e^{2-x}}{2-x}$;

6) $y = \ln \frac{x}{x-2} - 2$;

7) $y = \frac{e^{2x+1}}{2x+1}$;

8) $y = (3x+5)e^{-x^2}$;

9) $y = (3-x)e^{-3x}$;

10) $y = \ln \frac{x+5}{x} - 2$;

11) $y = \ln \frac{x+6}{x} - 1$;

12) $y = (x+2)^2 e^{-3x}$;

13) $y = 2xe^{-2x^2}$;

14) $y = 2 \ln \frac{x-1}{x} + 1$;

15) $y = \ln \frac{x-4}{x} + 2$;

16) $y = x^2 e^{-x}$;

17) $y = (x^2 + 2x)e^{-x}$;

18) $y = (3x-1)e^{4x}$;

19) $y = x^3 \cdot e^{-x}$;

20) $y = (4x+5)e^{-2x}$;

21) $y = (x^2 - 2x)e^x$;

22) $y = \ln \frac{x}{x+5} - 1$;

23) $y = \frac{e^{3x-5}}{3x-5}$;

24) $y = x^2 e^{-x^2}$;

25) $y = (4-3x)e^{-3x}$;

26) $y = 3 - 3 \ln \frac{x}{x+4}$;

27) $y = \frac{e^{3x+2}}{3x+2}$;

28) $y = (3x+2)e^{-4x}$;

29) $y = \frac{e^{3-x}}{3-x}$;

30) $y = 2 \ln \frac{x+3}{x} - 2$.

Задание 6.5

Исследовать и построить графики функций.

1) $y = \left(\frac{x-2}{x+3} \right)^2$;

2) $y = \frac{x}{x^4-1}$;

3) $y = \frac{x}{x^2+4x+3}$;

4) $y = \frac{x^2+2x+1}{x^2+6x+9}$;

5) $y = \frac{2}{x^2 - 4x}$;

6) $y = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^2 + 3x + 2}$;

7) $y = \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}$;

8) $y = \frac{4}{3 + 2x - x^2}$;

9) $y = \frac{x^2 + 4x + 8}{x + 2}$;

10) $y = \frac{x}{x^3 + 27}$;

11) $y = \frac{x}{x^2 + 5x + 4}$;

12) $y = \frac{x^2 - 3x - 6}{x + 2}$;

13) $y = \frac{x^2 + 4x - 6}{x^2 + 5x - 6}$;

14) $y = \frac{x}{x^2 + 2x + 5}$;

15) $y = \frac{x}{x^3 - 1}$;

16) $y = \frac{x^2 + 6x + 6}{x^2 + 7x + 6}$;

17) $y = \frac{x + 3}{(x - 1)^2}$;

18) $y = \frac{x + 2}{x^3 + 8}$;

19) $y = \frac{x + 1}{x^2 + 4x + 4}$;

20) $y = \left(\frac{x + 4}{x - 2}\right)^2$;

21) $y = \frac{x^2 + 3x + 3}{x^2 + 4x + 3}$;

22) $y = \frac{x - 1}{(x + 3)^2}$;

23) $y = \frac{x^2 - 5x + 15}{x - 3}$;

24) $y = \frac{x^2 + 4x + 4}{(x + 1)^2}$;

25) $y = \frac{1}{x^4 - 1}$;

26) $y = \frac{x^2 - 2x - 6}{x + 3}$;

27) $y = \frac{x^2 - 6x + 9}{x^2 + 10x + 25}$;

28) $y = \frac{x}{x^2 + x - 2}$;

29) $y = \frac{x^2 + 3x - 3}{x - 1}$;

30) $y = \frac{x^2 + 4}{x^4 - 16}$.

Задание 6.6

Построить графики функций $y = p \sin(qx + r)$; $y = p \cos(qx + r)$;
 $y = p \log_2(qx + r)$; $y = p \log_{\frac{1}{2}}(qx + r)$; $y = p 3^{qx+r}$; $y = \frac{ax + b}{cx + d}$, взяв данные
 p, q, r, a, b, c, d в таблице (№ – номер варианта)

№	p	q	r	a	b	c	d
1	$-\frac{1}{2}$	3	$-\frac{3}{2}$	3	2	3	1
2	3	2	4	2	5	1	7
3	2	$\frac{1}{2}$	3	4	-3	3	5
4	$-\frac{5}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	7	9	1	2
5	$\frac{6}{5}$	3	$\frac{1}{2}$	4	-2	2	3
6	$\frac{3}{2}$	2	-5	1	-3	2	4
7	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	1	3	-3
8	5	3	-2	-1	3	6	2
9	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$	2	3	-7	2	5
10	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	-4	-1	4	-1	3
11	6	3	3	2	-7	3	5
12	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	4	-6	-2	3	4
13	$\frac{2}{3}$	4	3	5	-7	2	3
14	$\frac{6}{5}$	2	-2	17	-8	2	5
15	$-\frac{6}{5}$	2	3	-8	2	-4	3
16	$\frac{1}{2}$	2	4	1	15	-1	3
17	-3	$\frac{1}{4}$	2	2	10	3	-2
18	$-\frac{1}{3}$	4	2	6	3	1	-7
19	3	$\frac{1}{3}$	4	-3	4	1	5
20	$\frac{1}{3}$	3	2	-4	5	2	-7
21	-2	$\frac{1}{4}$	3	-3	8	-1	3
22	$\frac{4}{3}$	3	4	-5	4	2	3
23	$\frac{3}{4}$	2	1	-3	5	1	-8
24	$-\frac{4}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	3	-1	1

№	p	q	r	a	b	c	d
25	$\frac{5}{3}$	3	-4	1	7	2	3
26	$\frac{3}{5}$	4	-2	-7	3	2	4
27	3	2	$\frac{1}{5}$	2	-25	1	-15
28	4	3	$-\frac{2}{3}$	-4	15	2	4
29	2	$\frac{1}{2}$	3	-7	2	1	4
30	$\frac{1}{3}$	2	-1	-1	8	1	9

Задание 6.7

Построить графики следующих функций:

$$1) y = \sqrt{(x+1)^2} + \sqrt{(x-2)^2}; \quad 12) y = \left| \log_{\frac{1}{2}} |x^2 - 1| \right|;$$

$$2) y = \left| x + \frac{1}{x} \right|; \quad 13) y = \sqrt{(3+x)^2} - \sqrt{(x-1)^2};$$

$$3) y = \frac{|x-1|}{x-1} + \frac{|x+2|}{x+2}; \quad 14) y = |x| + \frac{1}{x};$$

$$4) y = \ln |\sin x|; \quad 15) y = |\log_3 |x-3||;$$

$$5) y = \log_2 |x^2 - x|; \quad 16) y = \frac{x+1}{|x+1| - x};$$

$$6) y = \sqrt{(1-x)^2} + \sqrt{(x+2)^2}; \quad 17) y = \sqrt{1 - \sin^2 2x};$$

$$7) y = \frac{|3-x|}{x-3} + \frac{|x+1|}{x+1}; \quad 18) y = \left(\frac{1}{2} \right)^{|x|-1};$$

$$8) y = \lg |\cos x|; \quad 19) y = \sqrt{(2x+3)^2} - \sqrt{(3-x)^2};$$

$$9) y = x|x-3| + |x|; \quad 20) y = \frac{|4-2x|}{2x-4} + \frac{|x-3|}{x-3};$$

$$10) y = 10^{\frac{|x+1|}{x}}; \quad 21) y = \log_2 |x|x|-1|;$$

$$11) y = \sqrt{(2x-4)^2} + \sqrt{(2+x)^2}; \quad 22) y = \frac{x+2}{|x+2|-x};$$

23) $y = \left| x - \frac{1}{x} \right|;$

27) $y = \frac{x}{|x|} \sqrt{1 - \cos^2 x};$

24) $y = \log_3 |x^2 - 4|;$

28) $y = \log_2 |\sin x \cos x|;$

25) $y = |\sin x| + |\cos x|;$

29) $y = \sqrt{(4-x)^2} - \sqrt{(3+x)^2};$

26) $y = 2^{|x|};$

30) $y = \left| \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right|.$

Задание 6.8

Построить графики следующих функций:

а) $y = f(x);$ б) $y = |f(x)|;$ в) $y = f(|x|);$ г) $|y| = f(x);$

д) $y = |f(|x|)|;$ е) $|y| = |f(x)|;$ ж) $|y| = f(|x|).$

1) $y = 3x - x^2 + 4,$ $y = \log_2 x;$

2) $y = x^2 - 3x - 10,$ $y = \frac{1}{x-1};$

3) $y = 6x - x^2 - 5,$ $y = \sqrt{2x};$

4) $y = x^2 - 4x + 3,$ $y = \sin 3x;$

5) $y = x^2 - 2x - 8,$ $y = \log_{0.5}(-x);$

6) $y = 7x - x^2,$ $y = \frac{1}{x+2};$

7) $y = x^2 - 7x + 12,$ $y = \sqrt{x+2};$

8) $y = x^2 - x - 6,$ $y = \operatorname{tg} x;$

9) $y = 3x - x^2 - 2,$ $y = \log_3(x+1);$

10) $y = x^2 - 5x + 4,$ $y = \frac{x+1}{x-1};$

11) $y = 4x - x^2 + 5,$ $y = \sqrt{3-x};$

12) $y = x^2 - 3x - 4,$ $y = \cos 4x;$

13) $y = 4x - x^2 - 3,$ $y = \log_{0.5}(2-x);$

14) $y = x^2 - 7x + 10,$ $y = \frac{x-1}{x+1};$

15) $y = x^2 - 2x - 3,$ $y = \sqrt{x-1};$

16) $y = x^2 - 4x - 12,$ $y = \operatorname{ctg} x;$

- 17) $y = x^2 - 5x$, $y = \lg(2x)$;
 18) $y = 5x - x^2 - 6$, $y = \frac{x-2}{x+1}$;
 19) $y = x^2 - 6x + 5$, $y = \sqrt{2x+3}$;
 20) $y = x^2 + x - 2$, $y = -\sin 4x$;
 21) $y = 6x - x^2 - 8$, $y = \log(1-x)$;
 22) $y = x^2 - 2x$, $y = \frac{x+3}{x-1}$;
 23) $y = x^2 - 3x + 2$, $y = \sqrt[3]{x+1}$;
 24) $y = 5x - x^2 - 4$, $y = \operatorname{tg} 2x$;
 25) $y = x^2 - 4x - 5$, $y = \log_{0,1}(-x)$;
 26) $y = 7x - x^2 - 10$, $y = \frac{1-x}{x+2}$;
 27) $y = x^2 - 5x + 6$, $y = \sqrt[3]{x-3}$;
 28) $y = 6x - x^2$, $y = \operatorname{ctg} 2x$;
 29) $y = x^2 - 6x + 8$, $y = \log_3(2x)$;
 30) $y = 7x - x^2 - 12$, $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

Задание 6.9

Построить на плоскости XOY следующие области.

- 1) $\begin{cases} y \geq \frac{x}{2} + 2, \\ x \geq \frac{y}{2} + \frac{1}{2}, \\ y < 8 - x; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y \geq 2 - \frac{x}{2}, \\ y \geq 3x - 5, \\ y < \frac{2}{3}x + 2; \end{cases}$
- 2) $\begin{cases} y \geq 3 - \frac{3}{2}x, \\ y > 2x - 4, \\ y \leq 3 + \frac{x}{4}; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y \leq 2, \\ y \geq -x, \\ y < x; \end{cases}$

$$5) \begin{cases} x \geq 2 - \frac{y}{2}, \\ y < \frac{x}{3} + 1\frac{2}{3}, \\ y \geq \frac{3}{2}x - 3; \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} y \leq 2x + 6, \\ y \geq \frac{x}{2} + 3, \\ y < 6 - x; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} y \geq x + 4, \\ y > -\frac{x}{2}, \\ y \leq 4 + \frac{x}{2}; \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} y \geq \frac{x}{3} + 1, \\ x \geq \frac{3}{4}y - 3, \\ y < -\frac{2}{3}x + 4; \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} x \geq 0, \\ y \leq 3 - \frac{x}{4}, \\ y \geq \frac{1}{2}x; \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} y \geq 0, \\ y \leq x, \\ y < 4 - x; \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} y \leq x - 2, \\ y \geq -2 - \frac{2}{3}x, \\ x < 2 - \frac{y}{4}; \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} y \leq -2 - x, \\ y \geq -\frac{2}{3}x - 2, \\ y < 4x + 8; \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} y \geq 2 - \frac{2x}{3}, \\ y < 2 + \frac{x}{2}, \\ x \leq 3 - \frac{y}{3}; \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} x \leq 2, \\ y \leq 2 + x, \\ y \geq 2 - x; \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} y \geq -2 \\ y \leq -2 + x; \\ x > 2 - y \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} y \geq 3\left(\frac{1}{2} - \frac{x}{2}\right), \\ y \geq 2x - 2, \\ y < \frac{x}{4} + 3\frac{1}{4}; \end{cases}$$

$$17) \begin{cases} y \geq 2 - x, \\ y < \frac{x}{4} + 4\frac{1}{2}, \\ y \geq 4x - 3; \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} y \leq x, \\ y > -2x + 3, \\ y \geq \frac{x}{4} - \frac{3}{2}; \end{cases}$$

$$19) \begin{cases} y \geq -3 - x, \\ y \geq -3 + 2x, \\ y < \frac{x}{2} + \frac{3}{2}; \end{cases}$$

$$20) \begin{cases} y < 2, \\ y \geq 2 + x, \\ y \geq -2 - x; \end{cases}$$

$$21) \begin{cases} y \geq \frac{x+1}{4}, \\ y \leq \frac{2}{3}(x+1), \\ y < 4 - x; \end{cases}$$

$$22) \begin{cases} y \geq 1 - x, \\ y \leq \frac{x}{4} + 3\frac{1}{2}, \\ y > 1 + \frac{3}{2}x; \end{cases}$$

$$23) \begin{cases} y \geq 0, \\ x \geq 4 - \frac{y}{3}, \\ x \leq -2 - \frac{y}{3}; \end{cases}$$

$$24) \begin{cases} y \leq 4 + 2x, \\ x > -2 - 2y, \\ y \leq 4 - 3x; \end{cases}$$

$$25) \begin{cases} y < 2, \\ y \leq 2 + x, \\ y > -3 - \frac{3}{2}x; \end{cases}$$

$$26) \begin{cases} y \geq 0, \\ y \geq 3x, \\ y < 2 + x; \end{cases}$$

$$27) \begin{cases} y \geq -2 - x, \\ y \leq 2 + x, \\ y > -2 + 3x; \end{cases}$$

$$28) \begin{cases} y \leq 3 + \frac{3}{2}x, \\ y \leq 3 - 4x, \\ y > -\frac{x}{3} - \frac{2}{3}; \end{cases}$$

$$29) \begin{cases} y \geq -3 + x, \\ y \geq -3 - 6x, \\ y < -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4}; \end{cases}$$

$$30) \begin{cases} y < 2 + \frac{x}{3}, \\ y < 2 - \frac{2}{3}x, \\ y \geq -\frac{1}{5} - \frac{2}{5}x. \end{cases}$$

VII. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

1. Неопределённый интеграл

Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$, заданной на числовом множестве X , если $F'(x) = f(x)$ для любого $x \in X$. Совокупность всех первообразных функции $f(x)$ называется неопределённым интегралом от $f(x)$ и обозначается $\int f(x) dx$. Любые две первообразные для одной функции отличаются на константу (постоянную величину).

Другими словами, имеет место равенство $\int f(x) dx = F(x) + C$, где $F(x)$ – некоторая (фиксированная) первообразная для $f(x)$, а C пробегает всевозможные числовые значения.

Не всякая функция имеет первообразную. Однако если $f(x)$ – непрерывная функция, то она имеет первообразную.

2. Таблица основных неопределённых интегралов

$$\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C, \quad p \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C,$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 - a^2} \right| + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + a^2} \right) + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C,$$

$$\int \operatorname{sh} x = \operatorname{ch} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C,$$

$$\int \operatorname{ch} x = \operatorname{sh} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C,$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C, \quad \int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{cth} x + C.$$

3. Основные свойства неопределённого интеграла

$$1) \int df(x) = f(x) + C;$$

$$2) \int k f(x) dx = k \int f(x) dx, \text{ где } k - \text{ постоянная величина};$$

$$3) \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$$

(свойства 2 и 3 составляют так называемое свойство линейности).

Пример 1. Найти $\int \left(4\sqrt{x} - \frac{2}{x^5} - \frac{6}{x} + 7 \sin x + \frac{5}{\sqrt{9-x^2}} - 3 \right) dx$.

Решение. $\int \left(4x^{1/2} - 2x^{-5} - \frac{6}{x} + 7 \sin x + \frac{5}{\sqrt{9-x^2}} - 3 \right) dx =$

$$= 4 \int x^{1/2} dx - 2 \int x^{-5} dx - 6 \int \frac{dx}{x} + 7 \int \sin x dx + 5 \int \frac{dx}{\sqrt{3^2-x^2}} - 3 \int dx =$$

$$= 4 \cdot \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} - 2 \cdot \frac{x^{-5+1}}{-5+1} - 6 \ln|x| - 7 \cos x + 5 \arcsin \frac{x}{3} - 3x + C =$$

$$= \frac{8}{3} x^{3/2} + \frac{1}{2x^4} - 6 \ln|x| - 7 \cos x + 5 \arcsin \frac{x}{3} - 3x + C.$$

4. Интегрирование методом замены переменного

Теорема 1. Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, то при условии и дифференцируемости функции $\varphi(x)$ справедлива формула

$$\int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) + C$$

или

$$\int f(\varphi(x)) d(\varphi(x)) = F(\varphi(x)) + C.$$

Пример 2. Найти интегралы: а) $\int \sqrt{3x-2} dx$; б) $\int \operatorname{tg} x dx$;

в) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-9x^8}}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \text{а) } \int \sqrt{3x-2} dx &= \frac{1}{3} \int (3x-2)^{1/2} d(3x-2) = [3x-2=t] = \frac{1}{3} \int t^{1/2} dt = \\ &= \frac{1}{3} \cdot \frac{t^{1/2+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{9} \cdot t^{3/2} + C = \frac{2}{9} (3x-2)^{3/2} + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{б) } \int \operatorname{tg} x dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = - \int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = [\cos x = t] = \\ &= - \int \frac{dt}{t} = - \ln |t| + C = - \ln |\cos x| + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-9x^8}} &= \frac{1}{12} \int \frac{(3x^4)'}{\sqrt{1-(3x^4)^2}} dx = \frac{1}{12} \int \frac{d(3x^4)}{\sqrt{1-(3x^4)^2}} = \\ &= \frac{1}{12} \arcsin(3x^4) + C. \end{aligned}$$

Пример 3. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{\ln \operatorname{arctg} 5x \cdot \operatorname{arctg} 5x (1+25x^2)}}$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{\ln \operatorname{arctg} 5x \cdot \operatorname{arctg} 5x (1+25x^2)}} &= \frac{1}{5} \int \frac{d(\operatorname{arctg} 5x)}{\sqrt{\ln \operatorname{arctg} 5x \cdot \operatorname{arctg} 5x}} = \\ &= [\operatorname{arctg} 5x = t] = \frac{1}{5} \int \frac{dt}{t \sqrt{\ln t}} = \frac{1}{5} \int \frac{d(\ln t)}{\sqrt{\ln t}} = [\ln t = p] = \int p^{1/2} dp = \\ &= \frac{1}{5} \cdot \frac{p^{3/2}}{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{5} \sqrt{p} + C = \frac{2}{5} \sqrt{\ln t} + C = \frac{2}{5} \sqrt{\ln(\operatorname{arctg} 5x)} + C. \end{aligned}$$

Пример 4. Найти $\int \frac{dx}{x - \sqrt{x}}$.

Решение. Положим $x = t^2$.

Тогда $dx = d(t^2) = (t^2)' dt = 2t dt$ и

$$\int \frac{dx}{x - \sqrt{x}} = \int \frac{2t dt}{t^2 - t} = 2 \int \frac{dt}{t-1} = 2 \int \frac{d(t-1)}{t-1} = 2 \ln|t-1| + C = 2 \ln|\sqrt{x}-1| + C$$

Пример 5. Найти $\int \frac{dx}{x\sqrt{16-x^2}}$.

Решение. Применим подстановку $x = \frac{4}{t}$.

$$\text{Тогда } dx = \left(\frac{4}{t}\right)' dt = -\frac{4}{t^2} dt.$$

$$\begin{aligned} \text{Имеем } \int \frac{dx}{x\sqrt{16-x^2}} &= \int \frac{-\frac{4}{t^2} dt}{\frac{4}{t} \sqrt{16 - \frac{16}{t^2}}} = - \int \frac{dt}{t \cdot \sqrt{\frac{16t^2 - 16}{t^2}}} = -\frac{1}{4} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}} = \\ &= -\frac{1}{4} \ln|t + \sqrt{t^2 - 1}| + C = -\frac{1}{4} \ln\left|\frac{4}{x} + \sqrt{\frac{16}{x^2} - 1}\right| + C. \end{aligned}$$

5. Интегрирование по частям

Если $u(x)$, $v(x)$ дифференцируемы, то справедлива формула интегрирования по частям

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Эту формулу следует применять в тех случаях, когда подынтегральное выражение $v du$ проще исходного выражения $u dv$.

Ниже приведены основные типы интегралов, берущихся по частям.

I тип	II тип	III тип (интегралы, приводящиеся к себе)
$\int \underline{P_n(x)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \sin \alpha x \\ \cos \alpha x \end{array} \right\} dx$	$\int \underline{P_n(x)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \underline{\arcsin x} \\ \underline{\arccos x} \\ \underline{\operatorname{arctg} x} \\ \underline{\operatorname{arcctg} x} \end{array} \right\}^m dx$	$\int \underline{e^{\alpha x}} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \sin \beta x \\ \cos \beta x \end{array} \right\} dx$
$\int \underline{P_n(x)} \cdot \left\{ \begin{array}{l} e^{\alpha x} \\ a^{\beta x} \end{array} \right\} dx$	$\int \underline{P_n(x)} \cdot \underline{(\ln x)^m} dx$ $\int x^\alpha \underline{(\ln x)^m} dx, \alpha \neq -1$	$\int \underline{\sin(\ln x)} dx$ $\int \underline{\cos(\ln x)} dx$ $\int \underline{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$ $\int \underline{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx$

За u принимаются подчёркнутые функции, за dv – остальная часть подынтегрального выражения. $P_n(x)$ – многочлен степени n . Интегралы I типа берутся путём интегрирования по частям n раз, II типа – m раз, III типа (за исключением двух последних) – 2 раза (причём, в первом интеграле III типа оба раза за u можно принять как $e^{\alpha x}$, так и тригонометрические функции $\sin \beta x$, $\cos \beta x$).

По частям могут быть взяты и интегралы, не вошедшие в эту таблицу.

Пример 6. Найти интегралы:

а) $\int \ln x dx$; б) $\int (x^2 - 3x + 4) \sin 2x dx$; в) $\int e^{2x} \cos 3x dx$.

Решение. а) $\int \ln x dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{1}{x} dx, \\ dv = dx, \quad v = x \end{array} \right] =$

$$= x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C.$$

Здесь и ниже при нахождении v при известном dv мы полагаем $C = 0$ (как в этом случае: $dv = dx$, отсюда следует $v = x + C$, но мы берём одну из первообразных $v = x$).

$$\begin{aligned}
 6) \int (x^2 - 3x + 4) \sin 2x \, dx &= \left[\begin{array}{l} u = x^2 - 3x + 4, \quad du = (2x - 3) \, dx \\ dv = \sin 2x \, dx, \quad v = -\frac{1}{2} \cos 2x \end{array} \right] = \\
 &= -\frac{1}{2} (x^2 - 3x + 4) \cos 2x + \frac{1}{2} \int (2x - 3) \cos 2x \, dx = \\
 &= \left[\begin{array}{l} u = 2x - 3, \quad du = 2 \, dx \\ dv = \cos 2x \, dx, \quad v = \frac{1}{2} \sin 2x \end{array} \right] = \dots = \\
 &= -\frac{1}{2} (x^2 - 3x + 4) \cos 2x + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} (2x - 3) \sin 2x - \frac{1}{2} \int 2 \sin 2x \, dx \right] = \\
 &= -\frac{1}{2} (x^2 - 3x + 4) \cos 2x + \frac{1}{4} (2x - 3) \sin 2x - \frac{1}{2} \int \sin 2x \, dx = \\
 &= -\frac{1}{2} (x^2 - 3x + 4) \cos 2x + \frac{1}{4} (2x - 3) \sin 2x + \frac{1}{4} \cos 2x + C.
 \end{aligned}$$

в) Обозначим $J = \int e^{2x} \cos 3x \, dx$. Имеем

$$\begin{aligned}
 \int e^{2x} \cos 3x \, dx &= \left[\begin{array}{l} u = e^{2x}, \quad du = 2e^{2x} \, dx \\ dv = \cos 3x \, dx, \quad v = \frac{1}{3} \sin 3x \end{array} \right] = \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x - \\
 -\frac{2}{3} \int e^{2x} \sin 3x \, dx &= \left[\begin{array}{l} u = e^{2x}, \quad du = 2e^{2x} \, dx \\ dv = \sin 3x \, dx, \quad v = -\frac{1}{3} \cos 3x \end{array} \right] = \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x - \\
 -\frac{2}{3} \left[-\frac{1}{3} e^{2x} \cos 3x + \frac{2}{3} \int e^{2x} \cos 3x \, dx \right] &= \frac{1}{3} e^{2x} \sin 3x + \frac{2}{9} e^{2x} \cos 3x - \\
 -\frac{4}{9} \int e^{2x} \cos 3x \, dx.
 \end{aligned}$$

Получается, что $J = \frac{2e^{2x}}{9} \left(\frac{3}{2} \sin 3x + \cos 3x \right) - \frac{4}{9} J$.

Отсюда находим (учитывая, что J является семейством функций, отличающихся друг от друга на постоянную величину)

$$J = \frac{2}{13} \left(\frac{3}{2} \sin 3x + \cos 3x \right) + C.$$

6. Интегрирование рациональных функций

Интегрирование рациональной функции

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0}, \quad a_n b_m \neq 0, \text{ являющейся}$$

правильной дробью (т.е. при $\deg P_n(x) = n < \deg Q_m(x) = m$), производится путём представления этой функции в виде суммы простых дробей. Если же дробь является неправильной ($\deg P_n(x) = n \geq \deg Q_m(x) = m$), то её представляют в виде суммы многочлена и правильной дроби, затем интегрируют эти слагаемые.

Пример 7. Найти интегралы: а) $\int \frac{(3x-1)dx}{x^2-4x+13}$; б) $\int \frac{x+3}{x^2-x-6} dx$.

Решение. а) $\int \frac{(3x-1)dx}{x^2-4x+13} = \int \frac{(3x-1)dx}{x^2-4x+4+9} = \int \frac{(3x-1)dx}{(x-2)^2+9} =$

$$= \left[\begin{array}{l} x-2=t, \\ x=t+2, \quad dx=dt \end{array} \right] = \int \frac{3(t+2)}{t^2+9} dt = 3 \int \frac{t dt}{t^2+9} + 6 \int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{3}{2} \int \frac{d(t^2+9)}{t^2+9} +$$

$$+ 5 \int \frac{dt}{t^2+3^2} = \frac{3}{2} \ln(t^2+9) + \frac{5}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = \frac{3}{2} \ln((x-2)^2+9) + \frac{5}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{3} +$$

$$+ C = \frac{3}{2} \ln(x^2-4x+13) + \frac{5}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{3} + C.$$

$$б) \int \frac{(x+3)dx}{x^2-x-6} = \int \frac{(x+3)dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}} = \left[\begin{array}{l} x-\frac{1}{2}=t, \\ x=t+\frac{1}{2}, \quad dx=dt \end{array} \right] = \int \frac{t+\frac{1}{2}+3}{t^2-\frac{25}{4}} dt =$$

$$= \int \frac{t dt}{t^2-\frac{25}{4}} + \frac{7}{2} \int \frac{dt}{t^2-\frac{25}{4}} = \frac{1}{2} \int \frac{d\left(t^2-\frac{25}{4}\right)}{t^2-\frac{25}{4}} + \frac{7}{2} \int \frac{dt}{t^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| t^2 - \frac{25}{4} \right| + \frac{7}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} \ln \left| \frac{t-\frac{5}{2}}{t+\frac{5}{2}} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} \right| +$$

$$+ \frac{7}{10} \ln \left| \frac{x - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}}{x - \frac{1}{2} + \frac{5}{2}} \right| + C = \frac{1}{2} \ln |x^2 - x - 6| + \frac{7}{10} \ln \left| \frac{x-3}{x+2} \right| + C.$$

Пример 8. Найти интегралы: а) $\int \frac{(2x+3)dx}{(x+1)^2(x^2+2)}$;

б) $\int \frac{x^2-3x+5}{x^4-8x} dx$; в) $\int \frac{x^4-3x^2+2x+7}{x^3-2x^2+x} dx$.

Решение. а) Найдём разложение подынтегральной функции

$$f(x) = \frac{2x+3}{(x+1)^2(x^2+2)} \text{ на сумму простых дробей:}$$

$$\frac{2x+3}{(x+1)^2(x^2+2)} = \frac{A_1}{x+1} + \frac{A_2}{(x+1)^2} + \frac{Bx+C}{x^2+2};$$

$$A_1(x+1)(x^2+2) + A_2(x^2+2) + (Bx+C)(x+1)^2 = 2x+3;$$

$$A_1(x^3+x^2+2x+2) + A_2x^2+2A_2 + (Bx+C)(x^2+2x+1) = 2x+3;$$

$$A_1x^3 + A_1x^2 + 2A_1x + 2A_1 + A_2x^2 + 2A_2 + Bx^3 + 2Bx^2 + Bx + Cx^2 + 2Cx + C = 2x+3;$$

$$(A_1+B)x^3 + (A_1+A_2+2B+C)x^2 + (2A_1+B+2C)x + (2A_1+2A_2+C) = 2x+3.$$

$$\begin{cases} A_1+B=0, \\ A_1+A_2+2B+C=0, \\ 2A_1+B+2C=2, \\ 2A_1+2A_2+C=3. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1=8/9, \\ A_2=1/3, \\ B=-8/9, \\ C=5/9. \end{cases}$$

$$\text{Таким образом, } \int f(x) dx = \frac{8}{9} \int \frac{dx}{x+1} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{1}{9} \int \frac{8x-5}{x^2+2} dx =$$

$$= \frac{8}{9} \ln|x+1| - \frac{1}{3(x+1)} - \frac{4}{9} \int \frac{d(x^2+2)}{x^2+2} + \frac{5}{9} \int \frac{dx}{x^2+(\sqrt{2})^2} =$$

$$= \frac{8}{9} \ln|x+1| - \frac{1}{3(x+1)} - \frac{4}{9} \ln(x^2+2) + \frac{5}{9\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

$$б) \int \frac{x^2 + 3x - 5}{x^4 - 8x} dx = \int \frac{(x^2 + 3x - 5) dx}{x(x-2)(x^2 + 2x + 4)}.$$

Разложим подынтегральную функцию $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 5}{x(x-2)(x^2 + 2x + 4)}$ на

сумму простых дробей:

$$\frac{x^2 - 3x + 5}{x(x-2)(x^2 + 2x + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 2x + 4};$$

$$A(x-2)(x^2 + 2x + 4) + Bx(x^2 + 2x + 4) + (Cx + D)x(x-2) = x^2 - 3x + 5. \quad (1)$$

$$x = 0; \quad -8A = +5. \Rightarrow A = -5/8,$$

$$x = 2; \quad 24B = 3. \Rightarrow B = 1/8.$$

Из равенства (1) следует (приравниваются коэффициенты при x^3 и x):

$$\begin{cases} A + B + C = 0, \\ 4B - 2D = -3. \end{cases}$$

Отсюда, зная уже $A = -5/8$, $B = 1/8$, находим $C = 1/2$, $D = 7/4$. Таким

$$\text{образом, } \int \frac{(x^2 - 3x + 5)}{x^4 - 8x} dx = -\frac{5}{8} \int \frac{dx}{x} + \frac{1}{8} \int \frac{dx}{x-2} + \frac{1}{4} \int \frac{(2x+7) dx}{x^2 + 2x + 4} =$$

$$= -\frac{5}{8} \ln|x| + \frac{1}{8} \ln|x-2| + \frac{1}{4} \int \frac{2x+2+5}{x^2 + 2x + 4} dx = -\frac{5}{8} \ln|x| + \frac{1}{8} \ln|x-2| +$$

$$+ \frac{1}{4} \int \frac{(x^2 + 2x + 4) dx}{x^2 + 2x + 4} + \frac{5}{4} \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 4} = -\frac{5}{8} \ln|x| + \frac{1}{8} \ln|x-2| +$$

$$+ \frac{1}{4} \int \frac{d(x^2 + 2x + 4)}{x^2 + 2x + 4} + \frac{5}{4} \int \frac{d(x+1)}{(x+1)^2 + (\sqrt{3})^2} = -\frac{5}{8} \ln|x| + \frac{1}{8} \ln|x-2| +$$

$$+ \frac{1}{4} \ln(x^2 + 2x + 4) + \frac{5}{4\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

в) Рациональная функция $f(x) = \frac{x^4 - 3x^2 + 2x + 7}{x^3 - 2x^2 + x}$ представляет собой неправильную дробь. Выделим целую часть делением уголком

$$\frac{-x^4 - 3x^2 + 2x + 7}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x + 2} + \frac{-x^4 - 3x^2 + 2x + 7 - (x^3 - 2x^2 + x)(x + 2)}{x(x-1)^2}$$

$$= \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x + 2} + \frac{-2x^3 - 4x^2 + 2x + 7}{x(x-1)^2}$$

Таким образом,

$$\frac{x^4 - 3x^2 + 2x + 7}{x^3 - 2x^2 + x} = x + 2 + \frac{7}{x^3 - 2x^2 + x} = x + 2 + \frac{7}{x(x-1)^2}.$$

Разложим правильную дробь $\frac{7}{x(x-1)^2}$ на сумму простых дробей:

$$\frac{7}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{(x-1)^2};$$

$$A(x-1)^2 + B_1x(x-1) + B_2x = 7; \quad (2)$$

$$x = 0; \quad A = 7;$$

$$x = 1; \quad B_2 = 7.$$

Сравнивая старшие коэффициенты в обеих частях равенства (2), находим $A + B_1 = 0$, $B_1 = -A = -7$. Таким образом,

$$\int f(x) dx = \int (x + 2) dx + 7 \int \frac{dx}{x} - 7 \int \frac{dx}{x-1} + 7 \int \frac{dx}{(x-1)^2} = \frac{x^2}{2} + 2x + 7 \ln|x| -$$

$$-7 \ln|x-1| - \frac{7}{x-1} + C.$$

7. Интегрирование тригонометрических функций

При интегрировании функций вида $\sin^n x \cdot \cos^m x$ лучше придерживаться следующего правила. 1) если хотя бы одно из чисел n или m – нечётное положительное число, то, отделяя первую степень соответствующего множителя, подводим его под знак дифференциала, а оставшуюся часть (чётную степень) этого множителя выражаем через её ко-функцию, пользуясь тождеством $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, и это приведёт к интегралу от степенной функции; 2) если n и m – чётные числа, то с помощью формул $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$ достигается упрощение вида подынтегральной функции.

Пример 9. Найти а) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx$; б) $\int \sin^4 x \cos^2 x dx$.

Решение. а) $\int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} dx = \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin x}{\cos^4 x} dx = -\int \frac{(1 - \cos^2 x) d(\cos x)}{\cos^4 x} =$
 $= [\cos x = t] = \int \frac{t^2 - 1}{t^4} dt = \int (t^{-2} - t^{-4}) dt = -\frac{1}{t} + \frac{1}{3t^3} + C = -\frac{1}{\cos x} +$
 $+\frac{1}{3\cos^3 x} + C;$

б) $\int \sin^4 x \cos^2 x dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^2 \frac{1 + \cos 2x}{2} dx =$
 $= \frac{1}{8} \int (\cos^3 2x - \cos^2 2x - \cos 2x + 1) dx =$
 $= \frac{1}{8} \left[\int (1 - \sin^2 2x) \frac{1}{2} d(\sin 2x) - \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx - \int \cos 2x dx + \int dx \right] =$
 $= \frac{1}{16} \int d(\sin 2x) - \frac{1}{16} \int \sin^2 2x d(\sin 2x) - \frac{1}{16} \int dx - \frac{1}{16} \int \cos 4x dx -$
 $-\frac{1}{16} \sin 2x + \frac{1}{8} x = \frac{1}{16} \sin 2x - \frac{1}{48} \sin^3 2x - \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x -$
 $-\frac{1}{16} \sin 2x + \frac{1}{8} x + C = \frac{1}{16} x - \frac{1}{48} \sin^3 2x - \frac{1}{64} \sin 4x + C.$

Интегрирование функций вида $\sin \alpha x \cos \beta x$, $\sin \alpha x \sin \beta x$, $\cos \alpha x \cos \beta x$ производится с помощью формул произведений синусов и косинусов.

Пример 10. Найти $\int \sin 2x \cos 4x dx$.

Решение. $\int \sin 2x \cos 4x dx = \frac{1}{2} \int (\sin(-2x)) + \sin(6x) dx =$
 $= \frac{1}{4} \cos 2x - \frac{1}{12} \cos 6x + C.$

Интегрирование функций вида $R(\sin x, \cos x)$, где R – рациональная функция двух переменных, производится с помощью замены $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$.

При этом $x = 2 \operatorname{arctg} t$, $dx = \frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}$,

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}.$$

Пример 11. Найти $\int \frac{dx}{1 + \sin x - \cos x}$.

Решение. $\int \frac{dx}{1 + \sin x - \cos x} = \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} \frac{x}{2} = t, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right] =$

$$= \int \frac{2dt}{(1+t^2) \left(1 + \frac{2t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2} \right)} = 2 \int \frac{dt}{1+t^2+2t-1+t^2} = \int \frac{dt}{t(t+1)} =$$

$$= \int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1} \right) dt = \ln|t| - \ln|t+1| + C = \ln \left| \frac{t}{t+1} \right| + C = \ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 1} \right| + C.$$

8. Интегрирование некоторых иррациональных функций

Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})$, где R – рациональная функция двух переменных, выделением полного квадрата приводятся к одному из следующих видов:

$$1) \int R(t, \sqrt{t^2 + a^2}) dt; \quad 2) \int R(t, \sqrt{t^2 - a^2}) dt; \quad 3) \int R(t, \sqrt{a^2 - t^2}) dt.$$

Эти последние интегралы находятся с помощью подстановок:

1) $t = a \operatorname{tgu}$ или $t = a \operatorname{shu}$; 2) $t = a/\operatorname{cosu}$ или $t = a \operatorname{chu}$;

3) $t = a \operatorname{sinu}$ или $t = a \operatorname{thu}$.

Пример 12. Найти $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}}$.

Решение. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}} = \left[\begin{array}{l} x = 2 \operatorname{sin} t, \quad t = \operatorname{arcsin} \frac{x}{2}, \\ dx = 2 \operatorname{cos} t dt \end{array} \right] =$

$$= \int \frac{2 \operatorname{cos} t dt}{2 \operatorname{sin} t \cdot \sqrt{4 - 4 \operatorname{sin}^2 t}} = \frac{1}{2} \int \frac{\operatorname{cos} t dt}{\operatorname{sin} t \operatorname{cos} t} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\operatorname{sin} t} =$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right| + C = \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{1}{2} \arcsin \frac{x}{2} \right) \right| + C = \frac{1}{2} \ln \sqrt{\frac{2 - \sqrt{4 - x^2}}{2 + \sqrt{4 - x^2}}} + C.$$

Пример 13. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}}$.

Решение. $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + 2x + 3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4 - (x-1)^2}} =$
 $= \int \frac{d(x-1)}{\sqrt{2^2 - (x-1)^2}} = \arcsin \frac{x-1}{2} + C.$

Пример 14. Вычислить $\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 4)^3}}$.

Решение.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 4)^3}} = \left. \begin{array}{l} x = 2 \operatorname{tg} t \\ dx = \frac{2 dt}{\cos^2 t} \\ \sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{4 \operatorname{tg}^2 t + 4} = \frac{2}{\cos t} \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{2 \cdot \cos^3 t dt}{8 \cos^2 t} = \frac{1}{4} \int \cos t dt = \frac{1}{4} \sin t + C =$$

$$= \left. \begin{array}{l} \text{выразим } \sin t \text{ через } \operatorname{tg} t, \text{ используя формулу} \\ 1 + \operatorname{ctg}^2 t = \frac{1}{\sin^2 t}, \quad \sin^2 t = \frac{\operatorname{tg}^2 t}{1 + \operatorname{tg}^2 t}, \quad \sin t = \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 t}} \\ \sin t = \frac{x}{\sqrt{4 + x^2}} \end{array} \right| = \frac{x}{4\sqrt{4 + x^2}} + C.$$

9. Определённый интеграл

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$. Разобьём этот отрезок точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ на n частей $[x_{k-1}, x_k]$, $1 \leq k \leq n$; обозначим $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$. Число $\lambda = \max \Delta x_k$, $1 \leq k \leq n$,

назовём диаметром разбиения. Возьмём в каждом частичном отрезке $[x_{k-1}; x_k]$ по точке t_k и образуем следующую сумму, называемую интегральной:

$$\sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k .$$

Если существует конечный предел интегральных сумм при $\lambda \rightarrow 0$, предел, не зависящий ни от способа разбиения отрезка $[a; b]$, ни от выбора точек $t_k \in [a_k; b_k]$, то функция $f(x)$ называется интегрируемой на $[a; b]$, а сам предел – определённым интегралом от $f(x)$ на $[a; b]$ и

обозначается $\int_a^b f(x) dx$.

По определению положим

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx, \int_a^a f(x) dx = 0 .$$

Если $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то она интегрируема на $[a; b]$.

К интегрируемым функциям относятся также:

- 1) монотонно возрастающие (убывающие) и ограниченные на $[a; b]$;
- 2) ограниченные и имеющие лишь конечное число точек разрыва на $[a; b]$.

Определённый интеграл обладает следующими свойствами:

1) если $f(x)$ интегрируема на большем из отрезков $[a; b]$, $[b; c]$, $[a; c]$, то $f(x)$ интегрируема и на двух других и при этом

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx ;$$

2) если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a; b]$, то $\alpha f(x) + \beta g(x)$ также интегрируема на $[a; b]$ и при этом

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx ;$$

3) если $|f(x)|$ интегрируема на $[a; b]$, то $f(x)$ также интегрируема на $[a; b]$ и при этом $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx ;$

4) если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a; b]$ и $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a; b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx ;$$

5) если $f(x)$ интегрируема на $[a; b]$ и $m \leq f(x) \leq M \quad \forall x \in [a; b]$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Теорема 2. Если $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$, непрерывной на $[a; b]$, то

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

(формула Ньютона–Лейбница).

Разность $F(b) - F(a)$ часто обозначают $F(x)|_a^b$.

Пример 15. Найти $\int_1^3 \left(x^2 - \frac{4}{x} + \frac{5}{1+x^2} \right) dx$.

Решение.

$$\int_1^3 \left(x^2 - \frac{4}{x} + \frac{5}{1+x^2} \right) dx = \left(\frac{1}{3} x^3 - 4 \ln x + 5 \operatorname{arctg} x \right) \Big|_1^3 =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot 3^3 - 4 \ln 3 + 5 \operatorname{arctg} 3 - \frac{1}{3} + 4 \ln 1 - 5 \operatorname{arctg} 1 =$$

$$= \frac{26}{3} - 4 \ln 3 + 5 \operatorname{arctg} 3 - \frac{5}{4} \pi.$$

Теорема 3. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и функция $x = \varphi(t)$ удовлетворяет следующим условиям: 1) $\varphi(t)$ дифференцируема на $[\alpha; \beta]$; 2) $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$; 3) значения $\varphi(t)$ не выходят за пределы $[a; b]$, когда t пробегает значения из $[\alpha; \beta]$. Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Пример 16. Вычислить $\int_3^6 \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4} dx$.

Решение. 1) Функция $f(x) = \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}$ непрерывна на интервале $[4, 6]$.

2) Применим подстановку $x = \frac{3}{\cos t}$ и изменим пределы

интегрирования. Если $x = 3$, то $\cos t = 1$ и $t = 0$. Если $x = 6$, то $\cos t = \frac{1}{2}$

и $t = \frac{\pi}{3}$.

Отметим, что функция $x = \frac{3}{\cos t}$ удовлетворяет на отрезке $0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$ условиям теоремы о замене переменной в определенном интеграле, так как она непрерывно дифференцируема, монотонна и $\frac{3}{\cos 0} = 3$ и

$$\frac{3}{\cos \frac{\pi}{3}} = 6.$$

$$3) dx = \frac{2 \sin t dt}{\cos^2 t}, \quad \sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{\frac{9}{\cos^2 t} - 9} = 3|\operatorname{tg} t| = 3 \operatorname{tg} t,$$

так как $\operatorname{tg} t > 0$ при $0 \leq t \leq \frac{\pi}{3}$.

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/3} \frac{3 \operatorname{tg} t \cdot \cos^4 t \cdot 3 \sin t dt}{3^4 \cdot \cos^2 t} &= \frac{1}{9} \int_0^{\pi/3} \sin^2 t \cos t dt = \frac{1}{9} \int_0^{\pi/3} \sin^2 t d(\sin t) = \\ &= \frac{1}{9} \cdot \frac{\sin^3 t}{3} \Big|_0^{\pi/3} = \frac{\sqrt{3}}{72}. \end{aligned}$$

Пример 17. Вычислить: а) $\int_1^2 x(3x-1)^7 dx$; б) $\int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx$.

Решение. а) Сделаем замену переменного: $3x-1=t$. Тогда $x = \frac{t+1}{3}$; $dx = \frac{1}{3} dt$; меняются пределы интегрирования: $x=1 \leftrightarrow t=2$, $x=2 \leftrightarrow t=5$.

$$\begin{aligned} \text{Имеем } \int_1^2 x(3x-1)^7 dx &= \int_2^5 \frac{t+1}{3} \cdot t^7 \cdot \frac{1}{3} dt = \frac{1}{9} \int_2^5 (t^8 + t^7) dt = \\ &= \frac{1}{9} \left(\frac{t^9}{9} + \frac{t^8}{8} \right) \Big|_2^5 = \frac{1}{9} \left(\frac{5^9}{9} + \frac{5^8}{8} - \frac{2^9}{9} - \frac{2^8}{8} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \int_0^2 x^2 \sqrt{4-x^2} dx &= \left[\begin{array}{l} x = 2 \sin t; \quad x = 2 \leftrightarrow t = \pi/2; \\ dx = 2 \cos t dt; \quad x = 0 \leftrightarrow t = 0 \end{array} \right] = \\
 &= \int_0^{\pi/2} 4 \sin^2 t \sqrt{4-4 \sin^2 t} \cdot 2 \cos t dt = 16 \int_0^{\pi/2} \sin^2 t \cos^2 t dt = 4 \int_0^{\pi/2} \sin^2 2t dt = \\
 &= 2 \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4t) dt = \left(2t - \frac{1}{2} \sin 4t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \pi.
 \end{aligned}$$

Теорема 4. Если $u(x)$, $v(x)$ дифференцируемы на $[a; b]$, то

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Пример 18. Вычислить $\int_1^e x^2 \ln x dx$.

Решение. $\int_1^e x^2 \ln x dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x, \quad du = \frac{dx}{x}, \\ dv = x^2 dx, \quad v = \frac{1}{3} x^3 \end{array} \right] = \frac{1}{3} x^3 \times$

$$\times \ln \Big|_1^e - \int_1^e \frac{1}{3} x^3 \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{1}{3} (e^3 \ln e - \ln 1) - \frac{1}{3} \int_1^e x^2 dx = \frac{1}{3} e^3 - \frac{1}{9} x^3 \Big|_1^e =$$

$$= \frac{1}{3} e^3 - \frac{1}{9} (e^3 - 1) = \frac{2e^3 + 1}{9}$$

10. Несобственные интегралы

1. *Несобственный интеграл I рода.* Пусть функция $f(x)$ определена на $[a; +\infty)$ и интегрируема на отрезке $[a; b]$ для любого $b > a$.

Несобственный интеграл первого рода определяется равенством

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx.$$

Если существует конечный предел в этом равенстве, то интеграл называется сходящимся, в противном случае – расходящимся. Аналогично определяются несобственные интегралы

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx \text{ и } \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx :$$

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f(x)dx.$$

Пример 19. Вычислить: а) $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx$; б) $\int_c^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}}$; в) $\int_{-\infty}^0 xe^{-x^2} dx$.

Решение. а) $\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b \operatorname{arctg} x d(\operatorname{arctg} x) =$
 $= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} (\operatorname{arctg} x)^2 \Big|_1^b \right) = \frac{1}{2} \lim_{b \rightarrow +\infty} \left((\operatorname{arctg} b)^2 - (\operatorname{arctg} 1)^2 \right) =$
 $= \frac{1}{2} \left(\left(\frac{\pi}{2} \right)^2 - \left(\frac{\pi}{4} \right)^2 \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{16} \right) = \frac{3\pi^2}{32}.$

б) $\int_c^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b (\ln x)^{-\frac{1}{2}} d(\ln x) =$
 $= \lim_{b \rightarrow +\infty} 2\sqrt{\ln x} \Big|_c^b = 2 \lim_{b \rightarrow +\infty} (\sqrt{\ln b} - \sqrt{\ln c}) = +\infty,$

и интеграл расходится;

в) $\int_{-\infty}^0 xe^{-x^2} dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^{-x^2} d(-x^2) =$
 $= -\frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(e^{-x^2} \Big|_a^0 \right) = -\frac{1}{2} \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{e^{a^2}} \right) = -\frac{1}{2}.$

Несобственный интеграл I рода обладает свойством линейности:

$$\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^{+\infty} f(x) dx + \beta \int_a^{+\infty} g(x) dx$$

(при условии сходимости интегралов в правой части равенства).

Для исследования вопроса сходимости несобственного интеграла часто оказывается полезным следующий факт $a > 0$:

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \quad \begin{cases} \text{сходится при } p > 1, \\ \text{расходится при } 0 < p \leq 1. \end{cases}$$

Аналогичное утверждение справедливо для интеграла $\int_{-\infty}^b \frac{dx}{x^p}$, $b < 0$, и

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{(x-c)^p}, \quad a > c.$$

Теорема 5 (первый признак сходимости). Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены на $[a; +\infty)$, для любого $b > a$ $f(x)$, $g(x)$ интегрируемы на $[a; b]$ и $0 \leq f(x) \leq g(x) \quad \forall x \in [a; +\infty)$. Тогда имеем

1) если $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ сходится, то сходится и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$;

2) если $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ расходится, то расходится и $\int_a^{+\infty} g(x)dx$.

Теорема 6 (второй признак сходимости). Пусть $f(x)$ и $g(x)$ определены на $[a; +\infty)$, $f(x) > 0, g(x) > 0 \quad \forall x \in [a; +\infty)$ и пусть существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$. Тогда интегралы $\int_a^{+\infty} f(x)dx$,

$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ ведут себя одинаково в смысле сходимости (т.е. одновременно сходятся или расходятся).

Теорема 7. Если $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ сходится, то сходится и $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

(в таком случае говорят, что $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ сходится абсолютно).

Аналогичные утверждения справедливы для несобственного интеграла $\int_{-\infty}^b f(x)dx$.

Пример 20. Исследовать на сходимость интегралы:

а) $\int_1^{+\infty} \frac{(x^2 + x - 1)dx}{3x^4 + 5x^3 - x^2 + 8}$; б) $\int_2^{+\infty} \frac{x\sqrt{x-1}}{x^2 - 3x + 7} dx$; в) $\int_2^{+\infty} \frac{x + \sin x}{x^3 + 4} dx$.

Решение. а) Подынтегральная функция $f(x)$ представляет собой рациональную функцию, разность степеней числителя и знаменателя

равна 2. Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Найдём предел

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + x - 1) \cdot x^2}{3x^4 + 5x^3 - x^2 + 8} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x^4 \left(3 + 5/x - 1/x^2 + 8/x^4\right)} = \frac{1}{3} \neq 0.$$

Следовательно, согласно второму признаку сходимости, интегралы $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ и $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ ведут себя одинаково в смысле сходимости. Но

известно, что $\int_1^{+\infty} g(x)dx = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится ($p = 2 > 1$), значит и наш интеграл $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ сходится.

б) $f(x) = \frac{x\sqrt{x-1}}{x^2 - 3x + 7}$ является иррациональной функцией; степень числителя равна $3/2$ (числитель можно представить как $(x^3 - x^2)^{1/2}$), степень знаменателя равна 2. Рассмотрим вспомогательную функцию $g(x) = 1/x^{1/2}$. Докажем, что существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$, не равный 0. Действительно,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x-1} \cdot x^{1/2}}{x^2 - 3x + 7} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \sqrt{1-1/x}}{x^2(1-3/x+7/x^2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1-1/x}}{1-3/x+7/x^2} = 1.$$

Поэтому $\int_1^{+\infty} f(x)dx$, $\int_1^{+\infty} g(x)dx$ ведут себя одинаково в смысле сходимости. А так как $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ расходится, то расходится и $\int_1^{+\infty} f(x)dx$.

в) Обозначим $f(x) = \frac{x + \sin x}{x^3 + 4}$. Так как $-1 \leq \sin x \leq 1$, то

$0 \leq f(x) \leq \frac{x+1}{x^3+4}$. Интеграл $\int_2^{+\infty} \frac{(x+1)dx}{x^3+4}$ сходится (доказывается это, как

и выше: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{x^3+4} : \frac{1}{x^2} \right) = 1$, $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ сходится и можно воспользоваться

вторым признаком сходимости). Мы попадаем в условие теоремы 5 (часть 1), в которой говорится, что наш интеграл сходится.

2. *Несобственный интеграл II рода.* Пусть функция $f(x)$ определена на $[a; b)$ и $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = +\infty$ (или $-\infty$). Несобственный интеграл второго рода функции $f(x)$ на $[a; b]$ определяется равенством

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b-0} \int_a^c f(x) dx.$$

Если существует конечный предел в этом равенстве, то говорят, что

интеграл $\int_a^b f(x) dx$ сходится, в противном случае — расходится.

Аналогично определяется несобственный интеграл II рода для случаев

$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = +\infty$ и $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = -\infty$. Если же $f(x)$ неограниченна в любой

окрестности некоторой внутренней точки $c \in (a; b)$, то полагают

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{c_1 \rightarrow +0} \int_a^{c_1} f(x) dx + \lim_{c_2 \rightarrow +0} \int_{c_2}^b f(x) dx.$$

Пример 21. Вычислить интегралы: а) $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{6-2x}}$; б) $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x}$

Решение. а) $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{6-2x}} = \left[\text{особой точкой} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_1^{3-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{6-2x}} =$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(-\frac{1}{2} \int_1^{3-\varepsilon} (6-2x)^{-\frac{1}{2}} d(6-2x) \right) = -\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(2\sqrt{6-2x} \Big|_1^{3-\varepsilon} \right) =$$

$$= -\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\sqrt{6-2(3-\varepsilon)} - \sqrt{6-2 \cdot 1} \right) = -\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(\sqrt{2\varepsilon} - \sqrt{4} \right) = 2.$$

$$\text{б) } \int_1^2 \frac{dx}{x \ln x} = \left[\text{особой точкой} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{d(\ln x)}{\ln x} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \ln(\ln x) \Big|_{1+\varepsilon}^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (\ln(\ln 2) - \ln(\ln(1 + \varepsilon))) = +\infty.$$

Значит, интеграл расходится.

Формулировки признаков сходимости для несобственных интегралов II рода, по существу, ничем не отличаются от формулировок признаков сходимости для несобственных интегралов I рода. Для применения этих признаков полезно пользоваться тем, что

$$\int_a^b \frac{dx}{(x-a)^p}, \quad \int_a^b \frac{dx}{(b-x)^p} \begin{cases} \text{сходятся при } 0 < p < 1, \\ \text{расходятся при } p \geq 1. \end{cases}$$

Пример 22. Исследовать на сходимость интегралы:

$$\text{а) } \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}}; \quad \text{б) } \int_0^1 \frac{\ln(1+\sqrt{\sin x})}{e^{x^2}-1} dx; \quad \text{в) } \int_0^1 \frac{x\sqrt{x} dx}{e^x-1-\sin x}.$$

Решение. а) $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-4}} = \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{(x-2)(x+2)}}.$ Подынтегральная

функция $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-2)(x+2)}}$ в промежутке $[2; 3]$ имеет особую

точку $x = 2$. Множитель $\frac{1}{\sqrt{x+2}}$ стремится к $1/2$ при $x \rightarrow 2$. Поэтому естественно ожидать, что наша функция в окрестности точки $x = 2$ ведёт себя, как $g(x) = 1/\sqrt{x-2}$; проверим это:

$$\lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1}{\sqrt{x-2} \cdot \sqrt{x+2}} \cdot \sqrt{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2+0} \frac{1}{\sqrt{x+2}} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Следовательно, согласно второму признаку сходимости, интегралы

$$\int_2^3 f(x) dx \quad \text{и} \quad \int_2^3 g(x) dx = \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x-2}}$$

ведут себя одинаково в смысле сходимости. Но второй интеграл сходится ($p = 1/2 < 1$), поэтому сходится и наш интеграл.

б) Функция $f(x) = \ln(1 + \sqrt{\sin x}) / (e^{x^2} - 1)$ имеет на промежутке $[0; 1]$ одну особую точку $x = 0$. Функции $\ln(1 + \sqrt{\sin x})$ и $e^{x^2} - 1$ являются бесконечно малыми величинами при $x \rightarrow 0$. Известно, что $\ln(1 + \sqrt{\sin x}) \sim \sqrt{\sin x} \sim \sqrt{x}$, $e^{x^2} - 1 \sim x^2$ при $x \rightarrow 0$. Поэтому

$f(x) \sim \frac{\sqrt{x}}{x^2} = \frac{1}{x^{3/2}}$ при $x \rightarrow +0$. А так как $\int_0^1 \frac{dx}{x^{3/2}}$ расходится ($p = 3/2 > 1$),

то расходится и наш интеграл.

в) Разложим знаменатель ($e^x - 1 - \sin x$) подынтегральной функции $f(x) = x\sqrt{x}/(e^x - 1 - \sin x)$ по формуле Тейлора в окрестности особой точки $x = 0$ функции $f(x) = x\sqrt{x}/(e^x - 1 - \sin x)$:

$$e^x - 1 - \sin x = (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + o(x^3)) - 1 - (x - \frac{x^3}{3!} + o(x^3)) = x^2/2 + o(x^2).$$

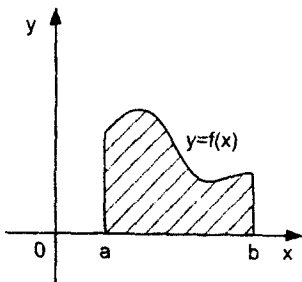
Следовательно, $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{e^x - 1 - \sin x} \sim \frac{x\sqrt{x}}{x^2/2 + o(x^2)} \sim \frac{2}{x^{1/2}}$.

Известно, что $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ сходится, следовательно, сходится и наш интеграл.

11. Вычисление площадей плоских фигур

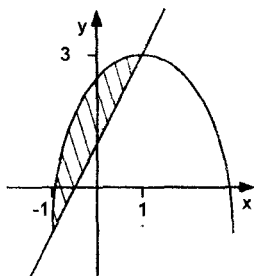
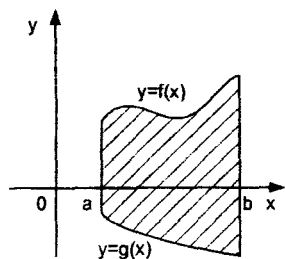
Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиками функций $x = a$, $x = b$, $y = 0$, $y = f(x)$ ($f(x) \geq 0$ при $x \in [a; b]$), находится по

формуле $S = \int_a^b f(x) dx$.



Если фигура (D) ограничена графиками функций $x = a$, $x = b$, $y = f(x)$, $y = g(x)$, $f(x) \geq g(x)$, при $x \in [a; b]$, то площадь S фигуры (D) находится

по формуле $S = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$.



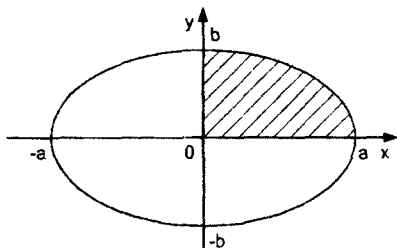
Пример 23. Найти площадь S фигуры (D) , ограниченной линиями $y = -x^2 + 2x + 2$ и $y = 2x + 1$.

Решение. Найдём абсциссы точек пересечения графиков функций, для чего решим уравнение: $-x^2 + 2x + 2 = 2x + 1$; $x^2 - 1 = 0$; $x_1 = -1$, $x_2 = 1$. Для всех точек x из отрезка $[-1; 1]$ $-x^2 + 2x + 2 \geq 2x + 1$. Поэтому

$$S = \int_{-1}^1 ((-x^2 + 2x + 2) - (2x + 1)) dx = \int_{-1}^1 (-x^2 + 1) dx = \left(-\frac{x^3}{3} + x\right) \Big|_{-1}^1 = -\frac{1}{3} + 1 - \left(-\frac{1}{3} + 1\right) = \frac{4}{3}.$$

Пример 24. Найти площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Решение. Эллипс имеет две оси симметрии: координатные оси Ox и Oy . Поэтому площадь S фигуры равна учетверённой площади S_1 части (D_1) фигуры, расположенной в первой четверти (заштриховано). Фигура (D_1) ограничена сверху



линией $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, снизу – осью Ox , слева – осью Oy . Поэтому

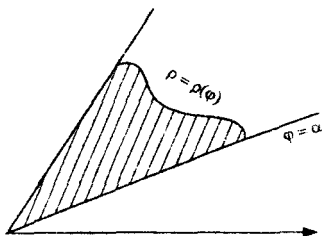
$$S_1 = \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = \left[\begin{array}{l} x = a \sin t, \quad x = a \leftrightarrow t = \frac{\pi}{2} \\ dx = a \cos t dt, \quad x = 0 \leftrightarrow t = 0 \end{array} \right] = \frac{b}{a} \int_0^{\pi/2} \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} a \cos t dt = ab \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{ab}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt =$$

$$= \frac{ab}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_{t=0}^{\pi/2} = \frac{\pi ab}{4}.$$

Отсюда находим $S = 4S_1 = \pi ab$.

Площадь S криволинейного сектора, ограниченного графиком функции $\rho = \rho(\varphi)$ и лучами $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$ в полярной системе координат, находится

$$\text{по формуле } S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} (\rho(\varphi))^2 d\varphi.$$



Пример 25. Найти площадь S фигуры, ограниченной линией, заданной в полярной системе координат уравнением $\rho = 2 \cos 3\varphi$.

Решение. Начнём с изображения линии. Так как $\rho \geq 0$, то нам нужно сначала решить неравенство $2 \cos 3\varphi \geq 0$. Имеем

$$\cos 3\varphi \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2\pi n \leq 3\varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2\pi n,$$

$$n \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3}, \quad n \in \mathbf{Z}.$$

$$\text{При } n = 0: \quad -\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{6};$$

$$\text{при } n = 1: \quad \frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6};$$

$$\text{при } n = 2: \quad \frac{7\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2};$$

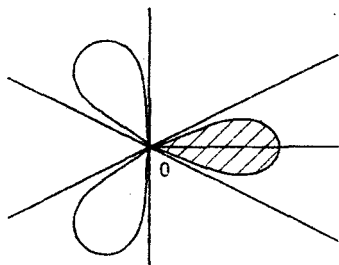
$$\text{при } n = 3: \quad \frac{11\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{13\pi}{6} \quad \text{— этот угол является повторением угла,}$$

соответствующего значению $n = 0$. Рассмотрение других значений приводит к уже полученным углам на плоскости. Рассмотрим рисунок. Наша фигура ограничена тремя лепестками. Её площадь S равна $3S_1$, где S_1 — площадь одного лепестка (заштриховано).

Имеем

$$S_1 = \frac{1}{2} \int_{-\pi/6}^{\pi/6} (2 \cos 3\varphi)^2 d\varphi = 2 \int_{-\pi/6}^{\pi/6} \cos^2 3\varphi d\varphi = \int_{-\pi/6}^{\pi/6} (1 + \cos 6\varphi) d\varphi =$$

$$= \left(\varphi + \frac{1}{6} \sin 6\varphi \right) \Big|_{-\pi/6}^{\pi/6} = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{6} \sin \pi - \left(-\frac{\pi}{6} - \frac{1}{6} \sin \pi \right) = \frac{\pi}{3}.$$



Отсюда находим $S = 3S_1 = \pi$.

12. Вычисление длины дуги

Линия (L) в пространстве называется гладкой, если в каждой точке (L) можно провести касательную к этой линии. Если линия без самопересечений задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2, \\ z = z(t), \end{cases}$$

то дифференцируемость $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ гарантирует гладкость линии; аналогичное утверждение справедливо для плоской линии. Если линия без самопересечений на плоскости с заданной полярной системой координат определена полярным уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, то и в этом случае дифференцируемость $\rho(\varphi)$ влечёт гладкость этой линии.

Если гладкая линия (L) на плоскости (в пространстве) задана параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$ (и вдобавок к этому $z = z(t)$ для линии в пространстве), $t_1 \leq t \leq t_2$, то длина ℓ линии (L) находится по формуле

$$\ell = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt \quad (\ell = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2 + (z'_t)^2} dt).$$

Если гладкая линия (L) задана явным уравнением $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, то $\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$.

Для гладкой линии (L), заданной полярными уравнениями, $\rho = \rho(\varphi)$, $\alpha \leq \varphi \leq \beta$, $\ell = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{(\rho(\varphi))^2 + (\rho'(\varphi))^2} d\varphi$.

Пример 26. Найти длину ℓ линии, заданной уравнением $x = e^t \cos 2t$, $y = e^t \sin 2t$, $0 \leq t \leq \pi/2$.

Решение. Имеем $\ell = \int_0^{\pi/2} \sqrt{(x'_t)^2 + (y'_t)^2} dt =$
 $= \int_0^{\pi/2} \sqrt{(e^t \cos 2t - 2e^t \sin 2t)^2 + (e^t \sin 2t + 2e^t \cos 2t)^2} dt =$

$$\begin{aligned}
 &= \int_0^{\pi/2} e^t \sqrt{\cos^2 2t - 4 \cos 2t \sin 2t + \sin^2 2t + \sin^2 2t + 4 \sin 2t \cos 2t + 4 \cos^2 2t} dt = \\
 &= \int_0^{\pi/2} e^t \sqrt{5} dt = \sqrt{5} e^t \Big|_0^{\pi/2} = \sqrt{5} (e^{\pi/2} - 1).
 \end{aligned}$$

Пример 27. Найти длину дуги логарифмической спирали $\rho = e^{3\varphi}$, находящейся внутри окружности $\rho = 1$.

Решение. Дуге спирали, лежащей внутри окружности $\rho = 1$, соответствуют значения $\varphi \leq 0$. Поэтому

$$\begin{aligned}
 \ell &= \int_{-\infty}^0 \sqrt{(e^{3\varphi})^2 + ((e^{3\varphi})')^2} d\varphi = \int_{-\infty}^0 \sqrt{e^{6\varphi} + 9e^{6\varphi}} d\varphi = \sqrt{10} \int_{-\infty}^0 e^{3\varphi} d\varphi = \\
 &= \sqrt{10} \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^{3\varphi} d\varphi = \frac{\sqrt{10}}{3} \lim_{a \rightarrow -\infty} (e^{3\varphi}) \Big|_a^0 = \frac{\sqrt{10}}{3} \lim_{a \rightarrow -\infty} (e^0 - e^a) = \frac{\sqrt{10}}{3}.
 \end{aligned}$$

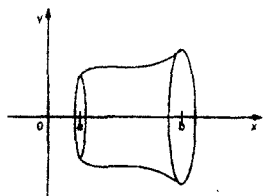
13. Вычисление объёмов тел

Если в пространстве заданы ось Ox , тело (T) , проекцией которого на Ox является отрезок $[a; b]$, и для любого $x \in [a; b]$ известна площадь $S(x)$ поперечного сечения $S(x)$, то объём V тела (T) находится по формуле

$$V = \int_a^b S(x) dx.$$

В частности, если тело (T) получено путём вращения графика функции $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$, $f(x) \geq 0$ вокруг оси Ox , то объём тела вращения

равен
$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx.$$



При вращении графика функции $f(x)$ вокруг оси Oy формула объёма принимает вид

$$V = 2\pi \int_a^b x |f(x)| dx, \quad a \geq 0.$$

Пример 28. Найти объём V тела (T) , ограниченного эллипсоидом

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Решение. Проекцией тела (T) на ось Ox является отрезок $[-a; a]$. Найдём формулу площади $S(x)$ поперечного сечения,

$x \in [a; b]$. Перепишем уравнение эллипсоида в виде

$$\frac{y^2}{b^2(a^2 - x^2)} + \frac{z^2}{c^2(a^2 - x^2)} = 1.$$

Это есть уравнение поперечного сечения эллипсоида плоскостью, проходящей через точку x и перпендикулярной оси Ox . А мы уже знаем (задача 22), что площадь фигуры, заключённой внутри этого эллипса,

равна $S(x) = \frac{\pi bc}{a^2}(a^2 - x^2)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi bc}{a^2} \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx = \frac{\pi bc}{a^2} \left(a^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_{x=-a}^a = \\ &= \frac{\pi bc}{a^2} \left(a^3 - \frac{1}{3} a^3 - \left(-a^3 + \frac{1}{3} a^3 \right) \right) = \frac{4}{3} \pi abc. \end{aligned}$$

14. Приближённое вычисление определённых интегралов

Формула Ньютона–Лейбница является хорошим средством для вычисления определённого интеграла. Однако возможности применения этой формулы сильно ограничены тем, что далеко не для всякой элементарной функции первообразная к ней является элементарной функцией. Другими словами, если $f(x)$ является элементарной функцией, то $\int f(x) dx$ могут оказаться неэлементарными функциями (более того, если $f(x)$ образовать наобум как суперпозицию элементарных функций, то, скорее всего, $\int f(x) dx$ будут неэлементарными функциями). В таком случае говорят, что $\int f(x) dx$ является неберущимся интегралом. Приведём несколько таких примеров: $\int \cos \frac{1}{x} dx$, $\int \frac{\sin x}{x} dx$, $\int e^{-x^2} dx$, $\int \sqrt{\arctg 2^x} dx$. Дело обстоит так, что в большинстве случаев решение прикладных задач требует вычисления определённых интегралов от функций, первообразные которых выходят за рамки класса элементарных функций, что делает невозможным применение формулы Ньютона–Лейбница. В таких случаях довольствуются приближённым вычислением определённого интеграла, или, как говорят, применяют методы численного интегрирования. К простейшим методам численного интегрирования относятся методы прямоугольников, трапеций и парабол (Симпсона).

Разобьём отрезок $[a; b]$ на n равных частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$; $x_{k+1} - x_k = h = (b - a)/n$ называется шагом разбиения.

Обозначим $y_k = f(x_k)$, $x_{\frac{2k+1}{2}} = \frac{1}{2}(x_k + x_{k+1})$, $0 \leq k \leq n-1$,

$$y_{\frac{2k+1}{2}} = f(x_{\frac{2k+1}{2}}).$$

По методу прямоугольников

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} [y_0 + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1}];$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} [y_1 + y_2 + \dots + y_n];$$

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} [y_{1/2} + y_{3/2} + y_{5/2} + \dots + y_{(2n-1)/2}].$$

Все эти три формулы называются формулами прямоугольников.

Метод трапеций состоит в применении формулы (при тех же обозначениях)

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} \left[\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} \right].$$

В методе парабол (Симпсона) отрезок $[a; b]$ разбивается на чётное число $2n$ отрезков равной длины точками $a_1 = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{2n} = b$. Согласно формуле Симпсона (при тех же обозначениях)

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} \left[(y_0 + y_{2n}) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \dots + y_{2n-1}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \dots + y_{2n-2}) \right].$$

Точность вычисления растёт с ростом n . Погрешность $R_n[f]$ приведённых выше формул оценивается величинами:

$$R_n[f] \leq \frac{(b-a)}{24} \cdot h^2 \cdot M_2 \text{ для формулы прямоугольников } \left(h = \frac{b-a}{n} \right),$$

$$R_n[f] \leq \frac{(b-a)}{12} \cdot h^2 \cdot M_2 \text{ для формулы трапеций } \left(h = \frac{b-a}{n} \right),$$

$$R_n[f] \leq \frac{(b-a)}{180} \cdot h^4 \cdot M_4 \text{ для формулы Симпсона } \left(h = \frac{b-a}{2n} \right),$$

где $M_2 = \sup_{x \in [a; b]} |f''(x)|$, $M_4 = \sup_{x \in [a; b]} |f^{IV}(x)|$.

Пример 29. Вычислите приближённо $\int_2^4 \sqrt{\ln x} dx$ методами:

а) прямоугольников, б) трапеций, в) Симпсона, взяв $n = 10$. В методах прямоугольников и трапеций оценить погрешность вычисления.

Решение. а) Составим таблицу ($f(x) = \sqrt{\ln x}$, $h = 0,2$).

x_k	2	2,2	2,4	2,6	2,8
y_k	0,8326	0,8880	0,9357	0,9775	1,0147

x_k	3	3,2	3,4	3,6	3,8
y_k	1,0481	1,0785	1,1062	1,1318	1,1554

Воспользуемся первой из формул прямоугольников

$$\int_2^4 \sqrt{\ln x} dx \approx 0,2(0,8326 + 0,8880 + 0,9357 + 0,9775 + 1,0147 + 1,0481 + 1,0785 + 1,1062 + 1,1318 + 1,1554) = 0,2 \cdot 10,1685 = 2,0337.$$

Оценим погрешность $f''(x) = \left((\ln x)^{1/2} \right)'' = -\frac{2 \ln x + 1}{4x^2 \ln x \sqrt{\ln x}}$.

$$\text{Нетрудно видеть, что } |f''(x)| < \frac{2 \ln 4 - 1}{4(\sqrt{\ln 2})^3} \approx \frac{1,7725888}{1,6000142} \approx 1,1078582.$$

Отсюда $M_2 = 1,1078582$ и погрешность не превышает $\frac{2}{24} \cdot 0,2^2 \cdot 1,1078582 \approx 0,0036$.

б) Для применения формулы трапеций дополним выше составленную таблицу ещё одним значением: $y_n = f(x_n) = f(4) = 1,1774$.

Имеем

$$\int_2^4 \sqrt{\ln x} dx \approx 0,2 \left[\frac{0,8326 + 1,1774}{2} + 0,888 + 0,9357 + 0,9775 + 1,0147 + 1,0481 + 1,0785 + 1,1062 + 1,1318 + 1,1554 \right] = 0,2 \cdot 10,3409 = 2,06818.$$

Погрешность вычисления равна $\frac{2}{12} \cdot 0,2^2 \cdot 1,1078582 \approx 0,0072$.

в) Рассмотрим нашу таблицу ($h = 0,1$).

x_k	2	2,1	2,2	2,3	2,4
y_k	0,832555	0,861358	0,887951	0,912639	0,935665
x_k	2,5	2,6	2,7	2,8	2,9
y_k	0,957231	0,977503	0,996620	1,014702	1,031848
x_k	3	3,1	3,2	3,3	3,4
y_k	1,048147	1,063674	1,078495	1,092668	1,106244
x_k	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
y_k	1,119269	1,131784	1,143824	1,1554224	1,166609
x_k	4				
y_k	1,177410				

Отсюда находим

$$\int_2^4 \sqrt{\ln x} \, dx \approx \frac{1}{30} [(0,832555 + 1,17741) + 4(0,861358 + 0,912639 + 0,957231 + 0,99662 + 1,031848 + 1,063674 + 1,092668 + 1,119269 + 1,143824 + 1,166609) + 2(0,887951 + 0,935665 + 0,977503 + 1,014702 + 1,048147 + 1,078495 + 1,106244 + 1,131784 + 1,155422)] = \frac{1}{30} \cdot 62,064751 \approx 2,068825 \approx 2,0688.$$

Задание 7.1

Найдите интегралы.

$$1) \int \left(10 + \frac{4}{\sqrt{16-x^2}} - \frac{7}{x^4} - 3\sqrt[3]{x^2} + \cos x \right) dx;$$

$$2) \int \left(3^x - \frac{5}{\cos^2 x} + \frac{8}{x^3} - 10\sqrt[5]{x^3} - 4 \right) dx;$$

$$1) \int \left(\frac{6}{\sin^2 x} + \frac{9}{\sqrt{x^2-4}} - \frac{5}{x} + e^x - \sqrt[4]{x^3} \right) dx;$$

$$2) \int \left(15\sin x - \frac{1}{x^2+9} + \frac{8}{\sqrt[3]{x}} + 13 \cdot 4^x - 6 \right) dx;$$

- 3) $\int \left(2 \cdot 5^x - 3 \cos x + \frac{1}{x} - \frac{4}{\sqrt[6]{x^5}} + 3 \right) dx$;
- 4) $\int \left(\frac{10}{16+x^2} - \frac{1}{\sin^2 x} + \frac{3}{x} - \sqrt[3]{x^4} + 3 \right) dx$;
- 5) $\int \left(\frac{15}{\sqrt{x^2-25}} + \frac{4}{\cos^2 x} - \frac{3}{\sqrt[3]{x}} + 2^{-x} \right) dx$;
- 6) $\int \left(\frac{9}{4+x^2} - 3^x + \sqrt[4]{x^3} - 7 \cos x + 3 \right) dx$
- 7) $\int \left(6^x - 5 + 3 \sin x + \frac{8}{x^2+4} - 2 \sqrt[7]{x^5} \right) dx$;
- 10) $\int \left(2 - \frac{10}{\sqrt{4+x^2}} + \frac{3}{\sin^2 x} - 15^x - \frac{5}{x} \right) dx$;
- 11) $\int \left(12x^5 - \frac{9}{\cos^2 x} + \frac{3}{x} + 8 \sqrt[3]{x^2} - 4 \sin x \right) dx$;
- 12) $\int \left(\frac{7}{x} - \frac{5}{25+x^2} - \frac{2}{\sin^2 x} + 10^x - 15\sqrt{x} \right) dx$;
- 13) $\int \left(8 \cos x - \frac{2}{x} + \frac{3}{\cos^2 x} - 5^x + 4 \sqrt[5]{x^3} \right) dx$;
- 14) $\int \left(3 \sqrt[6]{x^{11}} + \frac{5}{x} - \frac{2}{\sin^2 x} + \sin x - 13 \right) dx$;
- 15) $\int \left(5\sqrt{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{\sqrt{16+x^2}} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx$;
- 16) $\int \left(\frac{15}{\sqrt[3]{x^5}} - \frac{5}{\cos^2 x} - 4 \cos x + \frac{2}{x} + 8 \right) dx$;
- 17) $\int \left(6 \sin x - \frac{4}{25+x^2} - 3 \sqrt[6]{x^{13}} + \frac{2}{\sin^2 x} - 4 \right) dx$;
- 18) $\int \left(\frac{7}{x} - 8 \sqrt[13]{x^8} - \frac{4}{\sqrt{25-x^2}} + \frac{14}{49+x^2} - 6^x \right) dx$;
- 19) $\int \left(15^x + 3\sqrt{x} - 8 \sin x + \frac{10}{\cos^2 x} - \frac{2}{1+x^2} \right) dx$;

- 20) $\int \left(8\sqrt[4]{x^7} - 9\cos x + \frac{13}{\sin^2 x} + 6^x - \frac{7}{x} \right) dx;$
- 21) $\int \left(5x^{11} - \frac{10}{x^2} + \frac{2}{36+x^2} + \frac{1}{\sqrt{49-x^2}} + 3 \right) dx;$
- 22) $\int \left(13x^{25} - \frac{5}{\sqrt{64-x^2}} + 3\sin x + \frac{4}{\cos^2 x} - 1 \right) dx;$
- 23) $\int \left(\frac{7^x}{2} - \frac{9}{x} + \frac{18}{9+x^2} - 2\sqrt[3]{x^{15}} - 4\cos x \right) dx;$
- 24) $\int \left(3^x + \frac{9}{\sqrt{81-x^2}} + \frac{2}{\sqrt{x^2-16}} - 6\sin x \right) dx;$
- 25) $\int \left(\left(\frac{1}{5}\right)^x - 9\sqrt[4]{x^5} + \frac{8}{x} - \frac{14}{36+x^2} + 5 \right) dx;$
- 26) $\int \left(\frac{5}{\cos^2 x} - \frac{7}{\sqrt[8]{x^5}} + \frac{3}{\sqrt{x^2+49}} + 8\sin x - \frac{3}{x} \right) dx;$
- 27) $\int \left(\left(\frac{2}{3}\right)^x - \frac{3}{\sin^2 x} + \frac{10}{\sqrt{4-x^2}} + 6\sqrt[5]{x^{14}} - 7 \right) dx;$
- 28) $\int \left(\frac{1}{64+x^2} - \frac{4}{\cos^2 x} + 3\sin x + 15\sqrt[6]{x^{13}} + \frac{2}{x} \right) dx;$
- 29) $\int \left(\frac{2}{\sqrt{x^2-49}} + \frac{3}{\sqrt[5]{x^{16}}} + \left(\frac{3}{4}\right)^x - 8\cos x + \frac{4}{\sin^2 x} \right) dx;$
- 30) $\int \left(\frac{12}{\sqrt[6]{x^5}} - 5\sin x + \frac{3}{x} - \frac{4}{\sqrt{64-x^2}} + \frac{6}{\sin^2 x} \right) dx.$

Задание 7.2

Найдите интегралы.

1. а) $\int \sqrt[3]{5x+4} dx,$

б) $\int \operatorname{ctg} x dx,$

в) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-25x^6}};$

2. а) $\int 3^{8-5x} dx,$

б) $\int e^{\cos x} \sin x dx,$

в) $\int \frac{x dx}{25+x^4};$

- | | | |
|--|--|---|
| 3. a) $\int \frac{dx}{15-7x}$, | б) $\int 2^x \cos 2^x dx$, | в) $\int \frac{x dx}{\sqrt{4-25x^4}}$; |
| 4. a) $\int \cos(1+2x) dx$, | б) $\int \cos x \cdot \sqrt{1+\sin x} dx$, | в) $\int \frac{\sin x dx}{4+\cos^2 x}$; |
| 5. a) $\int \sin(3x-4) dx$, | б) $\int \frac{e^x}{3+e^x} dx$, | в) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{4+\sin^2 x}}$; |
| 6. a) $\int \frac{dx}{\sin^2(1+3x)}$, | б) $\int 3^{\sin x} \cos x dx$, | в) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{16-e^{2x}}}$; |
| 7. a) $\int \frac{dx}{\cos^2(6-4x)}$, | б) $\int \sin x \cdot \sqrt[3]{2+\cos x} dx$, | в) $\int \frac{2^x dx}{25+4^x}$; |
| 8. a) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{(8-3x)^3}}$, | б) $\int \frac{5^x}{6+5^x} dx$, | в) $\int \frac{3^x dx}{\sqrt{16-9^x}}$; |
| 9. a) $\int e^{5+6x} dx$, | б) $\int 3^x \cdot \cos 3^x dx$, | в) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{16+9\cos^2 x}}$; |
| 10. a) $\int (15-7^x)^{10} \cdot 7^x dx$, | б) $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{1-2^x}}$, | в) $\int \frac{5^x dx}{\sqrt{49+25^x}}$; |
| 11. a) $\int \cos(10x-9) dx$, | б) $\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{5+\sin x}} dx$, | в) $\int \frac{x^3 dx}{4-25x^8}$; |
| 12. a) $\int \sin(7x+6) dx$, | б) $\int e^x (10+e^x)^{13} dx$, | в) $\int \frac{\sin x dx}{64-25\cos^2 x}$; |
| 13. a) $\int \frac{dx}{8-2x}$, | б) $\int (9-\cos x)^5 \sin x dx$, | в) $\int \frac{\cos x dx}{16\sin^2 x - 49}$; |
| 14. a) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5+7x}}$, | б) $\int (3+\sin x)^6 \cos x dx$, | в) $\int \frac{2^x dx}{4^x - 36}$; |
| 15. a) $\int 5^{3x-1} dx$, | б) $\int 7^x \sin(7^x + 2) dx$, | в) $\int \frac{3^x dx}{4-9^x}$; |
| 16. a) $\int \sqrt[2]{6-9x} dx$, | б) $\int \sin x \cdot 2^{3+\cos x} dx$, | в) $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{36-25x^{10}}}$; |
| 17. a) $\int \frac{dx}{(9-5x)^4}$, | б) $\int \frac{\sin x dx}{13-2\cos x}$, | в) $\int \frac{x dx}{\sqrt{64+25x^4}}$; |
| 18. a) $\int 13^{6x+2} dx$, | б) $\int \cos x \cdot 6^{7-\sin x} dx$, | в) $\int \frac{x^2 dx}{16-9x^6}$; |

- | | | |
|---|---|--|
| 19. a) $\int \frac{dx}{\sin^2(2+15x)}$, | б) $\int \frac{\cos x dx}{7+9\sin x}$, | в) $\int \frac{x^3 dx}{9+25x^8}$; |
| 20. a) $\int \frac{dx}{\cos^2(3x-10)}$, | б) $\int \frac{3^x}{\sqrt{5+2 \cdot 3^x}} dx$, | в) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt{16-9\cos^2 x}}$; |
| 21. a) $\int (15x-8)^4 dx$, | б) $\int \frac{e^x dx}{\sin^2(e^x+2)}$, | в) $\int \frac{\cos x dx}{25\cos^2 x+4}$; |
| 22. a) $\int \sqrt[6]{12-10x} dx$, | б) $\int \frac{\sin x dx}{\sqrt[5]{(3+2\cos x)^3}}$, | в) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{49-16\sin^2 x}}$; |
| 23. a) $\int \frac{dx}{\sqrt[5]{(6x+7)^2}}$, | б) $\int \frac{3^x dx}{\cos^2(2 \cdot 3^x - 4)}$, | в) $\int \frac{2^x dx}{\sqrt{25+4^x}}$; |
| 24. a) $\int 6^{1-5x} dx$, | б) $\int 7^{\cos x - 3} \sin x dx$, | в) $\int \frac{3^x dx}{16+9^x}$; |
| 25. a) $\int (5x-7)^{11} dx$, | б) $\int \frac{8^x dx}{\cos^2(3-8^x)}$, | в) $\int \frac{x^4 dx}{\sqrt{36x^{10}+49}}$; |
| 26. a) $\int \frac{dx}{\cos^2(15x+9)}$, | б) $\int e^x \cdot 6^{2-e^x} dx$, | в) $\int \frac{x dx}{25-64x^4}$; |
| 27. a) $\int \cos(8-3x) dx$, | б) $\int \sqrt[4]{(15+2 \cdot 3^x)^3} dx$, | в) $\int \frac{5^x dx}{\sqrt{49-25^x}}$; |
| 28. a) $\int \frac{dx}{\sin^2(7x+6)}$, | б) $\int \cos(15-2^x) \cdot 2^x dx$, | в) $\int \frac{x^2 dx}{16x^6+9}$; |
| 29. a) $\int \sin(5-4x) dx$, | б) $\int \cos x \cdot 5^{10+2\sin x} dx$, | в) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{9-25x^8}}$; |
| 30. a) $\int \frac{dx}{\sqrt[6]{13-8x}}$, | б) $\int \frac{\sin x dx}{3+2\cos x}$, | в) $\int \frac{x dx}{36x^4-25}$. |

Задание 7.3

Найдите интегралы.

- | | |
|---|---|
| 1) $\int \frac{dx}{\sqrt{x} \cos^2 \sqrt{x} \cdot \operatorname{ctg} \sqrt{x}}$; | 3) $\int \frac{\sin 2x dx}{(1+\cos^2 x) \cdot \sqrt[3]{\ln(1+\cos^2 x)}}$; |
| 2) $\int \frac{4^{\sqrt{1-x^2}} x dx}{\sqrt{1-x^2}}$; | 4) $\int 5^{\operatorname{ctg} x^2} \cdot \frac{x dx}{\sin^2 x^2}$; |

$$5) \int 3^{\arcsin \ln x} \cdot \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 2x}};$$

$$6) \int x^5 \cos(2-3x^6) \cdot 2^{\sin(2-3x^6)} dx;$$

$$7) \int \frac{4^x dx}{\sin^2 4^x \cdot \lg 4^x};$$

$$8) \int \frac{e^{\sqrt{x}} dx}{\sqrt{x}};$$

$$9) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^6} \cdot 3^{\arccos(x^3/2)}};$$

$$10) \int \frac{5^{\lg(4\arcsin x/3)}}{\cos^2(4\arcsin \frac{x}{3})\sqrt{9-x^2}} dx;$$

$$11) \int \frac{\sin \frac{1}{x} dx}{x^2(4+\cos^2 \frac{1}{x})};$$

$$12) \int \frac{\cos \sqrt{\ln 3x+5}}{x\sqrt{\ln 3x+5}} dx;$$

$$13) \int \frac{\sin 3x \cdot 2^{\arcsin(2\cos 3x)}}{\sqrt{1-4\cos^2 3x}} dx;$$

$$14) \int \frac{2^x \sqrt{\arctg(2^x/5)}}{(25+4^x)} dx;$$

$$15) \int \frac{x dx}{(9+4x^4)(1-\arctg \frac{2x^2}{3})};$$

$$16) \int \frac{\ln(1-2x) dx}{(1-2x)(4-\ln^2(1-2x))};$$

$$17) \int \frac{\sqrt{\lg \ln 7x+2}}{x \cos^2 \ln 7x} dx;$$

$$18) \int \frac{\sin 8x dx}{(1+\cos^2 8x)\sqrt[3]{\arctg(\cos 8x)}};$$

$$19) \int \frac{\sqrt{\ln \arcsin 3x}}{\sqrt{1-9x^2} \cdot \arcsin 3x} dx;$$

$$20) \int \frac{2^{\lg(\ln x+2)}}{x \cos^2(\ln x+2)} dx;$$

$$21) \int \frac{\sqrt[3]{\arctg \ln(3x+2)} dx}{(3x+2)\sin^2(\ln(3x+2))};$$

$$22) \int \frac{x \sin \sqrt{64-x^2}}{\sqrt{64-x^2}} dx;$$

$$23) \int \frac{2^{\sqrt{2x}} dx}{\sqrt{x}(16+4^{\sqrt{2x}})};$$

$$24) \int \frac{x dx}{\sqrt{5-x^2} \cdot \cos^2 \sqrt{5-x^2}};$$

$$25) \int \frac{\cos 2x \cdot \sqrt[3]{\arccos(\frac{1}{2} \sin 2x)}}{\sqrt{4-\sin^2 2x}} dx;$$

$$26) \int \frac{\cos(\arctg \sqrt{1-x})}{\sqrt{1-x} \sin^2(\sqrt{1-x})} dx;$$

$$27) \int \frac{2^{\sqrt{\ln(3x+5)}}}{(3x+5)\sqrt{\ln(3x+5)}} dx;$$

$$28) \int \frac{xdx}{\sqrt{25-16x^4} \arcsin\left(\frac{4x^2}{5}\right)};$$

$$29) \int \frac{2^{\cos x} \cdot \sin x}{\sqrt{1-4^{\cos x}}} dx;$$

$$30) \int \frac{\sqrt{\arctg(2 \cos^2 x)} \cdot \sin 2x dx}{1+4 \cos^4 x}$$

Задание 7.4

Найдите интегралы.

$$1. a) \int \frac{dx}{x+2x^{5/7}},$$

$$б) \int \frac{dx}{x\sqrt{25-x^2}};$$

$$2. a) \int \frac{dx}{x-5\sqrt[4]{x}},$$

$$б) \int \frac{dx}{x^2\sqrt{16-x^2}};$$

$$3. a) \int \frac{dx}{x+3\sqrt[9]{x^4}},$$

$$б) \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+4}};$$

$$4. a) \int \frac{dx}{x-7\sqrt[3]{x}},$$

$$б) \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-36}};$$

$$5. a) \int \frac{dx}{x-8\sqrt[5]{x^2}},$$

$$б) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}};$$

$$6. a) \int \frac{dx}{x+\sqrt[6]{x^5}},$$

$$б) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}};$$

$$7. a) \int \frac{dx}{x+4\sqrt[5]{x^3}},$$

$$б) \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+36}};$$

$$8. a) \int \frac{dx}{x-2\sqrt[7]{x^4}},$$

$$б) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-25}};$$

$$9. a) \int \frac{dx}{x-3\sqrt[8]{x}},$$

$$б) \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-16}};$$

$$10. a) \int \frac{dx}{x+4\sqrt[10]{x^7}},$$

$$б) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+36}};$$

$$11. a) \int \frac{dx}{x-2\sqrt[3]{x^5}},$$

$$б) \int \frac{dx}{x\sqrt{4-x^2}};$$

$$12. a) \int \frac{dx}{x-3\sqrt[7]{x^6}},$$

$$б) \int \frac{dx}{x^2\sqrt{36-x^2}};$$

$$13. a) \int \frac{dx}{x+2\sqrt[5]{x^4}},$$

$$б) \int \frac{dx}{x\sqrt{64-x^2}};$$

- | | |
|--|---|
| 14. a) $\int \frac{dx}{x - 5\sqrt[9]{x^7}}$, | 6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 25}}$; |
| 15. a) $\int \frac{dx}{x + 8\sqrt[3]{x^2}}$, | 6) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - 4}}$; |
| 16. a) $\int \frac{dx}{x - 3\sqrt[10]{x^9}}$, | 6) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 16}}$; |
| 17. a) $\int \frac{dx}{x + 2\sqrt[7]{x}}$, | 6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 16}}$; |
| 18. a) $\int \frac{dx}{x - 10\sqrt[9]{x^5}}$, | 6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{9 - x^2}}$; |
| 19. a) $\int \frac{dx}{x + 3\sqrt[8]{x^7}}$, | 6) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{25 - x^2}}$; |
| 20. a) $\int \frac{dx}{x + 2\sqrt[7]{x^3}}$, | 6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 16}}$; |
| 21. a) $\int \frac{dx}{x - 7\sqrt[9]{x}}$, | 6) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 + 25}}$; |
| 22. a) $\int \frac{dx}{x + 5\sqrt[10]{x^3}}$, | 6) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4 - x^2}}$; |
| 23. a) $\int \frac{dx}{x + 4\sqrt[5]{x}}$, | 6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 36}}$; |
| 24. a) $\int \frac{dx}{x - \sqrt[9]{x^2}}$, | 6) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - 25}}$; |
| 25. a) $\int \frac{dx}{x - 3\sqrt[7]{x^2}}$, | 6) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - 9}}$; |
| 26. a) $\int \frac{dx}{x + 3\sqrt[10]{x}}$, | 6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 9}}$; |
| 27. a) $\int \frac{dx}{x + 2\sqrt[4]{x^3}}$, | 6) $\int \frac{dx}{x\sqrt{36 - x^2}}$; |
| 28. a) $\int \frac{dx}{x - 4\sqrt[8]{x^3}}$, | 6) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{9 - x^2}}$; |

29. а) $\int \frac{dx}{x+2\sqrt[9]{x^8}}$,

б) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}}$;

30. а) $\int \frac{dx}{x+3\sqrt[6]{x}}$,

б) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+9}}$.

Задание 7.5

Найдите интегралы.

1. а) $\int x \arctg x dx$,

б) $\int (x^2 - 4x + 3) \sin 2x dx$,

в) $\int e^{-3x} \cos x dx$;

2. а) $\int xe^{2x} dx$,

б) $\int (x^2 - 3x - 2) \cos 3x dx$,

в) $\int e^x \sin 4x dx$;

3. а) $\int x^3 \ln x dx$,

б) $\int (x^2 + 2x + 2) \sin 3x dx$,

в) $\int e^{-2x} \cos x dx$;

4. а) $\int x \sin 4x dx$,

б) $\int (2x^2 + x - 2) \cos 2x dx$,

в) $\int e^{2x} \sin 5x dx$;

5. а) $\int \arcsin x dx$,

б) $\int (x^2 + 3x - 2) \sin 3x dx$,

в) $\int e^{4x} \cos 2x dx$;

6. а) $\int x^6 \ln x dx$,

б) $\int (x^2 - 4x - 3) \cos 3x dx$,

в) $\int e^{-3x} \sin 2x dx$;

7. а) $\int x \cos 5x dx$,

б) $\int (x^2 + 5x + 2) \sin 4x dx$,

в) $\int e^{-4x} \cos x dx$;

8. а) $\int xe^{-2x} dx$,

б) $\int (x^2 - 2x + 4) \cos 3x dx$,

в) $\int e^{2x} \sin x dx$;

9. а) $\int x \ln x dx$,

б) $\int (x^2 + 4x - x) \sin 2x dx$,

в) $\int e^{4x} \cos 3x dx$;

10. а) $\int \arctg x dx$,

б) $\int (x^2 - 3x + 5) \cos 3x dx$,

в) $\int e^{-3x} \sin 4x dx$;

11. а) $\int xe^{-3x} dx$,

б) $\int (x^2 - 5x - 2) \sin 2x dx$,

в) $\int e^x \cos 3x dx$;

12. а) $\int x^7 \ln x dx$,

б) $\int (x^2 + 6x - 3) \cos 4x dx$,

в) $\int e^{3x} \sin 2x dx$;

13. а) $\int x \cos 6x dx$,

б) $\int (x^2 + 4x - 2) \sin 3x dx$,

в) $\int e^{-4x} \cos 2x dx$;

14. а) $\int x \arcsin x dx$,

б) $\int (x^2 + 2x + 5) \cos 2x dx$,

в) $\int e^{3x} \sin 5x dx$;

15. а) $\int x^4 \ln x dx$,

б) $\int (x^2 - 4x - 1) \sin 3x dx$,

в) $\int e^{2x} \cos 4x dx$;

16. а) $\int x \cos 3x dx$,

б) $\int (x^2 + 7x - 2) \cos 2x dx$,

в) $\int e^{-2x} \sin 3x dx$;

17. а) $\int xe^{-x} dx$,

б) $\int (x^2 - x + 3) \sin 3x dx$,

в) $\int e^x \cos 2x dx$;

- | | | |
|--|--|--------------------------------|
| 18. а) $\int x \sin 2x dx$, | б) $\int (2x^2 + 3x + 1) \cos 2x dx$, | в) $\int e^{-x} \sin 4x dx$; |
| 19. а) $\int x^2 \ln x dx$, | б) $\int (x^2 + 2x - 5) \sin 3x dx$, | в) $\int e^{-3x} \cos 5x dx$; |
| 20. а) $\int x \cos 4x dx$, | б) $\int (x^2 - 2x - 3) \cos 2x dx$, | в) $\int e^{3x} \sin x dx$; |
| 21. а) $\int x^2 \arctg x dx$, | б) $\int (x^2 + 4x + 3) \sin 3x dx$, | в) $\int e^{2x} \cos 2x dx$; |
| 22. а) $\int x e^{3x} dx$, | б) $\int (x^2 - 5x + 3) \cos 2x dx$, | в) $\int e^{-4x} \sin 3x dx$; |
| 23. а) $\int \sqrt{x} \sin 5x dx$, | б) $\int (x^2 - 4x + 2) \sin 3x dx$, | в) $\int e^{-2x} \cos 5x dx$; |
| 24. а) $\int x^5 \ln x dx$, | б) $\int (x^2 + x + 3) \cos 2x dx$, | в) $\int e^{-4x} \sin 5x dx$; |
| 25. а) $\int x \cos 2x dx$, | б) $\int (x^2 + 2x + 4) \sin 3x dx$, | в) $\int e^{-3x} \cos 3x dx$; |
| 26. а) $\int x \sin 6x dx$, | б) $\int (x^2 + 3x + 4) \cos 2x dx$, | в) $\int e^{4x} \sin x dx$; |
| 27. а) $\int \sqrt{x} \ln x dx$, | б) $\int (x^2 + 2x - 5) \sin 6x dx$, | в) $\int e^{-x} \cos 2x dx$; |
| 28. а) $\int x \cos 7x dx$, | б) $\int (x^2 - 4x - 2) \cos 2x dx$, | в) $\int e^{3x} \sin 4x dx$; |
| 29. а) $\int \sqrt[3]{x^2} \ln x dx$, | б) $\int (x^2 + 2x - 1) \sin 3x dx$, | в) $\int e^{-x} \cos 5x dx$; |
| 30. а) $\int x \sin 10x dx$, | б) $\int (x^2 - 3x + 2) \cos 2x dx$, | в) $\int e^{3x} \sin x dx$. |

Задание 7.6

Найдите интегралы.

- | | |
|--|---|
| 1. а) $\int \frac{3x + 4}{x^2 - 2x + 5} dx$, | б) $\int \frac{xdx}{x^2 + 7x + 10}$; |
| 2. а) $\int \frac{2x - 5}{x^2 + 6x + 10} dx$, | б) $\int \frac{(x + 3)dx}{x^2 + 3x + 2}$; |
| 3. а) $\int \frac{(x + 4)}{x^2 - 2x + 26} dx$, | б) $\int \frac{(3x - 2)dx}{x^2 + x - 6}$; |
| 4. а) $\int \frac{(2x - 1)}{x^2 + 6x + 18} dx$, | б) $\int \frac{(5x - 1)dx}{x^2 - 5x + 6}$; |
| 5. а) $\int \frac{(7x + 2)}{x^2 + 4x + 29} dx$, | б) $\int \frac{(4x - 1)dx}{x^2 + 4x + 3}$; |
| 6. а) $\int \frac{(3x - 1)}{x^2 + 2x + 10} dx$, | б) $\int \frac{(x + 5)dx}{x^2 - x - 12}$; |

- | | |
|---|---------------------------------------|
| 7. a) $\int \frac{(3x-4)}{x^2-4x+20} dx,$ | б) $\int \frac{(4x-3)dx}{x^2-7x+12};$ |
| 8. a) $\int \frac{(2x+5)}{x^2+6x+45} dx,$ | б) $\int \frac{(x+7)dx}{x^2-2x-3};$ |
| 9. a) $\int \frac{(4x-1)}{x^2+2x+17} dx,$ | б) $\int \frac{(3x-1)dx}{x^2+6x+5};$ |
| 10. a) $\int \frac{(x-3)}{x^2+4x+40} dx,$ | б) $\int \frac{(4x+5)dx}{x^2-4x+3};$ |
| 11. a) $\int \frac{(6x-1)}{x^2-6x+13} dx,$ | б) $\int \frac{(5x+1)dx}{x^2+2x-8};$ |
| 12. a) $\int \frac{(2x+7)}{x^2+6x+25} dx,$ | б) $\int \frac{(3x+5)dx}{x^2-4x+3};$ |
| 13. a) $\int \frac{(5x-3)}{x^2-6x+10} dx,$ | б) $\int \frac{(6x+1)dx}{x^2+3x-4};$ |
| 14. a) $\int \frac{(3x-7)}{x^2+8x+32} dx,$ | б) $\int \frac{(2x+9)dx}{x^2+8x+15};$ |
| 15. a) $\int \frac{(4x-3)}{x^2+4x+13} dx,$ | б) $\int \frac{(x-6)dx}{x^2-5x+4};$ |
| 16. a) $\int \frac{(2x+9)}{x^2+4x+29} dx,$ | б) $\int \frac{(3x-10)dx}{x^2-3x-4};$ |
| 17. a) $\int \frac{(3x+11)}{x^2-6x+34} dx,$ | б) $\int \frac{(2x-7)dx}{x^2-6x+8};$ |
| 18. a) $\int \frac{(5x+2)}{x^2+4x+5} dx,$ | б) $\int \frac{(4x+5)dx}{x^2+4x-5};$ |
| 19. a) $\int \frac{(2x-9)}{x^2+2x+5} dx,$ | б) $\int \frac{(7x-1)dx}{x^2+x-2};$ |
| 20. a) $\int \frac{(x-10)}{x^2-8x+20} dx,$ | б) $\int \frac{(6x-1)dx}{x^2+2x-15};$ |
| 21. a) $\int \frac{(3x+2)}{x^2-8x+17} dx,$ | б) $\int \frac{(2x+5)dx}{x^2+6x+8};$ |
| 22. a) $\int \frac{(4x-5)}{x^2-9x+18} dx,$ | б) $\int \frac{(x-11)dx}{x^2+5x+6};$ |
| 23. a) $\int \frac{(2x+7)}{x^2+2x+5} dx,$ | б) $\int \frac{(x+5)dx}{x^2-3x+2};$ |
| 24. a) $\int \frac{(3x-11)}{x^2-8x+25} dx,$ | б) $\int \frac{(2x-9)dx}{x^2+7x+12};$ |

$$\begin{array}{ll}
 25. \text{ a) } \int \frac{(8x-5)}{x^2-4x+40} dx, & \text{ б) } \int \frac{(x+11)dx}{x^2+x-20}; \\
 26. \text{ a) } \int \frac{(2x-13)}{x^2+2x+37} dx, & \text{ б) } \int \frac{(5x+9)dx}{x^2+5x+4}; \\
 27. \text{ a) } \int \frac{(7x+3)}{x^2+4x+29} dx, & \text{ б) } \int \frac{(2x+1)dx}{x^2+x-20}; \\
 28. \text{ a) } \int \frac{(4x-9)}{x^2-4x+8} dx, & \text{ б) } \int \frac{(5x-4)dx}{x^2+3x-10}; \\
 29. \text{ a) } \int \frac{(2x-11)}{x^2+2x+26} dx, & \text{ б) } \int \frac{(x-8)dx}{x^2-2x-8}; \\
 30. \text{ a) } \int \frac{(3x+4)}{x^2-2x+37} dx, & \text{ б) } \int \frac{(2x+15)dx}{x^2-x-2}.
 \end{array}$$

Задание 7.7

Найдите интегралы.

$$\begin{array}{ll}
 1. \text{ a) } \int \frac{(5x-1)dx}{(x+4)^2(x^2-3x+3)}, & \text{ б) } \int \frac{(2x^2-4x+1)dx}{x^4+2x^3+27x+54}, \\
 \text{ в) } \int \frac{x^4+3x^3-x^2+x+5}{x^3-x^2-2x} dx; & \\
 2. \text{ a) } \int \frac{(2x+7)dx}{(x+2)^2(x^2-x+2)}, & \text{ б) } \int \frac{(x^2+x+3)dx}{x^4-x^3-64x+64}, \\
 \text{ в) } \int \frac{2x^4+x^3-3x^2-x+5}{x^3-3x^2-10x} dx; & \\
 3. \text{ a) } \int \frac{(4x-3)dx}{(x-3)^2(x^2-x+1)}, & \text{ б) } \int \frac{(x^2+2x-1)dx}{x^4-3x^3-8x+24}, \\
 \text{ в) } \int \frac{3x^4-2x^3+x^2+2x-1}{x^3+2x^2-3x} dx; & \\
 4. \text{ a) } \int \frac{(x-6)dx}{(x+4)^2(x^2+x+3)}, & \text{ б) } \int \frac{(x^2-3x+5)dx}{x^4+2x^3-8x-16}, \\
 \text{ в) } \int \frac{x^4-x^3+4x^2+3x-1}{x^3-4x} dx; & \\
 5. \text{ a) } \int \frac{(2x-9)dx}{(x-2)(x^2+x+4)}, & \text{ б) } \int \frac{(2x^2+3x-1)dx}{x^4-4x^3-x+4},
 \end{array}$$

- B) $\int \frac{(2x^4 + 5x^3 - x^2 + 4x - 1)}{x^3 - x^2 - 12x} dx;$
6. a) $\int \frac{(3x - 8)dx}{(x + 3)^2(x^2 - 2x + 4)},$ 6) $\int \frac{(x^2 - 3x + 1)dx}{x^4 - 3x^3 + 8x - 24},$
- B) $\int \frac{x^4 + 2x^3 + x^2 - 5x + 2}{x^3 - 7x^2 + 10x} dx;$
7. a) $\int \frac{(7x - 1)dx}{(x - 1)^2(x^2 + x + 3)},$ 6) $\int \frac{(x^2 + 4x + 5)dx}{x^4 - 2x^3 + 27x - 54},$
- B) $\int \frac{(2x^4 - x^3 - x^2 + 6x + 3)}{x^3 - 5x^2 + 6} dx;$
8. a) $\int \frac{(4x - 1)dx}{(x - 3)^2(x^2 + x + 2)},$ 6) $\int \frac{(x^2 - 3x + 6)dx}{x^4 - 2x^3 + x - 2},$
- B) $\int \frac{x^4 + 5x^3 - x^2 + 2x + 4}{x^3 + 2x^2 - 8x} dx;$
9. a) $\int \frac{(x - 5)dx}{(x - 2)^2(x^2 - x + 3)},$ 6) $\int \frac{(x^2 - 5x + 1)dx}{x^4 + 3x^3 - 27x - 81},$
- B) $\int \frac{(x^4 - 2x^3 + 4x^2 - x + 6)}{x^3 - x^2 - 6} dx;$
10. a) $\int \frac{(2x - 3)dx}{(x + 1)^2(x^2 - 2x + 2)},$ 6) $\int \frac{(x^2 - x + 3)dx}{x^4 + 2x^3 + x + 2},$
- B) $\int \frac{(x^4 - 3x^3 + x^2 - 6x + 5)}{x^3 + 5x^2 + 6} dx;$
11. a) $\int \frac{(3x + 4)dx}{(x + 3)^2(x^2 + x + 3)},$ 6) $\int \frac{(x^2 + 2x + 2)dx}{x^4 + 4x^3 + x + 4},$
- B) $\int \frac{(x^4 + x^3 - 2x^2 - 3x - 7)}{x^3 - 3x^2 + 2} dx;$
12. a) $\int \frac{(2x + 1)dx}{(x + 4)^2(x^2 - 2x + 3)},$ 6) $\int \frac{(x^2 + x - 3)dx}{x^4 - x^3 + 27x - 27},$
- B) $\int \frac{(x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x - 8)}{x^3 + 5x^2 + 4x} dx;$
13. a) $\int \frac{(4x - 3)dx}{(x + 2)^2(x^2 - 3x + 3)},$ 6) $\int \frac{(x^2 - 3x + 4)dx}{x^4 - 3x^3 - x + 3},$

- B) $\int \frac{(x^4 - x^3 + 4x^2 - x + 9)}{x^3 - 3x^2 - 4x} dx;$
14. a) $\int \frac{(x-6)dx}{(x-1)^2(x^2+2x+4)},$ б) $\int \frac{(x^2-2x+5)dx}{x^4+x^3+64x+64},$
- B) $\int \frac{(x^4+2x^3+x^2-x+5)}{x^3-x^2-6x} dx;$
15. a) $\int \frac{(5x+2)dx}{(x+3)^2(x^2+x+2)},$ б) $\int \frac{(x^2+4x-1)dx}{x^4+3x^3-x-3},$
- B) $\int \frac{(x^4-3x^3+4x^2-x+11)}{x^3-2x^2-8x} dx;$
16. a) $\int \frac{(3x-2)dx}{(x+2)^2(x^2-2x+2)},$ б) $\int \frac{(x^2+2x-6)dx}{x^4+x^3-27x-27},$
- B) $\int \frac{(x^4-2x^3+4x^2-x+7)}{x^3+7x^2+12x} dx;$
17. a) $\int \frac{(x-4)dx}{(x-1)^2(x^2-x+3)},$ б) $\int \frac{(x^2-3x-5)dx}{x^4+x^3-x-1},$
- B) $\int \frac{(x^4+3x^3-2x^2-4x+9)}{x^3-4x^2-5x} dx;$
18. a) $\int \frac{(2x-5)dx}{(x+4)^2(x^2-x+2)},$ б) $\int \frac{(x^2-4x-6)dx}{x^4-x^3-8x+8},$
- B) $\int \frac{(x^4+x^3-3x^2-6x+1)}{x^3+3x^2+2x} dx;$
19. a) $\int \frac{(7x+2)dx}{(x-1)^2(x^2-2x+3)},$ б) $\int \frac{(x^2+x-1)dx}{x^4-2x^3-27x+54},$
- B) $\int \frac{(x^4-2x^3+x^2-5x+3)}{x^3-4x^2+3x} dx;$
20. a) $\int \frac{(x+6)dx}{(x+3)^2(x^2-2x+2)},$ б) $\int \frac{(x^2+3x-1)dx}{x^4+x^3+27x+27},$
- B) $\int \frac{(x^4-x^3+4x^2-3)}{x^3-6x^2+5x} dx;$
21. a) $\int \frac{(2x-9)dx}{(x-2)^2(x^2+x+2)},$ б) $\int \frac{(x^2-2x+7)dx}{x^4+2x^3-27x-54},$

$$в) \int \frac{(x^4 + 2x^3 - x + 11) dx}{x^3 + 4x^2 + 3x};$$

$$22. а) \int \frac{(5x - 3) dx}{(x + 2)^2(x^2 - 2x + 3)},$$

$$в) \int \frac{(x^4 + x^2 - 3x + 5) dx}{x^3 + 3x^2 - 4x};$$

$$23. а) \int \frac{(3x - 7) dx}{(x + 4)^2(x^2 - x + 1)},$$

$$в) \int \frac{(x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 10) dx}{x^3 + x^2 - 6x};$$

$$24. а) \int \frac{(4x + 5) dx}{(x - 1)^2(x^2 - x + 3)},$$

$$в) \int \frac{(x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 3) dx}{x^3 - 6x^2 + 8x};$$

$$25. а) \int \frac{(x - 2) dx}{(x - 3)^2(x^2 + x + 4)},$$

$$в) \int \frac{(x^4 + 4x^3 - x^2 + x + 6) dx}{x^3 - 2x^2 - 3x};$$

$$26. а) \int \frac{(3x - 8) dx}{(x + 4)^2(x^2 - 2x + 2)},$$

$$в) \int \frac{(x^4 + 3x^3 - x^2 + 10) dx}{x^3 + 4x^2 - 5x};$$

$$27. а) \int \frac{(2x + 9) dx}{(x - 1)^2(x^2 + 2x + 3)},$$

$$в) \int \frac{(x^4 - 2x^3 + x^2 + 7x - 1) dx}{x^3 - 8x^2 + 15x};$$

$$28. а) \int \frac{(6x - 1) dx}{(x - 3)^2(x^2 - x + 2)},$$

$$в) \int \frac{(x^4 - 5x^3 + 2x^2 + x - 9) dx}{x^3 + x^2 - 2x};$$

$$29. а) \int \frac{(x - 9) dx}{(x + 2)^2(x^2 - x + 3)},$$

$$б) \int \frac{(x^2 - x + 8) dx}{x^4 + x^3 + 8x + 8},$$

$$б) \int \frac{(x^2 + 2x - 9) dx}{x^4 + 3x^3 + x + 3},$$

$$б) \int \frac{(x^2 - x - 10) dx}{x^4 - x^3 + 8x - 8},$$

$$б) \int \frac{(x^2 - 3x - 5) dx}{x^4 - 2x^3 - x + 2},$$

$$б) \int \frac{(x^2 + 2x - 11) dx}{x^4 - 2x^3 + 8x - 16},$$

$$б) \int \frac{(x^2 - x - 5) dx}{x^4 + x^3 - 8x - 8},$$

$$б) \int \frac{(x^2 - 2x - 12) dx}{x^4 - 3x^3 + x - 3},$$

$$б) \int \frac{(x^2 + 4x - 1) dx}{x^4 + 2x^3 - x - 2},$$

$$в) \int \frac{(2x^4 + x^3 - 4x^2 - x + 1) dx}{x^3 + x^2 - 12x};$$

$$30. а) \int \frac{(4x+3)dx}{(x+3)^2(x^2+x+4)},$$

$$б) \int \frac{(x^2+x-7)dx}{x^4-3x^3-8x+24},$$

$$в) \int \frac{(x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 7) dx}{x^3 - 6x^2 + 5x} dx.$$

Задание 7.8

Найдите интегралы.

$$1. а) \int \sin^3 x \cos^4 x dx,$$

$$б) \int \sin 4x \cos 6x dx;$$

$$2. а) \int \sin^4 x \cos^4 x dx,$$

$$б) \int \sin 5x \sin 2x dx;$$

$$3. а) \int \sqrt{\sin 5x} \cos 5x dx,$$

$$б) \int \cos 7x \cos 4x dx;$$

$$4. а) \int \sin^2 x \cos^4 x dx,$$

$$б) \int \sin 3x \cos 5x dx;$$

$$5. а) \int \sin^5 x \cos^7 x dx,$$

$$б) \int \sin x \sin 5x dx;$$

$$6. а) \int \sin^3 x \sqrt{\cos x} dx,$$

$$б) \int \sin 4x \cos x dx;$$

$$7. а) \int \sin^3 x \cos^6 x dx,$$

$$б) \int \cos 2x \cos 8x dx;$$

$$8. а) \int \sqrt{\sin x} \cos^3 x dx,$$

$$б) \int \sin 4x \cos 7x dx;$$

$$9. а) \int \sin^4 x \cos^6 x dx,$$

$$б) \int \sin 2x \sin x dx;$$

$$10. а) \int \sin^2 x \cos^2 x dx,$$

$$б) \int \sin 5x \cos 8x dx;$$

$$11. а) \int \sqrt{\sin^3 x} \cos^3 x dx,$$

$$б) \int \cos 2x \cos 6x dx;$$

$$12. а) \int \sin^5 x \cos^5 x dx,$$

$$б) \int \sin 7x \cos 5x dx;$$

$$13. а) \int \sin^2 x \cos^6 x dx,$$

$$б) \int \sin 3x \sin 2x dx;$$

$$14. а) \int \sin^5 x \sqrt{\cos x} dx,$$

$$б) \int \sin 2x \cos 7x dx;$$

$$15. а) \int \sin^2 x \cos^3 x dx,$$

$$б) \int \cos 4x \cos 2x dx;$$

$$16. а) \int \sin^3 x \cos^3 x dx,$$

$$б) \int \sin 5x \sin x dx;$$

17. а) $\int \sqrt{\sin^3 x} \cos x \, dx,$

18. а) $\int \sin^4 x \cos^5 x \, dx,$

19. а) $\int \sin^5 x \cos^2 x \, dx,$

20. а) $\int \sin^4 x \cos^3 x \, dx,$

21. а) $\int \sin^3 x \cos^2 x \, dx,$

22. а) $\int \sin^5 x \sqrt{\cos^3 x} \, dx,$

23. а) $\int \sin^2 x \cos^7 x \, dx,$

24. а) $\int \sin^5 x \cos^8 x \, dx,$

25. а) $\int \sin^3 x \sqrt{\cos^3 x} \, dx,$

26. а) $\int \sqrt{\sin x} \cos x \, dx,$

27. а) $\int \sin^5 x \cos^3 x \, dx,$

28. а) $\int \sin^6 x \cos^3 x \, dx,$

29. а) $\int \sqrt{\sin^3 x} \cos^5 x \, dx,$

30. а) $\int \sin^4 x \cos^7 x \, dx,$

б) $\int \sin 7x \cos 8x \, dx;$

б) $\int \cos x \cos 7x \, dx;$

б) $\int \sin 3x \sin 7x \, dx;$

б) $\int \sin 4x \cos 8x \, dx;$

б) $\int \cos 7x \cos 8x \, dx;$

б) $\int \sin x \sin 3x \, dx;$

б) $\int \sin 5x \cos 7x \, dx;$

б) $\int \cos 4x \cos 5x \, dx;$

б) $\int \sin 3x \sin 6x \, dx;$

б) $\int \sin 5x \cos 3x \, dx;$

б) $\int \sin 7x \sin 6x \, dx;$

б) $\int \cos x \cos 4x \, dx;$

б) $\int \sin 3x \cos 8x \, dx;$

б) $\int \sin 2x \sin 5x \, dx.$

Задание 7.9

Найдите интегралы.

1. $\int \frac{dx}{1 - 2\sin x - 2\cos x};$

2. $\int \frac{dx}{2 - \sin x + 2\cos x};$

3. $\int \frac{dx}{1 + 2\sin x - 2\cos x};$

4. $\int \frac{dx}{1 + 3\sin x + \cos x};$

5. $\int \frac{dx}{1 - \sin x - 2\cos x};$

6. $\int \frac{dx}{1 + \sin x + 3\cos x};$

7. $\int \frac{dx}{1 - 3\sin x - \cos x};$

8. $\int \frac{dx}{2 - \sin x + \cos x};$

9. $\int \frac{dx}{1 + \sin x - 3\cos x};$

10. $\int \frac{dx}{2 + 2\sin x - \cos x};$

$$11. \int \frac{dx}{1 + \sin x + 2 \cos x};$$

$$12. \int \frac{dx}{1 - 2 \sin x + 2 \cos x};$$

$$13. \int \frac{dx}{1 + 3 \sin x - \cos x};$$

$$14. \int \frac{dx}{1 - 3 \sin x + 3 \cos x};$$

$$15. \int \frac{dx}{1 + 2 \sin x + \cos x};$$

$$16. \int \frac{dx}{1 + \sin x + \cos x};$$

$$17. \int \frac{dx}{1 - \sin x - \cos x};$$

$$18. \int \frac{dx}{2 + \sin x - 2 \cos x};$$

$$19. \int \frac{dx}{2 - 2 \sin x - \cos x};$$

$$20. \int \frac{dx}{1 - \sin x + \cos x};$$

$$21. \int \frac{dx}{1 + 3 \sin x + 3 \cos x};$$

$$22. \int \frac{dx}{2 + 2 \sin x + \cos x};$$

$$23. \int \frac{dx}{1 - \sin x + 2 \cos x};$$

$$24. \int \frac{dx}{2 - 2 \sin x + \cos x};$$

$$25. \int \frac{dx}{1 - 3 \sin x + \cos x};$$

$$26. \int \frac{dx}{2 + \sin x - \cos x};$$

$$27. \int \frac{dx}{1 + 3 \sin x - 2 \cos x};$$

$$28. \int \frac{dx}{1 - 2 \sin x + \cos x};$$

$$29. \int \frac{dx}{1 + 2 \sin x + 2 \cos x};$$

$$30. \int \frac{dx}{1 - 2 \sin x - \cos x};$$

Задание 7.10

Найдите интегралы.

$$1. a) \int \frac{\sqrt{x^2 - 9} dx}{x^4},$$

$$2. a) \int \frac{\sqrt{4 - x^2} dx}{x},$$

$$3. a) \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 16}},$$

$$4. a) \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2 - 9}},$$

$$5. a) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{25 - x^2}},$$

$$6) \int \frac{(2x - 5) dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 13}};$$

$$6) \int \frac{(3x + 1) dx}{\sqrt{-x^2 + 6x + 40}};$$

$$6) \int \frac{(4x - 3) dx}{\sqrt{x^2 - 6x - 7}};$$

$$6) \int \frac{(2x + 3) dx}{\sqrt{x^2 + 4x - 5}};$$

$$6) \int \frac{(6x - 1) dx}{\sqrt{-x^2 - 2x + 3}};$$

6. a) $\int x^2 \sqrt{16 - x^2} dx,$

7. a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 36}},$

8. a) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{4 - x^2}},$

9. a) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9 - x^2}},$

10. a) $\int \frac{\sqrt{x^2 - 36} dx}{x^4},$

11. a) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{16 - x^2}},$

12. a) $\int \frac{\sqrt{9 - x^2} dx}{x},$

13. a) $\int \frac{\sqrt{x^2 - 49} dx}{x^4},$

14. a) $\int x^2 \sqrt{4 - x^2} dx,$

15. a) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{36 - x^2}},$

16. a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{25 - x^2}},$

17. a) $\int \frac{\sqrt{4 - x^2} dx}{x^2},$

18. a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 36}},$

19. a) $\int \frac{\sqrt{x^2 - 16} dx}{x^4},$

20. a) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2 - 4}},$

6) $\int \frac{(x - 3) dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 8}};$

6) $\int \frac{(4x - 5) dx}{\sqrt{-x^2 + 6x - 5}};$

6) $\int \frac{(6x + 5) dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 20}};$

6) $\int \frac{x dx}{\sqrt{-x^2 + 2x + 24}};$

6) $\int \frac{(2x - 3) dx}{\sqrt{-x^2 + 4x + 5}};$

6) $\int \frac{(3x + 2) dx}{\sqrt{x^2 + 2x - 8}};$

6) $\int \frac{(2x + 5) dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 20}};$

6) $\int \frac{(x - 5) dx}{\sqrt{-x^2 - 6x + 7}};$

6) $\int \frac{(4x - 7) dx}{\sqrt{x^2 + 2x - 8}};$

6) $\int \frac{(2x - 9) dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 53}};$

6) $\int \frac{(4x - 3) dx}{\sqrt{-x^2 + 4x + 12}};$

6) $\int \frac{(2x + 11) dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 10}};$

6) $\int \frac{(6x + 5) dx}{\sqrt{x^2 - 4x - 60}};$

6) $\int \frac{(2x - 7) dx}{\sqrt{-x^2 - 6x + 16}};$

6) $\int \frac{(3x - 8) dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 25}};$

- | | |
|--|--|
| 21. а) $\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{64-x^2}}$, | б) $\int \frac{(5x+11)dx}{\sqrt{x^2-2x+10}}$; |
| 22. а) $\int \frac{\sqrt{16-x^2} dx}{x}$, | б) $\int \frac{(4x+7)dx}{\sqrt{-x^2+2x+15}}$; |
| 23. а) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2-16}}$, | б) $\int \frac{(x-8)dx}{\sqrt{x^2+6x}}$; |
| 24. а) $\int x^3 \sqrt{9-x^2} dx$, | б) $\int \frac{(2x-9)dx}{\sqrt{x^2+4x+13}}$; |
| 25. а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+16}}$, | б) $\int \frac{(3x+5)dx}{\sqrt{-x^2-4x+5}}$; |
| 26. а) $\int \frac{dx}{x\sqrt{49-x^2}}$, | б) $\int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{x^2+4x-40}}$; |
| 27. а) $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{9-x^2}}$, | б) $\int \frac{(4x-5)dx}{\sqrt{x^2+2x+17}}$; |
| 28. а) $\int \frac{\sqrt{x^2-16} dx}{x}$, | б) $\int \frac{(6x-7)dx}{\sqrt{-x^2-4x+12}}$; |
| 29. а) $\int x^2 \sqrt{9-x^2} dx$, | б) $\int \frac{(2x-9)dx}{\sqrt{x^2+4x-21}}$; |
| 30. а) $\int x^3 \sqrt{4-x^2} dx$, | б) $\int \frac{(3x-2)dx}{\sqrt{x^2+2x+5}}$. |

Задание 7.11

Вычислите интегралы.

- | | |
|---|--|
| 1. $\int_1^2 \left(x^3 - \frac{5}{\sqrt{x}} + \frac{2}{1+x^2} \right) dx$; | 4. $\int_2^4 \left(\frac{3}{x} - \frac{6}{x^2} - \sin \frac{\pi x}{8} \right) dx$; |
| 2. $\int_1^3 \left(\frac{4}{\sqrt[3]{x}} + \frac{7}{x} - e^{2x} \right) dx$; | 5. $\int_3^4 \left(6\sqrt{x} - \frac{8}{x} + 2^{4x} \right) dx$; |
| 3. $\int_1^4 \left(\sqrt{2x-1} + \frac{7}{x^2} - 3\cos \frac{\pi x}{4} \right) dx$; | 6. $\int_3^5 \left(\sqrt[3]{4x+1} - \frac{8}{x} + 2e^{3x} \right) dx$; |

7. $\int_1^3 \left(2\sqrt[3]{x^2} + \frac{4}{x^3} - \frac{3}{9+x^2} \right) dx;$
8. $\int_{-2}^{-1} \left(\sqrt{2x+5} - \frac{3}{x} - e^{4x} \right) dx;$
9. $\int_2^3 \left(\frac{5}{x^3} + \frac{8}{x} + \frac{3}{16+x^2} \right) dx;$
10. $\int_0^{1/2} \left(\sqrt{6x+1} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + e^{2x} \right) dx;$
11. $\int_{-3}^0 \left(\sqrt{4x+125} - 8x^3 - 7e^{2x} \right) dx;$
12. $\int_3^5 \left(\sqrt{3x+1} - \frac{2}{x^2} - \cos \frac{\pi x}{2} \right) dx;$
13. $\int_0^2 \left(4x^3 + \frac{5}{\sqrt{4x+1}} + 2e^{-3x} \right) dx;$
14. $\int_0^{\pi/4} \left(3\sqrt{x} - \frac{2}{\cos^2 x} - 6\cos 2x \right) dx;$
15. $\int_3^4 \left(3x^2 + \frac{4}{x} - e^{2x} \right) dx;$
16. $\int_0^3 \left(2x^2 - \frac{1}{\sqrt{4+x^2}} + 5e^{-2x} \right) dx;$
17. $\int_1^4 \left(\frac{3}{x} - \frac{6}{x^2} + e^{3x} \right) dx;$
18. $\int_2^5 \left(\frac{8}{x^3} - 3\sqrt{2x-1} - e^{x/2} \right) dx;$
19. $\int_2^5 \left(\sqrt{6x-5} - \frac{9}{x^2} + \sin \frac{\pi x}{4} \right) dx;$
20. $\int_1^6 \left(3\sqrt[3]{x} - \frac{4}{x^2} - 5 \cdot 2^x \right) dx;$
21. $\int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{5}{\sqrt{4+x^2}} - 3\sin \frac{\pi x}{3} \right) dx;$
22. $\int_{-3}^{-1} \left(\sqrt{-3x+2} - \frac{7}{x^2} + \frac{4}{9+x^2} \right) dx;$
23. $\int_2^5 \left(3x^2 - \frac{7}{x} + 2^{3x} \right) dx;$
24. $\int_1^6 \left(2x^7 - \frac{3}{\sqrt{4x+1}} - \sin \frac{\pi x}{6} \right) dx;$
25. $\int_3^5 \left(\frac{4}{\sqrt{x}} - \frac{6}{x} + 2\sin \frac{\pi x}{3} \right) dx;$
26. $\int_2^6 \left(2\sqrt{3x-2} + \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x} \right) dx;$
27. $\int_0^2 \left(4x^4 - \frac{3}{x^2+25} - \sin \frac{\pi x}{3} \right) dx;$
28. $\int_2^4 \left(\sqrt{3x-2} - \frac{2}{x^2} + 2\cos \frac{\pi x}{8} \right) dx;$
29. $\int_0^4 \left(\sqrt{2x+1} - \frac{6}{\sqrt{x^2+25}} - \sin \frac{\pi x}{8} \right) dx;$
30. $\int_1^2 \left(\sqrt{5x-1} - \frac{9}{x} + 2\sin \frac{\pi x}{2} \right) dx.$

Задание 7.12

Вычислите интегралы.

- | | | |
|--|--------------------------------|---|
| 1. а) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}$, | б) $\int_1^2 x(5x-3)^4 dx$, | в) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4-\sin x + \cos x}$; |
| 2. а) $\int_{3\sqrt{2}}^5 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$, | б) $\int_0^2 x^2(3x-8)^6 dx$, | в) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\sin x + \cos x}$; |
| 3. а) $\int_0^2 \frac{x^3 dx}{\sqrt{16-x^2}}$, | б) $\int_1^3 x^2(2x+3)^5 dx$, | в) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4-3\sin x - \cos x}$; |
| 4. а) $\int_4^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+16}}$, | б) $\int_0^3 x^2(5x-2)^6 dx$, | в) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+\sin x - \cos x}$; |
| 5. а) $\int_{10/\sqrt{3}}^{10} \frac{\sqrt{x^2-25} dx}{x}$, | б) $\int_0^1 x(3x+4)^5 dx$, | в) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2-\sin x - \cos x}$; |
| 6. а) $\int_2^4 x^2\sqrt{16-x^2} dx$, | б) $\int_0^2 x^2(4x-5)^4 dx$, | в) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4-\sin x - 2\cos x}$; |
| 7. а) $\int_1^2 \frac{\sqrt{4-x^2} dx}{x}$, | б) $\int_1^2 x(5x+2)^6 dx$, | в) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\sin x + \cos x}$; |
| 8. а) $\int_{4\sqrt{2}}^8 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-16}}$, | б) $\int_2^3 x^2(2x-3)^5 dx$, | в) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4-2\sin x + \cos x}$; |
| 9. а) $\int_0^3 \frac{x^2 dx}{\sqrt{36-x^2}}$, | б) $\int_0^1 x(4x+3)^6 dx$, | в) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+2\sin x + \cos x}$; |
| 10. а) $\int_{3\sqrt{2}}^6 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-9}}$, | б) $\int_0^2 x^2(5x-3)^7 dx$, | в) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+\sin x + 2\cos x}$; |
| 11. а) $\int_2^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$, | б) $\int_1^2 x(4x-3)^4 dx$, | в) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2-\sin x + \cos x}$; |
| 12. а) $\int_3^6 \frac{\sqrt{36-x^2} dx}{x}$, | б) $\int_0^1 x^2(3x+1)^5 dx$, | в) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4+\sin x - 2\cos x}$; |
| 13. а) $\int_{2\sqrt{3}}^6 \frac{\sqrt{x^2-9} dx}{x}$, | б) $\int_0^2 x(5x+1)^4 dx$, | в) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x + \cos x}$; |

14. a) $\int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{4-x^2}}$, б) $\int_0^1 x^2(4x+3)^4 dx$, в) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4+2\sin x+\cos x}$;
15. a) $\int_{5\sqrt{2}}^{10} \frac{dx}{x\sqrt{x^2-25}}$, б) $\int_2^3 x(3x-5)^6 dx$, в) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+\sin x+2\cos x}$;
16. a) $\int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}}$, б) $\int_{-2}^{-1} x^2(5x-2)^4 dx$, в) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2+\sin x-\cos x}$;
17. a) $\int_3^{3\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+9}}$, б) $\int_0^1 x^2(2x-3)^6 dx$, в) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4-3\sin x+\cos x}$;
18. a) $\int_2^4 \frac{\sqrt{16-x^2} dx}{x}$, б) $\int_{-1}^0 x(5x-2)^7 dx$, в) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x+2\cos x}$;
19. a) $\int_{4/\sqrt{3}}^4 \frac{\sqrt{x^2-4} dx}{x}$, б) $\int_1^2 x^2(2x+3)^4 dx$, в) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4+\sin x-2\cos x}$;
20. a) $\int_0^{5/2} \frac{x^2 dx}{\sqrt{25-x^2}}$, б) $\int_{-3}^{-2} x(5x+3)^4 dx$, в) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+\sin x-\cos x}$;
21. a) $\int_{3/2}^3 3\sqrt{9-x^2} dx$, б) $\int_{-2}^0 x^2(3x+1)^6 dx$, в) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3-2\cos x-\sin x}$;
22. a) $\int_0^{5/2} \frac{x^3 dx}{\sqrt{25-x^2}}$, б) $\int_0^2 x(4x-7)^5 dx$, в) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2-\sin x+\cos x}$;
23. a) $\int_{4\sqrt{2}}^8 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-16}}$, б) $\int_{-2}^{-1} x(5x-3)^6 dx$, в) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4-2\sin x-\cos x}$;
24. a) $\int_0^2 \frac{x^2 dx}{\sqrt{16-x^2}}$, б) $\int_2^3 x(3x+2)^7 dx$, в) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+\sin x+\cos x}$;
25. a) $\int_{3/2}^3 \frac{\sqrt{9-x^2} dx}{x}$, б) $\int_0^2 x^2(4x+3)^5 dx$, в) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$;
26. a) $\int_{5/2}^5 x^2\sqrt{25-x^2} dx$, б) $\int_{-3}^{-2} x(2x-1)^4 dx$, в) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4+\sin x+2\cos x}$;
27. a) $\int_{8/\sqrt{3}}^8 \frac{\sqrt{x^2-16} dx}{x}$, б) $\int_{-1}^0 x^2(3x-4)^5 dx$, в) $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3-2\sin x+\cos x}$;

$$28. a) \int_0^{3/2} \frac{x^3 dx}{\sqrt{9-x^2}},$$

$$29. a) \int_{2\sqrt{2}}^4 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-4}},$$

$$30. a) \int_{5/2}^5 \frac{\sqrt{25-x^2} dx}{x},$$

$$b) \int_0^1 x(5x-2)^5 dx, \quad b) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4+2\sin x - \cos x};$$

$$b) \int_1^3 x(2x+3)^7 dx, \quad b) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{3+2\sin x - \cos x};$$

$$b) \int_0^2 x^2(3x-8)^4 dx, \quad b) \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{4-\sin x - \cos x}.$$

Задание 7.13

Вычислите интегралы.

$$1. a) \int_1^{e^2} \sqrt{x} \ln x dx,$$

$$b) \int_0^{\pi} (x^2 - 3x) \sin 2x dx;$$

$$2. a) \int_0^{\pi/2} x \sin 3x dx,$$

$$b) \int_1^e \frac{\ln^2 x dx}{x^3};$$

$$3. a) \int_0^2 x e^{x/2} dx,$$

$$b) \int_0^{1/\pi} (x^2 - 2x + 1) \cos 3x dx;$$

$$4. a) \int_0^{2\pi} x \cos \frac{x}{2} dx,$$

$$b) \int_0^1 (x^2 - 3x - 1) e^{2x} dx;$$

$$5. a) \int_e^{e^2} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx,$$

$$b) \int_0^{\pi} (x^2 + x - 2) \sin \frac{x}{2} dx;$$

$$6. a) \int_0^{\pi} x \sin \frac{x}{3} dx,$$

$$b) \int_e^{2e} x^{5/2} \ln^2 x dx;$$

$$7. a) \int_0^1 x e^{-2x} dx,$$

$$b) \int_{-\pi}^{\pi} (x^2 + 3x + 4) \cos \frac{x}{3} dx;$$

$$8. a) \int_0^{\pi/2} x \cos 4x dx,$$

$$b) \int_0^2 (x^2 - 2x + 2) e^{x/2} dx;$$

$$9. a) \int_1^{e^3} \sqrt[3]{x} \ln x dx,$$

$$b) \int_0^{2\pi} (x^2 - 2x - 1) \sin \frac{x}{3} dx;$$

$$10. a) \int_{-\pi}^0 x \sin \frac{x}{4} dx,$$

$$b) \int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx;$$

11. a) $\int_0^3 x e^{x/3} dx,$

б) $\int_0^{\pi} (x^2 - 3x + 5) \cos \frac{x}{2} dx;$

12. a) $\int_0^{\pi} x \cos \frac{x}{3} dx,$

б) $\int_0^3 (x^2 + 4x - 6) e^{x/3} dx;$

13. a) $\int_1^e \sqrt[3]{x^2} \ln x dx,$

б) $\int_0^{\pi/2} (x^2 + 2x + 2) \sin 4x dx;$

14. a) $\int_0^{\pi} x \sin \frac{x}{4} dx,$

б) $\int_c^{e^3} x^3 \ln^2 x dx;$

15. a) $\int_0^2 x e^{-x/2} dx,$

б) $\int_0^{\pi/2} (x^2 - 5x + 3) \cos 2x dx;$

16. a) $\int_0^1 x \cos \frac{2}{3} x dx,$

б) $\int_0^1 (x^2 - 2x - 7) e^{2x} dx;$

17. a) $\int_{e^{-2}}^{e^{-1}} x \ln x dx,$

б) $\int_9^{2\pi} (x^2 - 6x + 10) \sin \frac{x}{4} dx;$

18. a) $\int_{-\pi/2}^0 x \sin \frac{2}{3} x dx,$

б) $\int_1^{e^3} \sqrt[3]{x} \ln^2 x dx;$

19. a) $\int_1^2 x e^{\frac{2}{3}x} dx,$

б) $\int_0^{\pi/2} (x^2 - 7x + 2) \cos 2x dx;$

20. a) $\int_0^{\pi/3} x \cos 3x dx,$

б) $\int_0^2 (x^2 - 5x - 7) e^{x/2} dx;$

21. a) $\int_1^e \sqrt{x^3} \ln x dx,$

б) $\int_0^{\pi} (x^2 - 3x - 2) \sin \frac{x}{2} dx;$

22. a) $\int_0^{\pi} x \sin \frac{3x}{2} dx,$

б) $\int_2^e x^4 \ln^2 x dx;$

23. a) $\int_0^3 x e^{-x/3} dx,$

б) $\int_{-\pi/2}^0 (x^2 + 4x + 10) \cos 2x dx;$

24. a) $\int_0^{\pi/2} x \cos \frac{x}{3} dx,$

б) $\int_0^2 (x^2 + 5x - 2) e^{3x} dx;$

25. а) $\int_e^{2e} x^{5/2} \ln x dx$, б) $\int_0^{\pi/2} (x^2 - 3x + 11) \sin 2x dx$;
26. а) $\int_0^{\pi/6} x \sin 3x dx$, б) $\int_2^e x^2 \ln^2 x dx$;
27. а) $\int_0^2 x e^{-3x} dx$, б) $\int_0^{\pi} (x^2 - 4x + 1) \cos \frac{x}{2} dx$;
28. а) $\int_0^{\pi} x \cos \frac{2x}{5} dx$, б) $\int_0^3 (x^2 - 6x - 7) e^{x/3} dx$;
29. а) $\int_1^e x^4 \ln x dx$, б) $\int_0^{-\pi} (x^2 - 7x + 1) \sin \frac{x}{3} dx$;
30. а) $\int_0^{2\pi} x \sin \frac{x}{6} dx$, б) $\int_e^{e^2} \sqrt[4]{x^3} \ln^2 x dx$.

Задание 7.14

Вычислите несобственные интегралы или установите их расходимость.

1. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(\arctg x)^2 (1+x^2)}$; 7. $\int_2^{+\infty} \frac{(\ln x)^{3/2} dx}{x}$; 13. $\int_3^{+\infty} \frac{x dx}{(1+x^2)^{5/2}}$;
2. $\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{(\arctg x)^3 dx}{1+x^2}$; 8. $\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\ln x} dx}{x}$; 14. $\int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{(1+x^2)^{3/4}}$;
3. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{\arctg x}}$; 9. $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2}$; 15. $\int_1^{+\infty} \frac{x^2 dx}{(2+x^3)^2}$;
4. $\int_{\sqrt{3}}^1 \frac{(\arctg x)^2 dx}{1+x^2}$; 10. $\int_4^{+\infty} \frac{dx}{x \ln x}$; 16. $\int_0^{+\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt{2+x^4}}$;
5. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\arctg x}$; 11. $\int_5^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^3}$; 17. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{x^2 dx}{(4+x^3)^3}$;
6. $\int_{-\infty}^0 \frac{(\arctg x)^{5/2} dx}{1+x^2}$; 12. $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{3/2}}$; 18. $\int_0^{+\infty} \frac{x dx}{(1+x^2)^{2/3}}$;

19.
$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{\arctg x} dx}{1+x^2};$$

23.
$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x dx}{x};$$

27.
$$\int_2^{+\infty} \frac{x dx}{(1+x^2)^{4/3}};$$

20.
$$\int_{-\infty}^{-1} \frac{dx}{(\arctg x)^3(1+x^2)};$$

24.
$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{5/2}};$$

28.
$$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx;$$

21.
$$\int_1^{+\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt{(1+x^4)^5}};$$

25.
$$\int_{-\infty}^{-\sqrt{3}} \frac{dx}{(1+x^2)(\arctg x)^{3/2}};$$

29.
$$\int_3^{+\infty} \frac{(\ln x)^3 dx}{x};$$

22.
$$\int_{-\infty}^0 \frac{x dx}{1+x^2};$$

26.
$$\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{(\arctg x)^{3/2} dx}{1+x^2};$$

30.
$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{3/2}}.$$

Задание 7.15

Исследуйте на сходимость несобственные интегралы.

1. а)
$$\int_2^{+\infty} \frac{(x^3 + 2x + 3)dx}{2x^5 - x^4 - x^2 + 4},$$

б)
$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{2x-1}}{x+5} dx,$$

в)
$$\int_0^{+\infty} \frac{x + \sin^2 x}{x^2 + 3} dx;$$

2. а)
$$\int_1^{+\infty} \frac{(x^5 - 3x^2 + x + 2)dx}{3x^6 - 4x^3 + x + 5},$$

б)
$$\int_3^{+\infty} \frac{\sqrt{x^3 + x}}{x^4 - 1} dx,$$

в)
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 + \cos 4x}{x^6 + x + 1} dx;$$

3. а)
$$\int_1^{+\infty} \frac{(x-3)dx}{x^4 - x^3 + 5x^2 - x + 1},$$

б)
$$\int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{3x-1}}{x^2 + 4} dx,$$

в)
$$\int_1^{+\infty} \frac{x^2 + \arctg 3x}{x^3 + x + 2} dx;$$

4. а)
$$\int_2^{+\infty} \frac{(x^7 - x^5 + x + 3)dx}{x^9 + 4x^6 + 5},$$

б)
$$\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{2x^3 + 3}}{x + 6} dx,$$

$$b) \int_2^{+\infty} \frac{x^3 + 2 \sin x}{x^6 + x - 1} dx;$$

$$5. a) \int_3^{+\infty} \frac{(2x^3 - x^2 + 4x - 1)dx}{3x^8 - x^5 + x^2 - 2},$$

$$b) \int_3^{+\infty} \frac{x^3 - 3 \cos^2 x}{x^4 + 2} dx;$$

$$6. a) \int_4^{+\infty} \frac{(x+7)dx}{x^2 - 3x + 5},$$

$$6) \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{4x^2 + 3}}{x^2 + x + 1} dx,$$

$$b) \int_1^{+\infty} \frac{x^4 + x^2 - \operatorname{arctg} x}{x^6 + x^2 + 1} dx;$$

$$6) \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x-2}}{\sqrt{4x^3 + 3}} dx,$$

$$7. a) \int_1^{+\infty} \frac{(x^2 - x + 3)dx}{2x^9 + x^5 - x + 4},$$

$$6) \int_3^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{2x-1}}{\sqrt{5x+1}} dx,$$

$$b) \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x} + \sin 10x}{x^3 + x^2 + 2x - 1} dx;$$

$$8. a) \int_3^{+\infty} \frac{(x^5 - x^2 + 4)dx}{3x^9 - 6x^4 + x + 7},$$

$$6) \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{5x^2 + 2}}{x-1} dx,$$

$$b) \int_1^{+\infty} \frac{x+7 - \cos 3x}{x^3 + 5x^2 - 1} dx;$$

$$9. a) \int_2^{+\infty} \frac{(x+2)dx}{x^7 + 2x^4 - x^2 + 4},$$

$$6) \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{2x^3 + x - 1}}{4x^3 - x^2 + 3} dx,$$

$$b) \int_3^{+\infty} \frac{x^4 + 3x^2 - x + \operatorname{arctg} 2x}{x^5 + x^4 - 2x^2 + 4} dx;$$

$$10. a) \int_1^{+\infty} \frac{(x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 1)dx}{2x^5 + 3x^4 - x + 10},$$

$$6) \int_3^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{5x^3 - x}}{x^3 - x^2 + 7} dx,$$

$$b) \int_2^{+\infty} \frac{(x^2 - x + \sin^3 x)}{x^3 + 4x^2 - 1} dx;$$

$$11. a) \int_3^{+\infty} \frac{(2x^6 - 3x^5 + x - 1)dx}{3x^7 - x^2 - x + 5},$$

$$b) \int_1^{+\infty} \frac{x^4 + x^3 - \cos^2 x}{2x^6 + x - 1} dx;$$

$$12. a) \int_2^{+\infty} \frac{(3x - 1)dx}{2x^8 + x^2 - 3},$$

$$b) \int_3^{+\infty} \frac{x - \arctg^2 x}{x^2 + 4x - 1} dx;$$

$$13. a) \int_1^{+\infty} \frac{(x + 2)dx}{3x^6 - x^2 + 5},$$

$$b) \int_2^{+\infty} \frac{2x^4 + x + \sin 3x}{3x^5 - x^2 + 7} dx;$$

$$14. a) \int_4^{+\infty} \frac{(x^5 - x^2 + 3)dx}{2x^8 + 2x^3 - x - 1},$$

$$b) \int_1^{+\infty} \frac{x + \cos^3 x}{x^5 + x^4 - x + 1} dx;$$

$$15. a) \int_2^{+\infty} \frac{(x^2 + 3x - 1)dx}{4x^6 - x^2 + x - 1},$$

$$b) \int_3^{+\infty} \frac{x^2 - x + 2\arctg 6x}{3x^5 + x^2 + 3} dx;$$

$$16. a) \int_1^{+\infty} \frac{(2x^7 - x^2 + 3)dx}{5x^8 + 3x^4 - x + 2},$$

$$b) \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x} + 4\sin 3x}{2x^3 + x^2 + 1} dx;$$

$$17. a) \int_3^{+\infty} \frac{(3x^4 - x^2 + x)dx}{2x^7 + x^3 + x^2 + 5},$$

$$6) \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{6x - 1}}{x^4 + 2x^3 - 1} dx,$$

$$6) \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{4x^3 + 3}}{3x^5 - x^2 + 4x + 1} dx,$$

$$6) \int_3^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{6x^2 + 1}}{x^3 + x + 4} dx,$$

$$6) \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{4x - 3}}{2x + 9} dx,$$

$$6) \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{3x + 1}}{\sqrt{5x^3 - 1}} dx,$$

$$6) \int_3^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{6x + 1}}{2x^3 - x^2 + 3} dx,$$

$$6) \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{3x^3 + 5}}{x^2 + 4x + 1} dx,$$

$$b) \int_1^{+\infty} \frac{x + 2 \cos^2 4x}{x^3 + x + 7} dx;$$

$$18. a) \int_2^{+\infty} \frac{(4x^2 - x - 2)dx}{8x^3 + 3x^2 - x},$$

$$b) \int_4^{+\infty} \frac{6x - 5 \operatorname{arctg} x}{2x^4 - x^3 + 6x} dx;$$

$$19. a) \int_4^{+\infty} \frac{(2x - 5)dx}{4x^3 - x^2 + 7},$$

$$b) \int_3^{+\infty} \frac{x^2 + x - \sin 10x}{2x^4 + x^2 + x} dx;$$

$$20. a) \int_1^{+\infty} \frac{(3x^2 + x - 2)dx}{2x^7 + 3x^5 - x^2 - 1},$$

$$b) \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt{x} - 3 \cos 2x}{x + 4} dx;$$

$$21. a) \int_3^{+\infty} \frac{(4x^8 - x^7 + 5)dx}{2x^9 + x^8 + x},$$

$$b) \int_1^{+\infty} \frac{5x^2 + x - \operatorname{arctg} 6x}{2x^5 - x^3 + 2} dx;$$

$$22. a) \int_2^{+\infty} \frac{(4x^3 + x^2 - 2x - 3)dx}{5x^7 - x^2 + x + 1},$$

$$b) \int_4^{+\infty} \frac{\sqrt{x} + 2 \sin^2 3x}{x^2 + 3x + 7} dx;$$

$$23. a) \int_4^{+\infty} \frac{(x^2 + 6x - 1)dx}{2x^8 - x^5 + x + 3},$$

$$b) \int_2^{+\infty} \frac{2x^3 + (\operatorname{arctg} 3x)^2}{3x^4 + x^2 + x + 5} dx;$$

$$6) \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{3x+4}}{x^2 + 5x - 1} dx,$$

$$6) \int_3^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{2x-1}}{\sqrt[3]{x^2+x+3}} dx,$$

$$6) \int_4^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{5x^3-1}}{x^2-6x+8} dx,$$

$$6) \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{3x+2}}{x+6} dx,$$

$$6) \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{9x^3-x^2+1}}{\sqrt[3]{2x^5+x+3}} dx,$$

$$6) \int_3^{+\infty} \frac{\sqrt{4x-3}}{6x^3+x^2-x+4} dx,$$

$$24. a) \int_1^{+\infty} \frac{(3x^5 - x^2 + x + 10)dx}{2x^7 + x^4 - x^3 + 1},$$

$$b) \int_2^{+\infty} \frac{9x^2 - x - 2\sin x}{2x^5 + x^3 + x^2} dx;$$

$$25. a) \int_3^{+\infty} \frac{(10x+1)dx}{4x^6 + 3x^5 - x + 2},$$

$$b) \int_1^{+\infty} \frac{5x - 2\cos x}{6x^2 - 4x + 3} dx;$$

$$26. a) \int_2^{+\infty} \frac{(7x^3 - x^2 + 2)dx}{2x^4 + x^3 - 3},$$

$$b) \int_4^{+\infty} \frac{x + \arcsin \frac{1}{x}}{x^5 + x^2 + 2} dx;$$

$$27. a) \int_4^{+\infty} \frac{(3x^4 - x^2 + 5)dx}{2x^8 - x^5 + x^2},$$

$$b) \int_2^{+\infty} \frac{x + 4\sin x^2}{x^5 - x^3 + x - 1} dx;$$

$$28. a) \int_2^{+\infty} \frac{(9x^5 - x + 1)dx}{4x^5 + x^2 + 3},$$

$$b) \int_3^{+\infty} \frac{x^2 + 2 + \cos \sqrt{x}}{4x^3 - x^2 + 3x + 1} dx;$$

$$29. a) \int_3^{+\infty} \frac{(4x^3 - x^2 + 1)dx}{3x^6 + x^2 + 3},$$

$$b) \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x} + 5 + \operatorname{arctg} 3x}{7x - 1} dx;$$

$$6) \int_4^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{8x+5}}{\sqrt{6x^3 + x^2 + 1}} dx,$$

$$6) \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + x + 1}}{3x^4 + x^2 + 6x} dx,$$

$$6) \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{2x^3 - 1}}{x^4 + 5x^3 + x} dx,$$

$$6) \int_3^{+\infty} \frac{\sqrt{10x^3 - x}}{\sqrt{8x^5 + x + 2}} dx,$$

$$6) \int_1^{+\infty} \frac{\sqrt[3]{5x+7}}{2x^2 + 2x - 1} dx,$$

$$6) \int_4^{+\infty} \frac{\sqrt{4x+9}}{\sqrt{2x^3 - 5}} dx,$$

$$30. \text{ а) } \int_1^{+\infty} \frac{(2x^4 - x^3 + 5)dx}{3x^6 + x^5 + x - 2},$$

$$\text{б) } \int_2^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{8x^3 - x^2}}{\sqrt{2x^3 + 5}} dx,$$

$$\text{в) } \int_4^{+\infty} \frac{x + \sin \sqrt{x}}{x^4 + 2x^3 + 6} dx;$$

Задание 7.16

Вычислите несобственные интегралы или установите их расходимость.

$$1. \int_2^4 \frac{(2x-3)dx}{x^2-3x+2};$$

$$10. \int_1^3 \frac{dx}{x(\ln x)^{3/2}};$$

$$19. \int_0^{\sqrt{4/\pi}} \frac{1}{x^{4/3}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right) dx;$$

$$2. \int_0^1 \frac{1}{x^4} e^{1/x^3} dx;$$

$$11. \int_{-3}^2 \frac{(2x+7)dx}{\sqrt[3]{(x^2+7x+12)^2}};$$

$$20. \int_0^{\sqrt{2/\pi}} \frac{1}{x^3} \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) dx;$$

$$3. \int_1^4 \frac{dx}{x(\ln x)^{5/2}};$$

$$12. \int_0^1 \frac{1}{x^2} e^{1/x} dx;$$

$$21. \int_1^3 \frac{x}{(x^2-1)^2} dx;$$

$$4. \int_0^1 \frac{1}{x^{5/3}} e^{x^{2/3}} dx;$$

$$13. \int_0^{\sqrt{4/\pi}} \frac{1}{x^4} \cos\left(\frac{1}{x^3}\right) dx;$$

$$22. \int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt{\ln x}};$$

$$5. \int_{-1}^1 \frac{(x+2)dx}{\sqrt[3]{x^2+4x+3}};$$

$$14. \int_0^2 \frac{1}{x^{5/2}} e^{x^{3/2}} dx;$$

$$23. \int_1^6 \frac{dx}{x(\ln x)^2};$$

$$6. \int_0^{\sqrt{3/\pi}} \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right) dx;$$

$$15. \int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}};$$

$$24. \int_0^{\sqrt{2/\pi}} \frac{1}{x^{5/3}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right) dx;$$

$$7. \int_0^1 \frac{1}{x\sqrt{x}} e^{\frac{1}{\sqrt{x}}} dx;$$

$$16. \int_1^5 \frac{dx}{x\sqrt[3]{\ln x}};$$

$$25. \int_{-2}^1 \frac{(x+7)dx}{(x^2+7x+10)^2};$$

$$8. \int_0^3 \frac{1}{x^{7/3}} e^{x^{4/3}} dx;$$

$$17. \int_1^7 \frac{dx}{x(\ln x)^3};$$

$$26. \int_0^{\sqrt{6/\pi}} \frac{1}{x^{5/2}} \sin\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right) dx;$$

$$9. \int_{-1}^2 \frac{(2x+5)dx}{\sqrt{(x^2+5x+4)^3}};$$

$$18. \int_1^6 \frac{dx}{x(\ln x)^{2/3}};$$

$$27. \int_0^{\sqrt{2/\pi}} \frac{1}{\sqrt{x^3}} \cos\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx;$$

$$28. \int_0^2 \frac{1}{x^{4/3}} e^{x^{1/3}} dx; \quad 29. \int_{-1}^2 \frac{(x + \frac{5}{2}) dx}{\sqrt{(x^2 + 5x + 4)^3}}; \quad 30. \int_0^4 \frac{1}{x^3} e^{1/x^2} dx.$$

Задание 7.17

Исследуйте на сходимость несобственные интегралы.

1. а) $\int_1^2 \frac{\sqrt{x^2 - 1} dx}{(x - 1)^3},$	б) $\int_0^1 \frac{\sin \sqrt{x} dx}{\ln(1 + x)},$	в) $\int_0^3 \frac{x \sqrt{x} dx}{e^x - 1 - \sin x};$
2. а) $\int_2^5 \frac{(x^2 - 4)^2 dx}{\sqrt[3]{(x - 2)^7}},$	б) $\int_0^3 \frac{(e^x - 1) dx}{\sqrt{1 + x^2} - 1},$	в) $\int_0^2 \frac{(1 - \cos x) dx}{x^{3/2}};$
3. а) $\int_3^6 \frac{\sqrt[4]{6 - x} dx}{(36 - x^2)^3},$	б) $\int_0^2 \frac{\sqrt{x} dx}{\arcsin(x/3)},$	в) $\int_0^4 \frac{x^2 dx}{e^x - 1 - \sin x};$
4. а) $\int_2^4 \frac{\sqrt[3]{x^2 - 3x + 2} dx}{\sqrt{(x - 2)^3}},$	б) $\int_0^3 \frac{1 - \cos 2x dx}{x^4},$	в) $\int_0^2 \frac{e^x - 1 - x dx}{x^2 \sqrt[3]{x}};$
5. а) $\int_1^5 \frac{(x^2 - 1)^2 dx}{\sqrt{(x^2 - x)^5}},$	б) $\int_0^2 \frac{\operatorname{tg}(x\sqrt{x}) dx}{\sqrt{1 + x^3} - 1},$	в) $\int_0^1 \frac{x dx}{\sin x - \operatorname{tg} x};$
6. а) $\int_3^7 \frac{\sqrt[3]{x^2 - 4x + 3} dx}{(x^2 - 9)^2},$	б) $\int_0^2 \frac{\arcsin(\sqrt{x}/4) dx}{e^x - 1},$	в) $\int_0^3 \frac{\sqrt{x} dx}{\ln(1 + x) - x};$
7. а) $\int_{-1}^2 \frac{\sqrt[3]{(x^2 - 2x - 3)^2} dx}{\sqrt{(x^2 - 1)^7}},$	б) $\int_0^3 \frac{\operatorname{arctg}(x\sqrt{x}) dx}{1 - \cos 2x},$	в) $\int_0^4 \frac{x dx}{\operatorname{tg} x - x};$
8. а) $\int_{-2}^2 \frac{\sqrt[4]{x^2 + 5x + 6} dx}{x + 2},$	б) $\int_0^5 \frac{\ln(1 + \sqrt[3]{x}) dx}{\arcsin(4x^2)},$	в) $\int_0^1 \frac{x^2 \sqrt{x} dx}{\sin x - x};$
9. а) $\int_3^4 \frac{\sqrt[3]{(x^2 - 6x + 8)^2} dx}{(x^2 - 16)^2},$	б) $\int_0^2 \frac{x \operatorname{tg} \sqrt{x} dx}{\sqrt[3]{1 + x^2} - 1},$	в) $\int_0^3 \frac{\sqrt[3]{x} dx}{1 - \cos 4x};$
10. а) $\int_1^7 \frac{\sqrt{x^2 + x - 2} dx}{\sqrt[3]{(x^2 - 1)^5}},$	б) $\int_0^3 \frac{(e^{x^2} - 1) dx}{x \sqrt{x} \operatorname{arctg}(2x)},$	в) $\int_0^2 \frac{x^2 dx}{e^x - 1 - \operatorname{tg} x};$

11. a) $\int_{-1}^2 \frac{\sqrt[4]{x^2 + 4x + 3} dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$, б) $\int_0^4 \frac{(1 - \cos 4x) dx}{\arcsin(x^3/4)}$, B) $\int_0^1 \frac{x^2 dx}{\operatorname{tg} x - x}$;
12. a) $\int_{-2}^1 \frac{\sqrt[3]{(x^2 - 4x + 3)^2} dx}{\sqrt{(1-x)^5}}$, б) $\int_0^3 \frac{\sqrt{x} \sin x dx}{\sqrt[4]{1+2x^2-1}}$, B) $\int_0^2 \frac{x^3 \sqrt{x} dx}{e^x - 1 - x}$;
13. a) $\int_{-3}^1 \frac{\sqrt[3]{x^2 - 5x + 4} dx}{x^2 - 1}$, б) $\int_0^6 \frac{e^{\sqrt{x}} - 1 dx}{x \arctg x}$, B) $\int_0^2 \frac{\ln(1+x) - \sqrt{x} dx}{x^3}$;
14. a) $\int_2^5 \frac{\sqrt{x^2 - x - 2} dx}{\sqrt[3]{(x^3 - 8)^7}}$, б) $\int_0^4 \frac{x^2 \operatorname{tg} \sqrt{x} dx}{\arctg(2x^3)}$, B) $\int_0^3 \frac{e^x - \cos x dx}{x^3}$;
15. a) $\int_1^3 \frac{\sqrt[3]{(x^2 - x)^2} dx}{(x^2 - 1)^3}$, б) $\int_0^2 \frac{\sin(x\sqrt{x}) dx}{\ln(1+2x^2)}$, B) $\int_0^4 \frac{\sqrt{x} dx}{e^x - 1 - \sin x}$;
16. a) $\int_{-1}^2 \frac{\sqrt[4]{(x^2 + 3x + 2)^3} dx}{x^2 + 4x + 3}$, б) $\int_0^5 \frac{\sqrt{1+x^2} - 1 dx}{x(e^{\sqrt[3]{x}} - 1)}$, B) $\int_0^3 \frac{x^{3/2} dx}{\operatorname{tg} x - x}$;
17. a) $\int_{-3}^{-1} \frac{\sqrt{x^2 - 2x - 3} dx}{\sqrt[3]{(x^2 - 1)^4}}$, б) $\int_0^2 \frac{1 - \cos 2x dx}{\operatorname{tg} x^4}$, B) $\int_0^1 \frac{x\sqrt{x} dx}{e^x - 1 - \operatorname{tg} x}$;
18. a) $\int_3^5 \frac{\sqrt[4]{x^2 - 4x + 3} dx}{(x^2 - 9)^2}$, б) $\int_0^1 \frac{\ln(1+x\sqrt{x}) dx}{x \sin(\sqrt[3]{x^2})}$, B) $\int_0^2 \frac{x dx}{\ln(1+x) - x}$;
19. a) $\int_1^4 \frac{\sqrt{(x^2 + 2x - 3)^3} dx}{(x^2 + x - 2)}$, б) $\int_0^2 \frac{\sqrt{x} \operatorname{tg} x dx}{\sin(2x^3)}$, B) $\int_0^3 \frac{x dx}{e^x - 1 - \sin x}$;
20. a) $\int_{-2}^1 \frac{\sqrt{x^2 + 6x + 8} dx}{(x^2 - 4)^2}$, б) $\int_0^3 \frac{e^{x\sqrt{x}} - 1 dx}{\arctg(x^2)}$, B) $\int_0^2 \frac{x\sqrt{x} dx}{\sin x - x}$;
21. a) $\int_2^3 \frac{\sqrt[4]{x^2 - 3x + 2} dx}{\sqrt[3]{x^2 - 2x}}$, б) $\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}} - 1 dx}{1 - \cos 2x}$, B) $\int_0^2 \frac{\sqrt{x} dx}{e^x - \cos x}$;
22. a) $\int_1^3 \frac{\sqrt[3]{x^2 - 1} dx}{(x^2 + 3x - 4)^3}$, б) $\int_0^2 \frac{x \arcsin \sqrt{x} dx}{\operatorname{tg}(x\sqrt[3]{x})}$, B) $\int_0^1 \frac{x\sqrt{x} dx}{\ln(1+x) - x}$;

23. а) $\int_{-2}^2 \frac{\sqrt[3]{(x^2 + 5x + 6)^4} dx}{(x^2 + 4)^3}$, б) $\int_0^3 \frac{(e^{x^2} - 1) dx}{x(\ln(1 + x\sqrt{x}) - 1)}$, в) $\int_0^4 \frac{\sqrt{x} dx}{\operatorname{tg} x - x}$;
24. а) $\int_2^4 \frac{\sqrt{(4 - x^2)^5} dx}{(x^2 - 9x + 20)^3}$, б) $\int_0^1 \frac{\sqrt[3]{x} \arcsin x dx}{1 - \cos x}$, в) $\int_0^2 \frac{\sqrt{x} dx}{\sin x - x}$;
25. а) $\int_1^4 \frac{(x - 1) dx}{\sqrt{(x^2 + 4x - 5)^3}}$, б) $\int_0^3 \frac{\sqrt{x} \operatorname{arctg} 2x dx}{\sqrt[4]{1 + x^3} - 1}$, в) $\int_0^1 \frac{\sqrt{x} dx}{1 - \cos x}$;
26. а) $\int_{-2}^1 \frac{(x + 2) dx}{\sqrt{(x^2 + 7x + 10)^5}}$, б) $\int_0^2 \frac{x \operatorname{arctg} \sqrt{x} dx}{\arcsin(x^2/4)}$, в) $\int_0^3 \frac{1 - \cos x dx}{e^x - 1 - x}$;
27. а) $\int_{-3}^{-1} \frac{\sqrt[4]{(x^2 - 9)^3} dx}{(x^2 + 7x + 12)^2}$, б) $\int_0^1 \frac{\ln(1 + \sqrt[3]{x}) dx}{\operatorname{tg}(5x)}$, в) $\int_0^2 \frac{e^x - \cos x dx}{x^4}$;
28. а) $\int_2^3 \frac{\sqrt{x^2 - x - 2} dx}{x^2 - 4}$, б) $\int_0^4 \frac{\arcsin(x\sqrt{x}/6) dx}{\sqrt[3]{1 + x^2} - 1}$, в) $\int_0^1 \frac{x dx}{\sin x - x}$;
29. а) $\int_1^3 \frac{\sqrt{(x^2 - 7x + 12)^3} dx}{(x^2 - 9)^3}$, б) $\int_0^2 \frac{\sqrt{x} \operatorname{arctg} 2x^2 dx}{e^{x^3} - 1}$, в) $\int_0^4 \frac{1 - \cos \sqrt[3]{x} dx}{x}$;
30. а) $\int_{-1}^1 \frac{(x^2 - 1)^2 dx}{\sqrt{(x^2 - 7x + 6)^7}}$, б) $\int_0^3 \frac{x(\sqrt{1 + 4x} - 1) dx}{\ln(1 + x^3)}$, в) $\int_0^2 \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{x}(e^x - 1)}$.

Задание 7.18

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями.

- $y = x^2 + 4x + 3$, $y = -2x - 5$;
- $y = x^2 - 2x + 2$, $y = x + 6$;
- $y = x^2 + 3x - 2$, $y = x + 1$;
- $y = x^2 + 6x - 9$, $y = 2x - 4$;
- $y = -x^2 + 3x - 4$, $y = 2x - 6$;
- $y = x^2 - 3x - 10$, $y = -x + 5$;
- $y = -x^2 - 3x + 2$, $y = x + 5$;
- $y = -x^2 - 6x - 2$, $y = 2x + 13$;
- $y = x^2 + 3x - 5$, $y = 3x - 1$;
- $y = x^2 + 4x + 1$, $y = -2x - 4$;
- $y = -x^2 - 5x + 6$, $y = -3x - 2$;
- $y = -x^2 + x - 3$, $y = -4x + 1$;
- $y = x^2 + x - 1$, $y = -3x - 1$;
- $y = -x^2 - 4x + 6$, $y = -6x - 2$;
- $y = x^2 - 2x + 2$, $y = 2x - 1$;
- $y = x^2 - x - 10$, $y = -3x + 5$;

- | | |
|--|---|
| 17. $y = -x^2 + 2x + 4$, $y = x - 2$; | 24. $y = x^2 + 5x - 1$, $y = 3x - 1$; |
| 18. $y = x^2 - x + 1$, $y = -2x + 7$; | 25. $y = -x^2 - 4x - 2$, $y = x + 2$; |
| 19. $y = x^2 - x - 7$, $y = 2x + 3$; | 26. $y = x^2 - 5x - 2$, $y = -x + 3$; |
| 20. $y = -x^2 - 2x + 3$, $y = 3x + 3$; | 27. $y = -x^2 - 3x + 1$, $y = -2x - 1$; |
| 21. $y = x^2 - 4x + 1$, $y = -2x + 4$; | 28. $y = x^2 - x - 1$, $y = -4x + 3$; |
| 22. $y = -x^2 - x + 7$, $y = 2x - 3$; | 29. $y = x^2 - 4x + 2$, $y = 2x - 3$; |
| 23. $y = -x^2 - x + 1$, $y = 2x + 1$; | 30. $y = x^2 + x - 9$, $y = 2x + 3$. |

Задание 7.19

Найдите площадь фигуры, ограниченной линией, заданной в полярной системе координат указанным уравнением. Сделайте рисунок.

- | | |
|--------------------------------|--------------------------------|
| 1. $\rho = 3\sin 3\varphi$; | 16. $\rho = -3\cos 2\varphi$; |
| 2. $\rho = 2\sin 4\varphi$; | 17. $\rho = 3\cos 4\varphi$; |
| 3. $\rho = -2\sin 3\varphi$; | 18. $\rho = -4\cos 2\varphi$; |
| 4. $\rho = -4\sin 2\varphi$; | 19. $\rho = 4\cos 3\varphi$; |
| 5. $\rho = -3\sin 3\varphi$; | 20. $\rho = 4\sin 2\varphi$; |
| 6. $\rho = 3\cos 2\varphi$; | 21. $\rho = -2\cos 2\varphi$; |
| 7. $\rho = -3\sin 2\varphi$; | 22. $\rho = -4\cos 4\varphi$; |
| 8. $\rho = 2\sin 2\varphi$; | 23. $\rho = -4\sin 4\varphi$; |
| 9. $\rho = -3\cos 3\varphi$; | 24. $\rho = -2\sin 4\varphi$; |
| 10. $\rho = 2\sin 3\varphi$; | 25. $\rho = 4\sin 4\varphi$; |
| 11. $\rho = 2\cos 2\varphi$; | 26. $\rho = 4\cos 2\varphi$; |
| 12. $\rho = -2\sin 2\varphi$; | 27. $\rho = 3\sin 2\varphi$; |
| 13. $\rho = -3\cos 4\varphi$; | 28. $\rho = 4\cos 4\varphi$; |
| 14. $\rho = -2\cos 3\varphi$; | 29. $\rho = -3\sin 4\varphi$; |
| 15. $\rho = 2\cos 4\varphi$; | 30. $\rho = -4\cos 3\varphi$. |

Задание 7.20

Найдите длину дуги кривой, заданной указанными уравнениями.

- | | | |
|--|--|----------------------------|
| 1. $x = e^{-2t} \cos 3t,$ | $y = e^{-2t} \sin 3t,$ | $0 \leq t \leq \pi/6;$ |
| 2. $x = 4(t - \sin t),$ | $y = 4(1 - \cos t),$ | $0 \leq t \leq \pi/2;$ |
| 3. $x = 3(\cos t + t \sin t),$ | $y = 3(\sin t - t \cos t),$ | $0 \leq t \leq \pi/3;$ |
| 4. $x = e^{2t} \sin 4t,$ | $y = e^{2t} \cos 4t,$ | $0 \leq t \leq \pi/8;$ |
| 5. $x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t,$ | $y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t,$ | $0 \leq t \leq \pi;$ |
| 6. $x = 3(1 - \sin t),$ | $y = 3(t - \cos t),$ | $0 \leq t \leq \pi/2;$ |
| 7. $x = e^{4t} \cos 2t,$ | $y = e^{4t} \sin 2t,$ | $0 \leq t \leq \pi/6;$ |
| 8. $x = 8 \cos^3 t,$ | $y = 8 \sin^3 t,$ | $0 \leq t \leq \pi/6;$ |
| 9. $x = 3(2 \cos t - \cos 2t),$ | $y = 3(2 \sin t - \sin 2t),$ | $0 \leq t \leq \pi/2;$ |
| 10. $x = e^{3t} \sin 2t,$ | $y = e^{3t} \cos 2t,$ | $0 \leq t \leq \pi/4;$ |
| 11. $x = e^t(\cos t + \sin t),$ | $y = e^t(\cos t - \sin t),$ | $0 \leq t \leq \pi/2;$ |
| 12. $x = 4(2 \cos 2t - \cos 4t),$ | $y = 4(2 \sin 2t - \sin 4t),$ | $\pi/4 \leq t \leq \pi/2;$ |
| 13. $x = e^{-4t} \cos 3t,$ | $y = e^{-4t} \sin 3t,$ | $0 \leq t \leq \pi/12;$ |
| 14. $x = 1 - \cos 3t,$ | $y = t - \sin 3t,$ | $0 \leq t \leq \pi/6;$ |
| 15. $x = 5(3 \sin 2t - 2 \sin 3t),$ | $y = 5(3 \cos 2t - 2 \cos 3t),$ | $0 \leq t \leq \pi/2;$ |
| 16. $x = e^{-t} \cos 4t,$ | $y = e^{-t} \sin 4t,$ | $0 \leq t \leq \pi/8;$ |
| 17. $x = (t^2 - 2) \sin t + 2t \cos t,$ | $y = (2 - t^2) \cos t + 2t \sin t,$ | $0 \leq t \leq \pi/2;$ |
| 18. $x = 2(t - \sin t),$ | $y = 2(1 - \cos t),$ | $0 \leq t \leq \pi/2;$ |
| 19. $x = 6(4 \cos t - \cos 4t),$ | $y = 6(4 \sin t - \sin 4t),$ | $0 \leq t \leq \pi/6;$ |
| 20. $x = e^{-3t} \sin 2t,$ | $y = e^{-3t} \cos 2t,$ | $0 \leq t \leq \pi/2;$ |
| 21. $x = 3(t - \cos 3t),$ | $y = 3(1 - \sin 3t),$ | $0 \leq t \leq \pi/2;$ |
| 22. $x = 5(\cos 4t - 2 \cos 2t),$ | $y = 5(\sin 4t - 2 \sin 2t),$ | $0 \leq t \leq \pi/2;$ |
| 23. $x = e^t \sin 5t,$ | $y = e^t \cos 5t,$ | $0 \leq t \leq \pi/10;$ |
| 24. $x = e^{4t} \cos 2t,$ | $y = e^{4t} \sin 2t,$ | $0 \leq t \leq \pi/6;$ |
| 25. $x = 8 \sin t + 6 \cos t,$ | $y = 6 \sin t - 8 \cos t,$ | $0 \leq t \leq \pi/2;$ |
| 26. $x = 7(3 \sin t - \sin 3t),$ | $y = 7(3 \cos t - \cos 3t),$ | $\pi \leq t \leq 3\pi/2;$ |
| 27. $x = 4(1 - \cos 2t),$ | $y = 4(t - \sin 2t),$ | $0 \leq t \leq \pi/2;$ |
| 28. $x = e^{-3t} \cos 4t,$ | $y = e^{-3t} \sin 4t,$ | $0 \leq t \leq \pi/8;$ |
| 29. $x = 2R \cos \frac{t}{3} - R \cos \frac{2t}{3},$ | $y = 2R \sin \frac{t}{3} - R \sin \frac{2t}{3},$ | $0 \leq t \leq 2\pi;$ |
| 30. $x = 4(3 \cos 2t - \cos 6t),$ | $y = 4(3 \sin 2t - \sin 6t),$ | $0 \leq t \leq \pi/2.$ |

Задание 7.21

Найдите объём тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линией, заданной указанным уравнением.

1. $y = e^{2x} - x$, $0 \leq x \leq 4$;

16. $y = x\sqrt[4]{9-x^2}$, $0 \leq x \leq 3$;

2. $y = 3\ln x + 2x$, $1 \leq x \leq 3$;

17. $y = \frac{x}{\sqrt[4]{4-x^2}}$, $0 \leq x \leq 1$;

3. $y = -\sin x + 2x$, $0 \leq x \leq \pi/2$;

18. $y = \frac{\sqrt[4]{x^2-2}}{x^2}$, $\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}$;

4. $y = e^{3x} + 2x$, $1 \leq x \leq 2$;

19. $y = \frac{1}{\sqrt[4]{(4-x^2)^3}}$, $0 \leq x \leq \sqrt{3}$;

5. $y = 2\cos x + x$, $0 \leq x \leq \pi/3$;

20. $y = \frac{1}{\sqrt[4]{(9+x^2)^3}}$, $0 \leq x \leq 3$;

6. $y = 2\ln x + x$, $1 \leq x \leq 4$;

21. $y = x\sqrt[4]{16-x^2}$, $2 \leq x \leq 4$;

7. $y = \sin 2x + 2x$, $0 \leq x \leq \pi$;

22. $y = \frac{x}{\sqrt[4]{9-x^2}}$, $0 \leq x \leq 3/2$;

8. $y = 4\ln x + 2x$, $2 \leq x \leq 3$;

23. $y = \sqrt{x^3} \cdot \sqrt[4]{1-x^2}$, $0 \leq x \leq 1$;

9. $y = e^{-2x} + x$, $1 \leq x \leq 3$;

24. $y = \sqrt[4]{4-x^2}$, $0 \leq x \leq 1$;

10. $y = 2\ln x + 3x$, $1 \leq x \leq 4$;

25. $y = \frac{\sqrt{x^3}}{\sqrt[4]{1-x^2}}$, $0 \leq x \leq 1/2$;

11. $y = -\cos x + 4x$, $\pi/2 \leq x \leq \pi$;

26. $y = \frac{1}{\sqrt[4]{(16+x^2)^3}}$, $0 \leq x \leq 4$;

12. $y = e^{2x} - 2x$, $1 \leq x \leq 2$;

27. $y = \frac{1}{\sqrt[4]{(16-x^2)^3}}$, $0 \leq x \leq 2$;

13. $y = 3\sin 6x + 4x$, $0 \leq x \leq \pi/2$;

28. $y = x\sqrt[4]{1-x^2}$, $0 \leq x \leq 1$;

14. $y = e^{-x} + 3x$, $0 \leq x \leq 3$;

29. $y = \frac{\sqrt[4]{x^2-1}}{x^2}$, $1 \leq x \leq 2$;

15. $y = 3\ln x + 4x$, $1 \leq x \leq 2$;

30. $y = \frac{\sqrt[4]{25-x^2}}{\sqrt{x}}$, $\frac{5}{2} \leq x \leq 5$.

Задание 7.22

Найдите приближённое значение интеграла с помощью методов:
 а) прямоугольников; б) трапеций; в) Симпсона. При этом возьмите $n = 10$.

1. $\int_0^2 \sqrt{9 - \sin^2 x} \, dx;$

2. $\int_2^4 \sqrt{4 + \arctg x} \, dx;$

3. $\int_2^4 \sqrt{5 - \ln x} \, dx;$

4. $\int_0^2 e^{2x^2-x} \, dx;$

5. $\int_1^3 \frac{\sin x}{x} \, dx;$

6. $\int_1^3 \sqrt{x \ln x} \, dx;$

7. $\int_0^2 \sqrt{9 - \cos^2 2x} \, dx;$

8. $\int_0^2 e^{x^2-2x} \, dx;$

9. $\int_0^2 \sqrt{7 + e^x} \, dx;$

10. $\int_1^3 \sqrt{x - \cos x} \, dx;$

11. $\int_1^3 \sqrt{3 + \ln x} \, dx;$

12. $\int_0^2 \sqrt{4 + \cos^2 2x} \, dx;$

13. $\int_0^2 \sqrt{9 + \cos^2 x} \, dx;$

14. $\int_1^3 \sqrt{16 + \sin^2 2x} \, dx;$

15. $\int_0^2 e^{x\sqrt{x}} \, dx;$

16. $\int_0^2 \sqrt{4 + \sin^2 3x} \, dx;$

17. $\int_2^4 \sqrt{6 + \ln x} \, dx;$

18. $\int_0^2 \sqrt{4 + \cos^2 4x} \, dx;$

19. $\int_0^2 \sqrt{4 + \arctg 3x} \, dx;$

20. $\int_2^4 \sqrt{2^x - x} \, dx;$

21. $\int_0^2 e^{x^2+x} \, dx;$

22. $\int_{-1}^1 \sin(x^2 + x) \, dx;$

23. $\int_1^3 \cos(2x^2 - 5) \, dx;$

24. $\int_0^2 \sqrt{4 + \arctg 2x} \, dx;$

25. $\int_{-1}^1 \sqrt{x \cos x} \, dx;$

26. $\int_0^2 e^{x^2} \, dx;$

27. $\int_1^3 \sin x^2 \, dx;$

28. $\int_2^4 \cos x^2 \, dx;$

29. $\int_0^2 \sqrt{x + \sin x} \, dx;$

30. $\int_0^2 \sqrt{4 + \sin^2 x} \, dx.$

VIII. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

1. Арифметическое пространство. Функции многих переменных

Арифметическим n -мерным пространством A_n называется совокупность всевозможных упорядоченных наборов действительных чисел $(x_1; x_2; \dots; x_n)$, называемых точками A_n . В A_n вводится расстояние между точками $M(x'_1, x'_2, \dots, x'_n)$ и $N(x''_1, x''_2, \dots, x''_n)$ по формуле

$$\rho(M, N) = \sqrt{(x''_1 - x'_1)^2 + (x''_2 - x'_2)^2 + \dots + (x''_n - x'_n)^2}.$$

n -мерным открытым (замкнутым) шаром радиуса r с центром в точке $M(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0)$ называется множество точек $N(x_1, x_2, \dots, x_n)$, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$\rho(N, M) < r \quad (\rho(N, M) \leq r).$$

Открытый шар радиусом ε с центром в точке $M \in A_n$ называется ε -окрестностью точки M .

Множество $(D) \subset A_n$ называется открытым, если оно наряду с каждой своей точкой содержит и некоторую её ε -окрестность. Точка $M \in A_n$ называется граничной точкой множества (D) , если любая ε -окрестность точки M содержит как точки, принадлежащие (D) , так и точки, не принадлежащие (D) ; граничная точка может принадлежать, может и не принадлежать множеству (D) . Совокупность всех граничных точек множества (D) образует границу множества (D) . Множество, содержащее в себе свою границу, называется замкнутым.

Множество $(D) \subset A_n$ называется ограниченным, если его можно заключить в некоторый n -мерный шар конечного радиуса.

Множество $(D) \subset A_n$ называется связным, если любые две его точки можно соединить непрерывной линией, целиком лежащей в (D) .

Открытое связное множество в A_n называется открытой областью (или просто областью). Область вместе со своей границей образует замкнутую область.

Пусть (D) – некоторое множество в A_n . Если задано правило f , согласно которому каждой точке $M(x_1, x_2, \dots, x_n) \in (D)$ ставится в соответствие вполне определённое число $f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то говорят, что на множестве (D) задана функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от переменных x_1, x_2, \dots, x_n . Множество (D) называется множеством

определения функции f , а множество $\{u \in \mathbf{R} : \text{существует } M \in (D), \text{ такое, что } f(M) = u\}$ называется множеством значений этой функции. Множество точек $(x_1, x_2, \dots, x_n; f(x_1, x_2, \dots, x_n))$ пространства A_{n+1} называется графиком функции $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. В случае функции двух переменных $z = f(x; y)$ график функции (при некоторых ограничениях на f) оказывается поверхностью в пространстве \mathbf{R}_3 .

Пример 1. Найти область определения функции $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.
Найти $z(1; \sqrt{2})$.

Решение. Областью определения функции является решение неравенства $4 - x^2 - y^2 \geq 0$ или $x^2 + y^2 \leq 4$. Последнее неравенство определяет круг радиусом 2 с центром в точке $0(0; 0)$.
 $z(1; \sqrt{2}) = \sqrt{4 - 1 - 2} = 1$.

2. Предел и непрерывность функции

Число A называется пределом функции $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ при стремлении точки $N(x_1; x_2; \dots; x_n)$ к точке $M(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что неравенства $0 < \rho(N; M) = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + (x_2 - x_2^0)^2 + \dots + (x_n - x_n^0)^2} < \delta$ влекут неравенство $|f(x_1; x_2; \dots; x_n) - A| < \varepsilon$.

При этом пишут $\lim_{N \rightarrow M} f(N) = A$ или $\lim_{\substack{x_1 \rightarrow x_1^0 \\ x_2 \rightarrow x_2^0 \\ \dots \\ x_n \rightarrow x_n^0}} f(x_1; x_2; \dots; x_n) = A$.

Предел функции многих переменных обладает практически теми же свойствами, что и предел функции от одного переменного (предел суммы равен сумме пределов и т. п.).

Пример 2. Найти предел $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 + xy}{x^2 - y^2}$.

Решение. Пусть точка $N(x; y)$ стремится к точке $0(0; 0)$ вдоль прямой $y = kx$, $x \rightarrow 0$. Тогда

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = kx}} \frac{x^2 + xy}{x^2 - y^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + kx^2}{x^2 - k^2x^2} = \frac{1+k}{1-k^2} = \frac{1}{1-k}, \quad k \neq 1.$$

Видим, что предел зависит от коэффициента k . Следовательно, наша функция не имеет предела при $(x; y) \rightarrow (0; 0)$.

Функция $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$, определённая в некоторой окрестности точки $M(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0)$, называется непрерывной в этой точке, если $\lim_{N \rightarrow M} f(N) = f(M)$. В противном случае (т.е. $f(M)$ не определена или не существует конечного предела $\lim_{N \rightarrow M} f(N)$) точка M называется точкой разрыва функции $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$. Функция, непрерывная в каждой точке области (D) , называется непрерывной в (D) . Сумма, произведение, частное (при условии, что знаменатель не стремится к нулю), суперпозиция непрерывных функций являются непрерывными функциями.

3. Частные производные

Пусть функция $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0)$. Придадим переменному x_k в этой точке приращение $\Delta x_k = x_k - x_k^0$. Тогда функция получит приращение

$$\Delta_{x_k} u = f(x_1^0; x_2^0; \dots; x_k^0 + \Delta x_k; \dots; x_n^0) - f(x_1^0; x_2^0; \dots; x_k^0; \dots; x_n^0).$$

Конечный предел (если он существует)

$$\lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{\Delta_{x_k} u}{\Delta x_k} = \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0; x_2^0; \dots; x_k^0 + \Delta x_k; \dots; x_n^0) - f(x_1^0; x_2^0; \dots; x_k^0; \dots; x_n^0)}{\Delta x_k}$$

называется частной производной (первого порядка) функции $f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ по переменному x_k в точке $M(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0)$ и

обозначается $\frac{\partial u(M)}{\partial x_k}$ или $\frac{\partial f(M)}{\partial x_k}$ или $f'_{x_k}(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0)$. Процесс

нахождения частной производной называют дифференцированием функции.

Для частных производных справедливы те же правила дифференцирования, что и для функции одного переменного (формулы производной суммы, произведения и т.п.).

При нахождении частной производной по переменному x_k следует действовать так, как если бы все остальные переменные являлись постоянными величинами.

Пример 3. Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ для функции $u = x^2 \sqrt{\ln(4x - 2y - z)}$.

Найти $u'_z(2; 1; -1)$.

$$\begin{aligned}
 \text{Решение. } \frac{\partial u}{\partial x} &= (x^2)'_x \sqrt{\ln(4x-2y-z)} + x^2 \left(\ln(4x-2y-z)^{\frac{1}{2}} \right)'_x = \\
 &= 2x \sqrt{\ln(4x-2y-z)} + x^2 \cdot \frac{1}{2} \left(\ln(4x-2y-z)^{\frac{1}{2}} \right)'_x \frac{1}{4x-2y-z} \cdot 4 = \\
 &= 2x \sqrt{\ln(4x-2y-z)} + \frac{2x^2}{(4x-2y-z)\sqrt{\ln(4x-2y-z)}}; \\
 \frac{\partial u}{\partial y} &= \left(x^2 \sqrt{\ln(4x-2y-z)} \right)'_y = x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln(4x-2y-z)}} \cdot \frac{1}{4x-2y-z} \cdot (-2) = \\
 &= \frac{-x^2}{(4x-2y-2)\sqrt{\ln(4x-2y-z)}}; \\
 \frac{\partial u}{\partial z} &= \left(x^2 \sqrt{\ln(4x-2y-z)} \right)'_z = x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\ln(4x-2y-z)}} \cdot \frac{1}{4x-2y-z} \cdot (-1) = \\
 &= \frac{-x^2}{2(4x-2y-z)\sqrt{\ln(4x-2y-z)}}.
 \end{aligned}$$

Из последнего равенства находим

$$u'_z(2; 1; -1) = \frac{-2^2}{2 \cdot (4 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - (-1)) \sqrt{\ln(4 \cdot 2 - 2 + 1)}} = \frac{-2}{7\sqrt{\ln 7}}.$$

Частная производная от частной производной первого порядка называется частной производной второго порядка. Приняты следующие обозначения частных производных второго порядка функции $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$:

$$\frac{\partial}{\partial x_l} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l} = u''_{x_k x_l} = f''_{x_k x_l}(x_1; x_2; \dots; x_n),$$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial u}{\partial x_l} \right) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_l \partial x_k} = u''_{x_l x_k} = f''_{x_l x_k}(x_1; x_2; \dots; x_n).$$

Аналогично определяются частные производные более высоких порядков.

Пример 4. Найти все частные производные второго порядка функции $u = 2x^2y - 3xyz^4 + z^2$. Найти $z''_{xy}(1; -1; 2)$.

$$\text{Решение. } \frac{\partial u}{\partial x} = 4xy - 3yz^4, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2x^2 - 3xz^4, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = -12xyz^3 + 2z,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (4xy - 3yz^4) = 4y;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (2x^2 - 3xz^4)'_y = 0;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = (-12xyz^3 + 2z)'_z = -36xyz^2 + 2;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (4xy - 3yz^4) = 4x - 3z^4;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = (2x^2 - 3xz^4)'_x = 4x - 3z^4;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = (4xy - 3yz^4)'_z = -12yz^3;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) = (-12xyz^3 + 2z)'_x = -12yz^3;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) = (2x^2 - 3xz^4)'_z = -12xz^3;$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) = (-12xyz^3 + 2z)'_y = -12xz^3.$$

$$u''_{xy}(1; -1; 2) = 4 - 3 \cdot 2^4 = 4 - 48 = -44.$$

Возникает естественный вопрос: зависят ли частные производные высших порядков от порядка дифференцирования (в последнем примере мы видели, что $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y}$).

Оказывается, что, вообще говоря, смешанные производные зависят от порядка дифференцирования. Однако справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. Если все частные производные функции $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ до m -го порядка включительно непрерывны, то смешанные производные m -го порядка не зависят от порядка дифференцирования.

Пример 5. Показать, что функция $u = A \sin \lambda x \cos \alpha t$ удовлетворяет уравнению колебания струны $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

Решение. Имеем $\frac{\partial u}{\partial t} = -Aa\lambda \sin \lambda x \sin a\lambda t$;

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (-Aa\lambda \sin \lambda x \cdot \sin a\lambda t)'_t = -Aa^2\lambda^2 \sin \lambda x \cdot \cos a\lambda t$$
;

$$\frac{\partial u}{\partial x} = A\lambda \cos \lambda x \cos a\lambda t; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -A\lambda^2 \sin \lambda x \cdot \sin a\lambda t.$$

Сравнивая полученные выражения, видим, что $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

4. Дифференциал функции многих переменных

Пусть функция $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0)$. Придадим переменным x_1, x_2, \dots, x_n в этой точке приращения $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$. Тогда функция получит (полное) приращение

$$\Delta u = f(x_1^0 + \Delta x_1; x_2^0 + \Delta x_2; \dots; x_n^0 + \Delta x_n) - f(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0).$$

Функция $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ называется дифференцируемой в точке $M(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0)$, если существуют числа A_1, A_2, \dots, A_n такие, что

$$\Delta u = A_1 \cdot \Delta x_1 + A_2 \cdot \Delta x_2 + \dots + A_n \cdot \Delta x_n + o(\rho) \quad (1)$$

при $\Delta x_1 \rightarrow 0, \Delta x_2 \rightarrow 0, \dots, \Delta x_n \rightarrow 0$,

где

$\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2}$. (Числа A_1, A_2, \dots, A_n не зависят от $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$.)

Если $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ имеет непрерывные частные производные первого порядка по всем переменным, то она дифференцируема, причём $A_1 = \frac{\partial u(M)}{\partial x_1}, A_2 = \frac{\partial u(M)}{\partial x_2}, \dots, A_n = \frac{\partial u(M)}{\partial x_n}$

Линейная часть $A_1 \cdot \Delta x_1 + A_2 \cdot \Delta x_2 + \dots + A_n \cdot \Delta x_n$ приращения функции называется дифференциалом (первого порядка) функции и обозначается

$du(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0; \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)$ или просто

$$du = A_1 \cdot \Delta x_1 + A_2 \cdot \Delta x_2 + \dots + A_n \cdot \Delta x_n.$$

Если x_1, x_2, \dots, x_n являются независимыми переменными (т.е. не зависят от других переменных), то полагают дифференциалы этих

переменных равными их приращениям: $dx_1 = \Delta x_1, dx_2 = \Delta x_2, \dots,$
 $dx_n = \Delta x_n$. С учётом этого, а также того, что $A_j = \frac{\partial u}{\partial x_j}$, получаем

$$du = \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} dx_n.$$

В частности, для функции двух переменных

$$u = u(x; y) \quad du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy.$$

Для дифференциала функции многих переменных справедливы те же правила, что и для функции одного переменного: $d(u + v) = du + dv$,

$$d(uv) = vdu + u dv, \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}.$$

Дифференциал от первого дифференциала функции $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ называется дифференциалом второго порядка и обозначается d^2u : $d^2u = d(du)$. Аналогично определяются дифференциалы более высоких порядков: $d^3u = d(d^2u)$, $d^4u = d(d^3u)$ и т.д.

Если все частные производные функции $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$ до m -го порядка включительно непрерывны, а x_1, x_2, \dots, x_n являются независимыми переменными, то дифференциал m -го порядка $d^m u$ выражается символической формулой

$$d^m u = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} dx_n \right)^m u.$$

При этом выражение в скобках раскрывается по формуле бинома Ньютона, а затем перед множителями dx, dx_k над чертой дописывается буква u . Например, для функции двух переменных $u = f(x; y)$

$$d^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2,$$

$$d^3 u = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} dx^3 + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial y} dx^2 dy + 3 \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} dx dy^2 + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} dy^3.$$

Для функции трёх переменных

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} dz^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} dy dz + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} dz dx.$$

Следует иметь в виду, что под dx^2 , dy^2 , dz^2 понимаются квадраты дифференциалов, а не дифференциалы квадратов: $dx^2 = (dx)^2$, $dy^2 = (dy)^2$, $dz^2 = (dz)^2$.

Пример 6. Найти du и d^2u для функции $u = 2x^3y + y^3$.

Решение. $\frac{\partial u}{\partial x} = 6x^2y$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2x^3 + 3y^2$;

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 6x^2y dx + (2x^3 + 3y^2) dy.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) = 12xy, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 6y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 6x^2.$$

$$d^2u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy^2 = 12xy dx^2 + 12x^2 dx dy + 6y dy^2.$$

5. Уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности

Если поверхность (σ) задана уравнением $F(x; y; z) = 0$ и $F(x; y; z)$ — дифференцируемая функция, то уравнение касательной плоскости, проведённой к поверхности (σ) в точке $M(x_0; y_0; z_0) \in (\sigma)$, имеет вид

$$F'_x(x_0; y_0; z_0)(x - x_0) + F'_y(x_0; y_0; z_0)(y - y_0) + F'_z(x_0; y_0; z_0)(z - z_0) = 0$$

Уравнение нормали к этой поверхности в той же точке имеет вид

$$\frac{(x - x_0)}{F'_x(x_0; y_0; z_0)} = \frac{(y - y_0)}{F'_y(x_0; y_0; z_0)} = \frac{(z - z_0)}{F'_z(x_0; y_0; z_0)}.$$

В частности, если уравнение поверхности задано в явной форме $z = f(x; y)$, то уравнение касательной плоскости к поверхности в точке $M(x_0; y_0; f(x_0; y_0))$ может быть задано в виде

$$z - z_0 = f'_x(x_0; y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0; y_0)(y - y_0),$$

а уравнения нормали —

$$\frac{(x - x_0)}{f'_x(x_0; y_0)} = \frac{(y - y_0)}{f'_y(x_0; y_0)} = \frac{(z - z_0)}{-1}.$$

Пример 8. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^3 + 3xyz - 4y^2 + 3z - 1 = 0$ в точке $M(2; -1; 1)$.

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial u}{\partial x_2} \frac{dx_2}{dt} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \frac{dx_n}{dt}.$$

Пример 9. Найти $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial v}$, если $u = x^2 \ln(3x - y^3)$, $x = te^{5t+v}$,
 $y = t^2 - v^4$.

Решение. Имеем

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t}, \\ \frac{\partial u}{\partial v} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}. \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \ln(3x - y^3) + \frac{3x^2}{3x - y^3}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{3x^2 y^2}{3x - y^3},$$

$$\frac{\partial x}{\partial t} = e^{5t+v} + 5te^{5t+v}, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = te^{5t+v}, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = 2t, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = -4v^3.$$

Отсюда получаем

$$\frac{\partial u}{\partial t} = (2x \ln(3x - y^3) + \frac{3x^2}{3x - y^3})e^{5t+v} (1 + 5t) - \frac{3x^2 y^2}{3x - y^3} \cdot 2t,$$

$$\frac{\partial u}{\partial v} = (2x \ln(3x - y^3) + \frac{3x^2}{3x - y^3}) \cdot te^{5t+v} + \frac{12x^2 y^2}{3x - y^3} v^3.$$

7. Дифференцирование неявно заданной функции

Пусть функция $F(x; y)$ определена в области (D) и $(a; b)$, $(c; d)$ — проекции (D) на оси Ox и Oy соответственно. Говорят, что уравнение

$$F(x; y) = 0 \tag{2}$$

в области (D) задаёт неявную функцию $y = f(x)$, если для любого $x_0 \in (a; b)$ уравнение $F(x_0; y) = 0$ имеет единственное решение $y_0 = f(x_0) \in (c; d)$ (это решение и является правилом задания функции: каждому $x \in (a; b)$ ставится в соответствие решение уравнения $F(x; y) = 0$).

Если уравнение (2) в (D) задаёт неявную функцию $y = f(x)$ и $F(x; y)$ дифференцируема в (D) и $F'_y(x; y) \neq 0$, то $y = f(x)$ дифференцируема и

$$f'(x) = -\frac{F'_x(x; y)}{F'_y(x; y)}.$$

Вторая производная $f''(x)$ находится повторным дифференцированием последнего равенства.

Пример 10. Найти y'_x , если $xe^{2x+y} - y^2 \ln x = 0$.

Решение. Обозначим левую часть уравнения через $F(x; y)$. Тогда

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{e^{2x+y} + 2xe^{2x+y} - \frac{y^2}{x}}{xe^{2x+y} - 2y \ln x}.$$

Аналогично определяется неявная функция многих переменных. Пусть функция $F(x_1; x_2; \dots; x_n; u)$ определяется в области $(D) \subset A_{n+1}$ и (D') , $(c; d)$ – проекции (D) на n -мерную координатную плоскость $0x_1x_2\dots x_n$ и на ось $0u$ соответственно. Говорят, что уравнение

$$F(x_1; x_2; \dots; x_n; u) = 0 \quad (3)$$

задаёт в (D) неявную функцию $u = u(x_1; x_2; \dots; x_n)$, если для любой точки $(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0) \in (D')$ уравнение $F(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0; u) = 0$ имеет единственное решение $u^0 \in (c; d)$. Если уравнение (2) в области (D) задаёт неявную функцию $u = u(x_1; x_2; \dots; x_n)$, $F(x_1; x_2; \dots; x_n; u)$ дифференцируема в (D) и $F'_u(x_1; x_2; \dots; x_n; u) \neq 0$ всюду в (D) , то функция $u = u(x_1; x_2; \dots; x_n)$ является дифференцируемой и

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x_k}}{\frac{\partial F}{\partial u}}.$$

Пример 11. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, если

$$x^2 \ln(y + 5z) - y \sin(x - 6y + 2z) - 3yz = 0.$$

Решение. Обозначим через $F(x; y; z)$ левую часть уравнения.

Имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{2x \ln(y + 5z) - y \cos(x - 6y + 2z)}{\frac{5x^2}{y + 5z} - 2y \cos(x - 6y + 2z) - 3y},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{\frac{x^2}{y + 5z} - \sin(x - 6y + 2z) + 6y \cos(x - 6y + 2z) - 3z}{\frac{5x^2}{y + 5z} - 2y \cos(x - 6y + 2z) - 3y}.$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_2}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial u_n}{\partial x_1} & \frac{\partial u_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Определитель этой матрицы называется определителем Якоби или Якобианом и обозначается $\frac{D(u_1; u_2; \dots; u_n)}{D(x_1; x_2; \dots; x_n)}$.

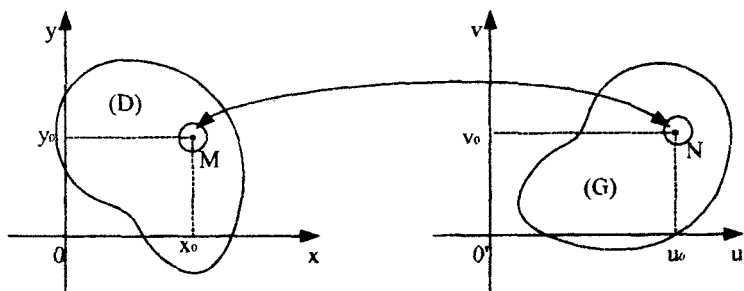
Пусть переменные x, y, u, v связаны равенствами

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y), \end{cases} \quad (5)$$

и эта система обратима, т.е. система (5) задаёт x и y как неявные функции от u и v :

$$\begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v). \end{cases} \quad (6)$$

Предположим, что все рассматриваемые функции дифференцируемы. В результате преобразований (5) – (6) область (D) в системе координат Oxy перейдёт в область (G) в системе $O'uv$. Преобразования (5) – (6)



переводят окрестность (Ω) точки $M(x_0, y_0)$ в окрестность (Ω') точки $N(u_0, v_0)$, $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$. Обозначим через $\mu(\Omega)$, $\mu(\Omega')$ площади областей (Ω) и (Ω') соответственно. Имеет место приближённое равенство

$$\left| \frac{D(u; v)}{D(x; y)} \right|_M \approx \frac{\mu(\Omega')}{\mu(\Omega)}$$

Точное равенство получается при переходе к пределу, когда окрестность (Ω) точки M стягивается в точку M (а соответствующая область (Ω') стягивается в точку N). Таким образом, модуль якобиана равен коэффициенту искажения площади при переходе из одной системы координат в другую. Если при таком переходе ориентация сохраняется, то якобиан положителен, если меняется, то якобиан отрицателен. Сохранение (изменение) ориентации при переходе в новую систему координат означает следующее: возьмём произвольную замкнутую линию (γ) в плоскости Oxy и будем двигаться вдоль этой линии в положительном направлении; если этому движению отвечает движение в положительном направлении вдоль соответствующей линии (Γ) в системе $O'x'y'$, то говорят, что при переходе в новую систему координат сохраняется ориентация, если же движению в положительном направлении вдоль (γ) соответствует движение вдоль (Γ) в отрицательном направлении, то говорят, что при этом переходе меняются ориентация (это должно быть верно для любого контура (γ)). В многомерном случае модуль якобиана равен коэффициенту искажения объёма при переходе в новую систему координат.

Пример 12. Найти якобиан системы функций

$$\begin{cases} u = 2x^2y - 3y^4, \\ v = 4xy^2 + x. \end{cases}$$

Решение. $\frac{\partial u}{\partial x} = 4xy$, $\frac{\partial u}{\partial y} = 2x^2 - 12y^3$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 4y^2 + 1$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 8xy$.

Отсюда находим

$$\frac{D(u, v)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4xy & 2x^2 - 12y^3 \\ 4y^2 + 1 & 8xy \end{vmatrix} = 24x^2y^2 + 48y^5 - 2x^2 + 12y^3.$$

Теорема 2. Пусть функции $F_1(x_1; x_2; \dots; x_n; y_1; y_2; \dots; y_m)$, $F_2(x_1; x_2; \dots; x_n; y_1; y_2; \dots; y_m)$, ..., $F_m(x_1; x_2; \dots; x_n; y_1; y_2; \dots; y_m)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки $M(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0; y_1^0; y_2^0; \dots; y_m^0)$ и пусть якобиан $\frac{D(F_1; F_2; \dots; F_m)}{D(y_1; y_2; \dots; y_m)}$ в точке M отличен от 0. Тогда существует окрестность точки M , в

которой система (4) задаёт неявные функции $y_1 = y_1(x_1; x_2; \dots; x_n)$, $y_2 = y_2(x_1; x_2; \dots; x_n)$, ..., $y_m = y_m(x_1; x_2; \dots; x_n)$. При этом:

$$1) y_1(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0) = y_1^0, y_2(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0) = y_2^0, \dots,$$

$$y_m(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0) = y_m^0;$$

2) если обозначить через $N \in A_n$ точку с координатами $(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0)$, то

$$\frac{\partial y_1(N)}{\partial x_1} = -\frac{\frac{D(F_1; F_2; \dots; F_m)}{D(x_1; y_2; \dots; y_m)}}{\frac{D(F_1; F_2; \dots; F_m)}{D(y_1; y_2; \dots; y_m)}}, \quad \frac{\partial y_1(N)}{\partial x_2} = -\frac{\frac{D(F_1; F_2; \dots; F_m)}{D(x_2; y_2; \dots; y_m)}}{\frac{D(F_1; F_2; \dots; F_m)}{D(y_1; y_2; \dots; y_m)}}, \dots$$

$$\frac{\partial y_m(N)}{\partial x_n} = -\frac{\frac{D(F_1; F_2; \dots; F_m)}{D(y_1; \dots; y_{m-1}; x_n)}}{\frac{D(F_1; F_2; \dots; F_m)}{D(y_1; y_2; \dots; y_m)}}.$$

Пример 13. Функции u и v независимых переменных x и y заданы неявно системой уравнений

$$\begin{cases} 2u - v + 3x - y + 5 = 0, \\ 4u + 3v^2 - xy = 0. \end{cases}$$

Найти $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$.

Решение. Обозначим через F_1 и F_2 левые части этих уравнений

$$\frac{D(F_1; F_2)}{D(u; v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6v \end{vmatrix} = 12v + 4.$$

Наша система уравнений задаёт неявные функции $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ при $v \neq -1/3$. Для нахождения требуемых частных производных продифференцируем эти уравнения:

$$\begin{cases} 2du - dv + 3dx - dy = 0, \\ 4du + 6vdv - ydx - xdy = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} 2du - dv = -3dx + dy, \\ 4du + 6vdv = ydx + xdy. \end{cases}$$

Решим полученную систему относительно du , dv , пользуясь методом Крамера:

$$\Delta_{du} = \begin{vmatrix} -3dx + dy & -1 \\ ydx + xdy & 6v \end{vmatrix} = 6v(-3dx + dy) + ydx + xdy$$

$$= (-18v + y)dx + (6v + x)dy,$$

$$\Delta_{dv} = \begin{vmatrix} 2 & -3dx + dy \\ 4 & ydx + xdy \end{vmatrix} = 2ydx + 2xdy + 12dx - 4dy$$

$$= (2y + 12)dx + (2x - 4)dy.$$

Отсюда находим

$$du = \frac{\Delta_{du}}{\Delta} = \frac{-18v + y}{12v + 4} dx + \frac{6v + x}{12v + 4} dy,$$

$$dv = \frac{\Delta_{dv}}{\Delta} = \frac{2y + 12}{12v + 4} dx + \frac{2x - 4}{12v + 4} dy.$$

Последние равенства с учётом того, что $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy$,

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy \text{ говорят о том, что}$$

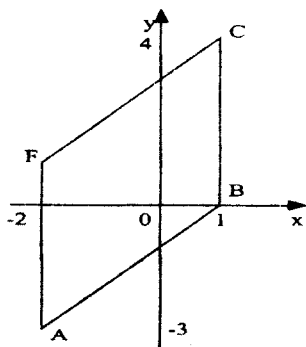
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-18v + y}{12v + 4}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{6v + x}{12v + 4}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{2y + 12}{12v + 4}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2x - 4}{12v + 4}.$$

Пример 14. В декартовой прямоугольной системе координат область (D) задана системой неравенств $x \geq -2$, $x \leq 1$, $y - x \leq 3$, $y - x \geq -1$. Найти область (G), в которую перейдёт область (D) в результате преобразований координат

$$\begin{cases} x = u + 2v, \\ y = u - v. \end{cases}$$

Решение. Изобразим область (D). Видим, что (D) представляет собой параллелограмм ABCD. Система неравенств, задающая область (G) в системе координат $O'uv$, имеет вид

$$\begin{cases} u + 2v \geq -2, \\ u + 2v \leq 1, \\ u - v - (u + 2v) \leq 3, \\ u - v - (u + 2v) \geq -1. \end{cases}$$



Перепишем эту систему неравенств в следующем виде:

$$\begin{cases} u + 2v \geq -2, \\ u + 2v \leq 1, \\ v \geq -1, \\ v \leq 1/3. \end{cases}$$

В системе $0'uv$ построим область, отвечающую этой системе неравенств. Получим параллелограмм $A'B'C'F'$, при этом точка

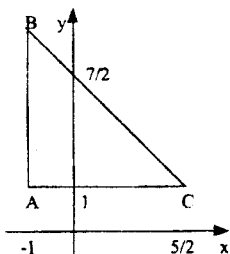
$A(-2; -3)$ переходит в точку $A'(-\frac{8}{3}; \frac{1}{3})$, $B(1; 0)$ – в $B'(\frac{1}{3}; \frac{1}{3})$, $C(1; 4)$ – в

$C'(3; -1)$, $F(-2; 1)$ – в $F'(0; -1)$. Видно, что движению вдоль контура $ABCF$ против часовой стрелки соответствует движение вдоль контура $A'B'C'F'$ по часовой стрелке, что объясняется отрицательностью якобиана системы уравнений перехода к новым переменным:

$$\frac{D(x; y)}{D(u; v)} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

Это говорит о том, что преобразование координат меняет ориентацию.

Пример 15. В декартовой прямоугольной системе координат область (D) задана неравенствами $x \geq -1$, $y \geq 1$, $x + y \leq 7/2$.



Найти область (G) в системе координат $0'uv$, в которую перейдет (D) в результате преобразования

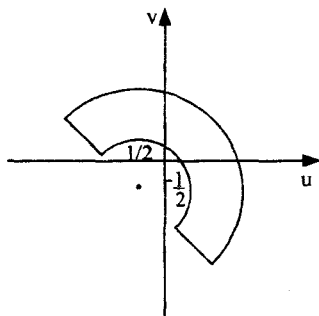
$$\begin{cases} x = u + v, \\ y = u^2 + v^2. \end{cases}$$

Решение. (D) является треугольником ABC. Область (G), соответствующая (D), в системе $0'uv$ задается неравенствами

$$\begin{cases} u + v \geq -1, \\ u^2 + v^2 \geq 1, \\ u + v + u^2 + v^2 \leq 7/2 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} u + v \geq -1, \\ u^2 + v^2 \geq 1, \\ \left(u + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(v + \frac{1}{2}\right)^2 \leq 4. \end{cases}$$



Первое неравенство задаёт полуплоскость, находящуюся над прямой $u + v = -1$, второе – внешность круга радиусом 1 с центром в начале координат, третье – круг радиусом 2 с центром в точке $\left(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$. Сделаем рисунок. Видим, что (G) представляет собой половину кольца.

9. Формула Тейлора

Если функция $u = f(x_1; \dots; x_n)$ определена и непрерывно дифференцируема $(n+1)$ раз в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0)$, то для любой точки $M(x_1; \dots; x_n)$ из этой окрестности справедлива формула Тейлора:

$$\begin{aligned} f(M) = f(M_0) + \frac{dF(M_0; \Delta x_1; \dots; \Delta x_n)}{1!} + \frac{d^2F(M_0; \Delta x_1; \dots; \Delta x_n)}{2!} + \\ + \frac{d^3F(M_0; \Delta x_1; \dots; \Delta x_n)}{3!} + \dots + \frac{d^m F(M_0; \Delta x_1; \dots; \Delta x_n)}{m!} + \\ + \frac{d^{m+1}F(M'; \Delta x_1; \dots; \Delta x_n)}{(m+1)!}, \end{aligned} \quad (7)$$

где $\Delta x_k = x_k - x_k^0$, а M' – некоторая точка из указанной окрестности. В частности, для функции двух переменных эта формула имеет вид

$$f(x; y) = f(x_0; y_0) + \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial x} (x - x_0) + \frac{\partial f(x_0; y_0)}{\partial y} (y - y_0) \right) +$$

$$+ \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial x^2} (x - x_0)^2 + 2 \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial x \partial y} (x - x_0)(y - y_0) + \frac{\partial^2 f(x_0; y_0)}{\partial y^2} (y - y_0)^2 \right) + \dots + \frac{d^{m+1} f(x_0 + \theta \Delta x; y_0 + \theta \Delta y; \Delta x; \Delta y)}{(m+1)!},$$

где $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, $0 < \theta < 1$.

Формула Тейлора допускает несколько форм записи. Равенство (7) называется формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Если последнее слагаемое в (7) – остаточный член – заменить на $o(\rho^m)$, где $\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + \dots + (\Delta x_n)^2}$, то получится формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

Пример 16. Разложить функцию $f(x; y) = x^2 \cdot 2^{x-3y}$ по формуле Тейлора в окрестности точки $M_0(2; 1)$ до членов второго порядка включительно. Пользуясь этой формулой, найти приближённое значение функции в точке $M(2,05; 0,38)$.

Решение. Найдём значение функции и частных производных функции до второго порядка включительно в точке $M_0(2; 1)$:

$$f(M_0) = 2^2 \cdot 2^{2-3} = 2;$$

$$f'_x = 2x \cdot 2^{x-3y} + x^2 \cdot 2^{x-3y} \cdot \ln 2 = x \cdot 2^{x-3y} (2 + x \ln 2);$$

$$f'_x(M_0) = 2 \cdot 2^{2-3} (2 + 2 \ln 2) = 2(1 + \ln 2);$$

$$f'_y = -3x^2 \cdot 2^{x-3y} \ln 2, \quad f'_y(M_0) = -3 \cdot 2^2 \cdot 2^{2-3} \cdot \ln 2 = -6 \ln 2;$$

$$f''_{xx} = (2^{x-3y} + x \cdot 2^{x-3y} \cdot \ln 2)(2 + x \ln 2) + x \cdot 2^{x-3y} \cdot \ln 2 = 2^{x-3y} (2 + 4x \ln 2 + x^2 \ln^2 2);$$

$$f''_{xx}(M_0) = 2^{-1} (2 + 8 \ln 2 + 4 \ln^2 2) = 1 + 4 \ln 2 + 2 \ln^2 2;$$

$$f''_{xy} = -3x \cdot 2^{x-3y} (2 + x \ln 2) \ln 2;$$

$$f''_{xy}(M_0) = -32 \cdot 2^{-1} (2 + 2 \ln 2) \ln 2 = -6(1 + \ln 2) \ln 2;$$

$$f''_{yy} = 9x^2 \cdot 2^{x-3y} \cdot \ln^2 2;$$

$$f''_{yy}(M_0) = 94 \cdot 2^{-1} \cdot \ln^2 2 = 18 \ln^2 2.$$

Вспользуемся формулой Тейлора:

$$f(x; y) = 2 + 2(1 + \ln 2)(x - 2) - 6 \ln 2 (y - 1) +$$

$$+ \frac{1}{2} [(1 + 4 \ln 2 + 2 \ln^2 2)(x - 2)^2 - 12(1 + \ln 2) \ln 2 (x - 2)(y - 1) +$$

$$+ 18 \ln^2 2 (y - 1)^2] + o(\rho^2),$$

где $\rho^2 = (x-2)^2 + (y-1)^2$.

Найдём приближённое значение $f(2,05; 0,38)$, отбросив в последнем равенстве остаточный член $o(\rho^2)$:

$$\begin{aligned} f(2,05; 0,98) &\approx 2 + 2(1 + \ln 2) 0,05 - 6 \ln 2 (-0,02) + \frac{1}{2} [(1 + 4 \ln 2 + \\ &+ 2 \ln^2 2 \cdot 0,05^2 - 12 (1 + \ln 2) \ln 2 \cdot 0,05 (-0,02) + 18 \cdot \ln^2 2 (-0,02)^2] = \\ &= 2 + 0,1 (1 + \ln 2) - 0,12 \cdot \ln 2 + \frac{1}{2} [(1 + 4 \ln 2 + 2 \ln^2 2) 0,0025 - \\ &0,012 (1 + \ln 2) \ln 2 + 0,0072 \cdot \ln^2 2] \approx 2,087. \end{aligned}$$

10. Экстремум функции многих переменных

Пусть функция $u = f(x_1; \dots; x_n)$ определена в некоторой окрестности точки $M(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0)$. Говорят, что точка M является точкой максимума (минимума) функции $u = f(x_1; \dots; x_n)$, если существует окрестность V точки M , такая что для любой точки N из этой окрестности V , отличной от точки M , справедливо неравенство $f(N) < f(M)$ ($f(N) > f(M)$). Точки максимума и точки минимума функции называют точками экстремума функции, а значения функции в этих точках – экстремумами функции.

Теорема 3 (необходимое условие экстремума). Если M – точка экстремума дифференцируемой функции $u = f(x_1; \dots; x_n)$, то

$$\frac{\partial f(M)}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f(M)}{\partial x_2} = 0, \dots, \quad \frac{\partial f(M)}{\partial x_n} = 0. \quad (8)$$

Точка M , в которой выполнены условия (8), называется стационарной точкой. Не любая стационарная точка функции является точкой экстремума. Следующая ниже теорема даёт достаточное условие для того, чтобы стационарная точка функции двух переменных была точкой экстремума.

Теорема 4 (достаточное условие экстремума для функции двух переменных). Пусть $M(x_0; y_0)$ – стационарная точка функции двух переменных $u = f(x; y)$, дважды непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности точки M .

Рассмотрим определитель

$$\Delta(x; y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{vmatrix}.$$

1) Если $\Delta(M) > 0$, то $M(x_0; y_0)$ является точкой экстремума функции $u(x; y) = f(x; y)$, а именно: а) если $\frac{\partial^2 u(M)}{\partial x^2} > 0$, то M – точка минимума; б) если $\frac{\partial^2 u(M)}{\partial x^2} < 0$, то M – точка максимума.

2) Если $\Delta(M) < 0$, то M не является точкой экстремума.

Пример 17. Найти точки экстремума функции

$$u(x; y) = \frac{x^2}{2} + 2x + \frac{y^3}{3} + y^2 - 3y + 5.$$

Решение. Найдём стационарные точки функции $\frac{\partial u}{\partial x} = x + 2$,

$\frac{\partial u}{\partial y} = y^2 + 2y - 3$. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} x + 2 = 0, \\ y^2 + 2y - 3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2, \\ y = -3, \quad y = 1. \end{cases}$$

Решением системы являются точки $M_1(-2; -3)$, $M_2(-2; 1)$. Исследуем эти стационарные точки на экстремум, для чего найдём частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 1, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2y + 2.$$

Имеем

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2y + 2 \end{vmatrix} = 2y + 2.$$

$\Delta(M_1) = 2(-3) + 2 = -4 < 0$, следовательно, $M_1(-2; -3)$ не является точкой экстремума.

$\Delta(M_2) = 2 \cdot 1 + 2 = 4 > 0$, что говорит о том, что $M_2(-2; 1)$ является точкой экстремума. А так как $\frac{\partial^2 u(M_2)}{\partial x^2} = 1 > 0$, то заключаем, что M_2 – точка минимума.

Теорема 5 (достаточное условие экстремума для функции трёх переменных). Пусть $M(x_0; y_0; z_0)$ – стационарная точка функции $u = f(x; y; z)$, дважды непрерывно дифференцируемой в некоторой окрестности точки M . Рассмотрим определители

$$\Delta_1(x; y; z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \Delta_2(x; y; z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3(x; y; z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{vmatrix}.$$

Пусть $\Delta_1(M) \cdot \Delta_2(M) \cdot \Delta_3(M) \neq 0$. Тогда имеем:

а) если $\Delta_1(M) > 0$, $\Delta_2(M) > 0$, $\Delta_3(M) > 0$, то $M(x_0; y_0; z_0)$ – точка минимума;

б) если $\Delta_1(M) < 0$, $\Delta_2(M) > 0$, $\Delta_3(M) < 0$, то $M(x_0; y_0; z_0)$ – точка максимума;

в) во всех остальных случаях (при условии $\Delta_1(M) \cdot \Delta_2(M) \cdot \Delta_3(M) \neq 0$) M не является точкой экстремума.

Пример 18. Найти точки экстремума функции

$$u = z^3 - x^2 - 3y^2 - \frac{3}{2}z^2 - 4x + 6y + 2.$$

Решение. Найдём стационарные точки функции $\frac{\partial u}{\partial x} = -2x - 4$,

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -6y + 6, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 3z^2 - 3z. \text{ Решим систему уравнений}$$

$$\begin{cases} -2x - 4 = 0, \\ -6y + 6 = 0, \\ 3z^2 - 3z = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2, \\ y = 1, \\ z = 0, \quad z = 1. \end{cases}$$

Решение этой системы приводит к двум стационарным точкам $M_1(-2; 1; 0)$ и $M_2(-2; 1; 1)$. Проверим, являются ли эти точки точками экстремума.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 6z - 3, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = 0.$$

$$\Delta_1(x; y; z) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -2, \quad \Delta_2(x; y; z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 12,$$

$$\Delta_3(x; y; z) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 6z - 3 \end{vmatrix} = 36(2z - 1).$$

$$\Delta_1(M_1) = -2 < 0, \quad \Delta_2(M_1) = 12 > 0, \quad \Delta_3(M_1) = -36 < 0.$$

Следовательно, $M_1(-2; 1; 0)$ является точкой максимума.

$\Delta_1(M_2) = -2 < 0$, $\Delta_2(M_2) = 12 > 0$, $\Delta_3(M_2) = 36 > 0$, что означает, что $M_2(-2; 1; 1)$ не является точкой экстремума.

Аналог теоремы 5 справедлив и для функции $u = f(x_1; \dots; x_n)$ п переменных, $n > 3$.

11. Условный экстремум

Говорят, что функция $u = f(x_1; x_2; \dots; x_n)$, определённая в некоторой окрестности точки $M(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0)$, имеет в точке M условный максимум (условный минимум), если для любой точки

$N(x_1; x_2; \dots; x_n)$ из вышеуказанной окрестности точки M , отличной от M , координаты которой удовлетворяют соотношениям

Замечание. $d^2L(x_1^0; x_2^0; \dots; x_n^0; \lambda_1^0; \lambda_2^0; \dots; \lambda_m^0; dx_1, dx_2, \dots, dx_n)$

является квадратичной формой от переменных dx_1, dx_2, \dots, dx_n ; с учётом условий (10) число независимых переменных среди dx_1, dx_2, \dots, dx_n оказывается равным $(n-m)$, что делает d^2L квадратичной формой от $(n-m)$ независимых переменных. Вопрос знакопостоянства квадратичной формы можно решать с помощью критерия Сильвестра.

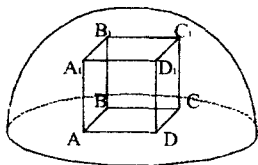
Пример 19. В полушар радиусом R вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объёма.

Решение. Обозначим через x, y, z измерения параллелепипеда: $|AD| = x, |AB| = y, |AA_1| = z$. Пусть O – центр основания; $|OA_1| = R$. Тогда согласно теореме Пифагора

$$\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 + z^2 = R^2,$$

или

$$x^2 + y^2 + 4z^2 - 4R^2 = 0. \quad (11)$$



Это есть уравнение связи. Обозначим левую часть уравнения (11) через $\varphi(x; y; z)$. Фактически требуется решить следующую задачу на условный экстремум: найти наибольшее значение функции $V = xyz$ при условии, что

переменные x, y, z удовлетворяют уравнению (11). Введём в рассмотрение функцию Лагранжа

$$L(x; y; z; \lambda) = xyz + \lambda(x^2 + y^2 + 4z^2 - 4R^2).$$

Найдём стационарные точки функции $L(x; y; z; \lambda)$:

$$L'_x = yz + 2\lambda x, \quad L'_y = xz + 2\lambda y, \quad L'_z = xy + 8\lambda z,$$

$$L'_\lambda = \varphi(x; y; z) = x^2 + y^2 + 4z^2 - 4R^2.$$

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} yz + 2\lambda x = 0, \\ xz + 2\lambda y = 0, \\ xy + 8\lambda z = 0, \\ x^2 + y^2 + 4z^2 - 4R^2 = 0. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения, предварительно умноженного на x , второе, предварительно умноженное на y , получим $x^2 - y^2 = 0$.

Учитывая особенности задачи ($x > 0, y > 0$), заключаем, что $x = y$. Действуя так же, находим, что $x = 2z$. Отсюда получаем $x = y = 2R/\sqrt{3}, z = R/\sqrt{3}, \lambda = -x/4 = -R/(2\sqrt{3})$. Таким образом,

$N\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}; \frac{2R}{\sqrt{3}}; \frac{R}{\sqrt{3}}; -\frac{R}{2\sqrt{3}}\right)$ или $N(-4\lambda_0; -4\lambda_0; -2\lambda_0; \lambda_0)$, если положить

$\lambda_0 = -R/(2\sqrt{3})$, является стационарной точкой функции $L(x; y; z; \lambda)$.

Для выяснения того, является ли $M(-4\lambda_0; -4\lambda_0; -2\lambda_0)$ точкой экстремума, исследуем второй дифференциал

$d^2L(-4\lambda_0; -4\lambda_0; -2\lambda_0; \lambda_0; dx; dy; dz)$ при условии, что в точке M dx, dy, dz связаны следующим соотношением (являющимся следствием равенства (11)):

$$\varphi'_x(M)dx + \varphi'_y(M)dy + \varphi'_z(M)dz = 0;$$

$$(2xdx + 2ydy + 8zdz)|_M = 0;$$

$$-8\lambda_0 dx - 8\lambda_0 dy - 16\lambda_0 dz = 0.$$

Из последнего равенства получаем

$$dz = -\frac{1}{2}(dx + dy). \quad (12)$$

Запишем формулу второго дифференциала функции $L(x; y; z; \lambda)$, считая её функцией трёх переменных x, y, z :

$$d^2L = L''_{xx}dx^2 + L''_{yy}dy^2 + L''_{zz}dz^2 + 2L''_{xy}dxdy + 2L''_{yz}dydz + 2L''_{zx}dzdx.$$

Имеем

$$L''_{xx} = 2\lambda, \quad L''_{xy} = z, \quad L''_{xz} = y,$$

$$L''_{yx} = z, \quad L''_{yy} = 2\lambda, \quad L''_{yz} = x,$$

$$L''_{zx} = y, \quad L''_{zy} = x, \quad L''_{zz} = 8\lambda.$$

$$d^2L(M) = L''_{xx}dx^2 + L''_{yy}dy^2 + L''_{zz}dz^2 + 2L''_{xy}dxdy + 2L''_{yz}dydz + 2L''_{zx}dzdx =$$

$$= 2\lambda_0 dx^2 + 2\lambda_0 dy^2 + 8\lambda_0 dz^2 + 2zdx dy + 2x dy dz + 2y dz dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} x = y = -4\lambda_0, \quad z = -2\lambda_0, \\ \text{согласно (12), } dz = -\frac{1}{2}(dx + dy) \end{array} \right] = 2\lambda_0 dx^2 + 2\lambda_0 dy^2 +$$

$$+ 8\lambda_0 \left(-\frac{1}{2}(dx + dy) \right)^2 - 4\lambda_0 dx dy - 8\lambda_0 dy \left(-\frac{1}{2}(dx + dy) \right) -$$

$$- 8\lambda_0 \left(-\frac{1}{2}(dx + dy) \right) dx = 2\lambda_0 dx^2 + 2\lambda_0 dy^2 + 2\lambda_0 dx^2 + 4\lambda_0 dx dy +$$

$$\begin{aligned}
& +2\lambda_0 dy^2 - 4\lambda_0 dx dy + 4\lambda_0 dx dy + 4\lambda_0 dy^2 + 4\lambda_0 dx^2 + 4\lambda_0 dx dy = \\
& = 8\lambda_0 dx^2 + 8\lambda_0 dy^2 + 8\lambda_0 dx dy = 8\lambda_0 (dx^2 + dx dy + dy^2) = \\
& = 8\lambda_0 dy^2 \left[\left(\frac{dx}{dy} \right)^2 + \frac{dx}{dy} + 1 \right] = 8\lambda_0 dy^2 \left[\left(\frac{dx}{dy} \right)^2 + \frac{dx}{dy} + \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \right] = \\
& = 8\lambda_0 dy^2 \left[\left(\frac{dx}{dy} + \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{3}{4} \right] = 8\lambda_0 \left[\left(dx + \frac{1}{2} dy \right)^2 + \frac{3}{4} dy^2 \right].
\end{aligned}$$

Так как выражение в квадратных скобках положительно при любых dx , dy , удовлетворяющих условию $|dx| + |dy| \neq 0$, а $\lambda_0 = -\frac{R}{2\sqrt{3}} < 0$, то $d^2L < 0$; следовательно, точка $M\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}; \frac{2R}{\sqrt{3}}; \frac{R}{\sqrt{3}}\right)$ является точкой условного максимума, и искомый параллелепипед имеет измерения $x = 2R/\sqrt{3}$, $y = 2R/\sqrt{3}$, $z = R/\sqrt{3}$, где x , y – измерения основания прямоугольного параллелепипеда, лежащего на круге полушара, а z – высота.

Замечание. Для решения вопроса знакопостоянства квадратичной формы $d^2L = 8\lambda dx^2 + 8\lambda dx dy + 8\lambda dy^2$ в примере 19 можно было привлечь критерий Сильвестра. Образует симметричную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 8\lambda_0 & 4\lambda_0 \\ 4\lambda_0 & 8\lambda_0 \end{pmatrix}$$

Имеем

$$\Delta_1 = 8\lambda_0 < 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 8\lambda_0 & 4\lambda_0 \\ 4\lambda_0 & 8\lambda_0 \end{vmatrix} = 48\lambda_0^2 > 0 \quad (\lambda_0 = -R/(2\sqrt{3}) < 0).$$

Следовательно, d^2L отрицательно определен и поэтому $M\left(\frac{2R}{\sqrt{3}}; \frac{2R}{\sqrt{3}}; \frac{R}{\sqrt{3}}\right)$ является точкой условного максимума.

В случае функции двух переменных справедливо следующее утверждение.

Теорема 7. Пусть требуется найти условный экстремум дважды непрерывно дифференцируемой функции $u = f(x; y)$ с уравнением связи $\varphi(x; y) = 0$. Пусть $N(x_0; y_0; \lambda_0)$ – стационарная точка функции Лагранжа $L(x; y; \lambda) = f(x; y) + \lambda\varphi(x; y)$. Рассмотрим функцию

$$\Delta = L''_{xx} (\varphi'_y)^2 - 2L''_{xy} \cdot \varphi'_x \cdot \varphi'_y + L''_{yy} (\varphi'_x)^2.$$

Тогда 1) если $\Delta(N_0) < 0$, то $M_0(x_0; y_0)$ является точкой условного минимума; 2) если $\Delta(N_0) > 0$, то $M_0(x_0; y_0)$ является точкой условного максимума.

Пример 20. Найти условный экстремум функции $u = x^2 + 2y^2 - 3xy + 3x - 6y + 2$ при уравнении связи $x + y - 3 = 0$.

Решение. Составим функцию Лагранжа

$$L(x; y; \lambda) = x^2 + 2y^2 - 3xy + 3x - 6y + 2 + \lambda(x + y - 3).$$

Найдём стационарные точки этой функции

$$L'_x = 2x - 3y + 3 + \lambda, \quad L'_y = 4y - 3x - 6 + \lambda, \quad L'_\lambda = x + y - 3.$$

Решим систему уравнений

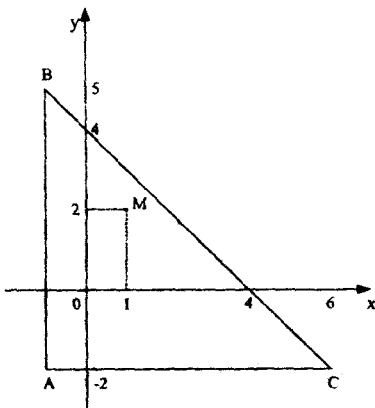
$$\begin{cases} 2x - 3y + 3 + \lambda = 0, \\ 4y - 3x - 6 + \lambda = 0, \\ x + y - 3 = 0. \end{cases}$$

Решив систему, находим $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, $\lambda_0 = 1$. Имеем $\varphi'_x \equiv \varphi'_y \equiv 1$, $L''_{xx}(1; 2; 1) = 2$, $L''_{yy}(1; 2; 1) = -3$, $L''_{xy}(1; 2; 1) = 4$.

$\Delta(1; 2; 1) = \left(L''_{xx}(\varphi'_y)^2 - 2L''_{xy} \cdot \varphi'_x \cdot \varphi'_y + L''_{yy}(\varphi'_x)^2 \right) \Big|_{(1; 2; 1)} =$
 $= 2 - 2(-3) + 4 = 12 > 0$, следовательно, $M(1; 2)$ является точкой условного максимума.

12. Наибольшее и наименьшее значения функции многих переменных в замкнутой области

Для нахождения наибольшего и наименьшего значений функции $u = u(x_1; \dots; x_n)$ в ограниченной замкнутой области (D) поступают следующим образом. Сначала находят стационарные точки M_1, M_2, \dots, M_k , принадлежащие (D). Затем исследуют сужение $u|_\Gamma$ функции $u = u(x_1; \dots; x_n)$ на границе (Γ) области (D). Пусть N_1, N_2 — точки максимума и минимума функции $u|_\Gamma$. После этого



сравнивают значения $u(M_1)$ и $u(N_1)$ и $u(N_2)$ и среди этих значений выбирают наибольшее и наименьшее.

Пример 21. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $u = 2x^2 - 4xy + 3y^2 + 4x - 8y + 5$ в замкнутой области (D), заданной неравенствами $x \geq -1$, $y \geq -2$, $x + y \leq 4$.

Решение. Изобразим область (D); она представляет собой треугольник с вершинами $A(-1; -2)$, $B(-1; 5)$, $C(6; -2)$. Найдём стационарные точки.

$u'_x = 4x - 4y + 4$, $u'_y = -4x + 6y - 8$. Решим систему уравнений

$$\begin{cases} 4x - 4y + 4 = 0, \\ -4x + 6y - 8 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = -1, \\ -2x + 3y = 4. \end{cases}$$

Решением этой системы является $x=1$, $y=2$. Стационарная точка $M(1; 2)$ принадлежит области (D), так как её координаты удовлетворяют всем трём неравенствам, задающим треугольник (D). Найдём значение функции в этой точке: $u(M) = 2 - 8 + 12 + 4 - 16 + 5 = -1$.

Исследуем функцию на границе (Γ) области (D). Граница (Γ) представляет собой объединение трёх отрезков: (ℓ_1) – отрезка BC, (ℓ_2) – отрезка AB, (ℓ_3) – отрезка AC.

1) (ℓ_1) = $\{(x; y) : -1 \leq x \leq 6, y = 4 - x\}$. $u|_{\ell_1} = 2x^2 - 4x(4 - x) + 3(4 - x)^2 + 4x - 8(4 - x) + 5 = 2x^2 - 16x + 4x^2 + 3(16 - 8x + x^2) + 4x - 32 + 8x + 5 = 9x^2 - 28x + 21$.

Найдём наибольшее и наименьшее значения функции

$\varphi_1(x) = 9x^2 - 28x + 21$ на отрезке $[-1; 6]$.

Имеем $\varphi'_1(x) = 18x - 28$; $x = 14/9$ – стационарная точка функции $\varphi_1(x)$, $14/9 \in [-1; 6]$. Обозначим $N_1(14/9; 4 - 14/9)$ или $N_1(14/9; 22/9)$.

$u(N_1) = \varphi_1(14/9) = 196/9 - 392/9 + 21 = -34/9$.

Найдём значения $\varphi_1(x)$ на концах отрезка $[-1; 6]$: $\varphi_1(-1) = u(B) = 58$; $\varphi_1(6) = u(C) = 177$. Наибольшим из этих значений является $u(C) = 177$, наименьшим – $u(N_1) = -34/9$.

2) (ℓ_2) = $\{(x; y) : x = -1, -2 \leq y \leq 5\}$. $u|_{\ell_2} = 2 + 4y + 3y^2 - 4 - 8y + 5 = 3y^2 - 4y + 3$. Найдём наибольшее и наименьшее значения функции $\varphi_2(y) = 3y^2 - 4y + 3$ на отрезке $[-2; 5]$; $\varphi'_2(y) = 6y - 4$; $y = 2/3 -$

стационарная точка функции $\varphi_2(y)$, принадлежащая отрезку $[-2; 5]$.

Обозначим $N_2(-1; 2/3)$. $U(N_2) = \varphi_2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{3} - \frac{8}{3} + 3 = \frac{5}{3}$.

Найдём значения функции $\varphi_2(y)$ на концах отрезка $[-2; 5]$:

$$\varphi_2(-2) = u(A) = 23; \quad \varphi_2(5) = u(B) = 58.$$

3) $(\ell_3) = \{(x; y) : -1 \leq x \leq 6, y = -2\}$. $u|_{\ell_3} = 2x^2 + 8x + 12 + 4x + 16 + 5 = 2x^2 + 12x + 33$. Обозначим $\varphi_3(x) = 2x^2 + 12x + 33$.

$\varphi_3'(x) = 4x + 12$. Стационарная точка $x = -3$ не принадлежит отрезку $[-1; 6]$, поэтому она нас не интересует. Значения $\varphi_3(x)$ на концах отрезка $[-1; 6]$ были найдены ранее: $\varphi_3(-1) = u(A) = 23$, $\varphi_3(6) = u(C) = 177$.

Сравнивая все полученные значения, находим

$$\max_{(x,y) \in (D)} u(x; y) = u(C) = u(6; -2) = 177, \quad \min_{(x,y) \in (D)} u(x; y) = u(M) = u(1; 2) = -1.$$

Задание 8.1

Найдите пределы $\lim_{\substack{x \rightarrow x_1 \\ y \rightarrow y_1}} f(x; y)$ и $\lim_{\substack{x \rightarrow x_2 \\ y \rightarrow y_2}} f(x; y)$.

1) $f(x, y) = \frac{xy + y^2}{x^2 + 3y^2}$, $x_1 = 2$; $y_1 = 1$; $x_2 = 0$; $y_2 = 0$;

2) $f(x, y) = \frac{3x^2 - xy}{x^2 - y^2}$, $x_1 = -2$; $y_1 = 1$; $x_2 = 0$; $y_2 = 0$;

3) $f(x, y) = \frac{-2x^2 - xy}{x^2 - y^2}$, $x_1 = 1$; $y_1 = 1$; $x_2 = 0$; $y_2 = 0$;

4) $f(x, y) = \frac{x^2 - 2y^2}{x^2 + xy}$, $x_1 = 0$; $y_1 = 0$; $x_2 = 1$; $y_2 = 2$;

5) $f(x, y) = \frac{4x^2 - y^2}{xy + 2y^2}$, $x_1 = 0$; $y_1 = 0$; $x_2 = -2$; $y_2 = -1$;

6) $f(x, y) = \frac{-x^2 - y^2}{3x^2 + xy}$, $x_1 = 1$; $y_1 = -1$; $x_2 = 0$; $y_2 = 0$;

7) $f(x, y) = \frac{3x^2 + 2y^2}{x^2 - y^2}$, $x_1 = 0$; $y_1 = 0$; $x_2 = 2$; $y_2 = 1$;

- 8) $f(x, y) = \frac{-2x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$, $x_1 = -1$; $y_1 = -2$; $x_2 = 0$; $y_2 = 0$;
- 9) $f(x, y) = \frac{2x^2 - 3y^2}{x^2 + y^2}$, $x_1 = 1$; $y_1 = -1$; $x_2 = 0$; $y_2 = 0$;
- 10) $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{3xy + 2y^2}$, $x_1 = 0$; $y_1 = 0$; $x_2 = 1$; $y_2 = -1$;
- 11) $f(x, y) = \frac{2x^2 - y^2}{3x^2 - xy}$, $x_1 = 2$; $y_1 = 1$; $x_2 = 0$; $y_2 = 0$;
- 12) $f(x, y) = \frac{-x^2 + 4y^2}{2x^2 - y^2}$, $x_1 = 0$; $y_1 = 0$; $x_2 = 2$; $y_2 = 1$;
- 13) $f(x, y) = \frac{x^2 - 4xy}{x^2 + y^2}$, $x_1 = 3$; $y_1 = 1$; $x_2 = 0$; $y_2 = 0$;
- 14) $f(x, y) = \frac{2x^2 + 3y^2}{x^2 - 4xy}$, $x_1 = 0$; $y_1 = 0$; $x_2 = 1$; $y_2 = 2$;
- 15) $f(x, y) = \frac{-x^2 - 2y^2}{3x^2 + y^2}$, $x_1 = 1$; $y_1 = 1$; $x_2 = 0$; $y_2 = 0$;
- 16) $f(x, y) = \frac{x^2 - 3y^2}{x^2 + y^2}$, $x_1 = 0$; $y_1 = 0$; $x_2 = 3$; $y_2 = 2$;
- 17) $f(x, y) = \frac{x^2 + 2xy}{-x^2 + y^2}$, $x_1 = 0$; $y_1 = 0$; $x_2 = 2$; $y_2 = 1$;
- 18) $f(x, y) = \frac{4xy + y^2}{x^2 - y^2}$, $x_1 = 3$; $y_1 = 1$; $x_2 = 0$; $y_2 = 0$;
- 19) $f(x, y) = \frac{2x^4 + x^2}{x^2 + y^2}$, $x_1 = 2$; $y_1 = 1$; $x_2 = 0$; $y_2 = 0$;
- 20) $f(x, y) = \frac{3x^2 - y^2}{xy + 2y^2}$, $x_1 = 0$; $y_1 = 0$; $x_2 = 1$; $y_2 = -1$;
- 21) $f(x, y) = \frac{2x^2 + y^2}{x^2 + xy}$, $x_1 = 2$; $y_1 = -1$; $x_2 = 0$; $y_2 = 0$;
- 22) $f(x, y) = \frac{-x^2 + 3y^2}{2x^2 + y^2}$, $x_1 = -2$; $y_1 = 1$; $x_2 = 0$; $y_2 = 0$;

$$23) f(x, y) = \frac{3x^2 - 2y^2}{x^2 - 3xy}, \quad x_1 = 0; \quad y_1 = 0; \quad x_2 = 2; \quad y_2 = -1;$$

$$24) f(x, y) = \frac{2x^2 + 5y^2}{xy - y^2}, \quad x_1 = 0; \quad y_1 = 0; \quad x_2 = 4; \quad y_2 = 1;$$

$$25) f(x, y) = \frac{3x^2 - 2xy}{x^2 + y^2}, \quad x_1 = -2; \quad y_1 = 2; \quad x_2 = 0; \quad y_2 = 0;$$

$$26) f(x, y) = \frac{2x^2 - y^2}{4xy + y^2}, \quad x_1 = -1; \quad y_1 = -2; \quad x_2 = 0; \quad y_2 = 0;$$

$$27) f(x, y) = \frac{xy - y^2}{5x^2 + y^2}, \quad x_1 = 0; \quad y_1 = 0; \quad x_2 = 2; \quad y_2 = -1;$$

$$28) f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{xy + y^2}, \quad x_1 = 3; \quad y_1 = 1; \quad x_2 = 0; \quad y_2 = 0;$$

$$29) f(x, y) = \frac{3x^2 + y^2}{x^2 - xy}, \quad x_1 = 0; \quad y_1 = 0; \quad x_2 = 2; \quad y_2 = -1;$$

$$30) f(x, y) = \frac{-2x^2 - 3y^2}{x^2 + y^2}, \quad x_1 = 2; \quad y_1 = -1; \quad x_2 = 0; \quad y_2 = 0;$$

Задание 8.2

Найдите $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ для функции $u = f(x, y, z)$ и значение

частной производной в указанной точке (M).

$$1) f(x; y; z) = x \sin(e^{4x} - y^2z), \quad u'_x(0; 1; 1);$$

$$2) f(x; y; z) = y^2 e^{3x - y^2z}, \quad u'_y(0; 1; 1);$$

$$3) f(x; y; z) = x \cos(x - y^2z), \quad u'_x\left(\frac{\pi}{2}; 1; 0\right);$$

$$4) f(x; y; z) = \sqrt{z} \arctg(x^2z - 3y), \quad u'_z(1; 1; 4);$$

$$5) f(x; y; z) = x^2 \ln(x^3 + 4yz), \quad u'_x(1; 2; 1);$$

$$6) f(x; y; z) = y^2 \sin(xyz), \quad u'_y(0; 2; -1);$$

$$7) f(x; y; z) = x^3 \sin(xy^2z^3), \quad u'_x(1; 1; 0);$$

- 8) $f(x; y; z) = y^2 e^{x^2 - 2yz}$, $u'_y \left(0; \frac{1}{4}; 2 \right)$;
- 9) $f(x; y; z) = x^2 e^{\cos(x^2 - y^3 z)}$, $u'_x \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}; 0; 0 \right)$;
- 10) $f(x; y; z) = z \sqrt{\ln(x^2 - yz)}$, $u'_z (2; -2; 1)$;
- 11) $f(x; y; z) = z^2 \cos(x^2 y - z)$, $u'_z (2; 1; 2)$;
- 12) $f(x; y; z) = \sqrt{x} \sin(x^2 - yz)$, $u'_z (4; 2; 2)$;
- 13) $f(x; y; z) = y^2 \sqrt{\operatorname{arctg}(x^2 y - z^3)}$, $u'_x (2; 7; 3)$;
- 14) $f(x; y; z) = z^2 e^{2x - y + z^2}$, $u'_y (0; 1; 2)$;
- 15) $f(x; y; z) = z^2 \sqrt{\cos(x^2 z + y^3)}$, $u'_x \left(\frac{1}{2}; -1; 4 \right)$;
- 16) $f(x; y; z) = \sqrt{y} \ln(5x^2 - 2yz)$, $u'_y (2; 4; 2)$;
- 17) $f(x; y; z) = y^2 \operatorname{arctg}(x^2 y - z^3)$, $u'_x (1; 1; 0)$;
- 18) $f(x; y; z) = x^2 \sin(x - y^2 - z^2)$, $u'_y (1; \sqrt{\pi}; 1)$;
- 19) $f(x; y; z) = \sqrt{x} \operatorname{tg}(x^2 - y^3 z)$, $u'_x (4; 2; 2)$;
- 20) $f(x; y; z) = z^3 e^{x^2 + yz^2}$, $u'_x (1; -1; 1)$;
- 21) $f(x; y; z) = \sqrt{y \sin(x^2 z + 2y)}$, $u'_y (2; 4; -1)$;
- 22) $f(x; y; z) = x^2 \ln \left(\sin \left(\frac{\pi}{2} x - y^2 z \right) \right)$, $u'_x (1; 0; 0)$;
- 23) $f(x; y; z) = x^2 \operatorname{arctg}(x - y^2 z)$, $u'_y (3; 2; 1)$;
- 24) $f(x; y; z) = x \sqrt{\ln(x^3 - y^2 + yz)}$, $u'_x (3; 1; 2)$;
- 25) $f(x; y; z) = \sqrt{z} e^{x^2 y z^2}$, $u'_z (0; 1; 4)$;
- 26) $f(x; y; z) = z \sqrt{\sin(x^2 y - 3z)}$, $u'_x \left(1; \frac{\pi}{2}; 0 \right)$;
- 27) $f(x; y; z) = z^2 \ln(x - y^2 z)$, $u'_z (1; 2; -2)$;
- 28) $f(x; y; z) = x e^{\sqrt{x^2 - 2yz^2}}$, $u'_x (1; 0; 0)$;

$$29) f(x; y; z) = y^2 \ln(y^2 + xz), \quad u'_y(0; 1; 2);$$

$$30) f(x; y; z) = \sqrt{x} e^{x-yz}, \quad u'_x(1; -1; 1).$$

Задание 8.3

Найдите все частные производные второго порядка функции $u = f(x, y, z)$. Найдите значения указанной частной производной в указанной точке.

$$1) f(x; y; z) = x^3 y^2 z - 2y^3 + xz, \quad u''_{xy}(1; 2; 1);$$

$$2) f(x; y; z) = -3x^2 yz^2 - 2x^2 y^2 + 3yz^2, \quad u''_{yz}(-1; 1; 1);$$

$$3) f(x; y; z) = 3xyz^3 - x^2 y - y^2 z^2, \quad u''_{yy}(2; 1; -1);$$

$$4) f(x; y; z) = 2x^2 y^3 - yz^2 + xz^3, \quad u''_{xz}(2; -1; 1);$$

$$5) f(x; y; z) = 3x^2 y^3 z - 4xz^2 + 2y^2 z^2, \quad u''_{xx}(1; 1; 1);$$

$$6) f(x; y; z) = -3x^2 z^2 + xyz - y^2 z^4, \quad u''_{yz}(-2; 1; -1);$$

$$7) f(x; y; z) = x^3 y + 2yz^2 - 5z^3, \quad u''_{xy}(1; 2; 1);$$

$$8) f(x; y; z) = -3x^2 y^2 z + 2x^3 y^3 - yz, \quad u''_{xz}(1; 1; 2);$$

$$9) f(x; y; z) = 4xy^2 z^3 - x^2 y^2 - 3y^2 z, \quad u''_{xz}(-1; -1; 1);$$

$$10) f(x; y; z) = 2x^3 y^2 - y^2 z^2 + xz^3, \quad u''_{yz}(1; 2; 1);$$

$$11) f(x; y; z) = 5x^3 + 2y^2 z - xz^3, \quad u''_{xz}(1; -1; 2);$$

$$12) f(x; y; z) = -x^3 yz^3 - x^2 z^2 + 2y^2 z^2, \quad u''_{xy}(1; 1; 2);$$

$$13) f(x; y; z) = -3xyz^4 - y^2 z^2 - 2x^2 z, \quad u''_{yz}(-1; 2; 1);$$

$$14) f(x; y; z) = 3x^2 yz - xy^2 + 2y^2 z^2, \quad u''_{yy}(-2; 1; 1);$$

$$15) f(x; y; z) = 2x^2 y^2 z + xy^2 - 3yz^2, \quad u''_{yz}(-1; 2; 1);$$

$$16) f(x; y; z) = 3x^3 yz^2 + 2yz^2 - z^3, \quad u''_{yz}(1; -1; -2);$$

$$17) f(x; y; z) = 2x^3 z^2 - 3xy + 4y^2 z, \quad u''_{xz}(-1; -1; 1);$$

$$18) f(x; y; z) = 4xy^3 z^2 - 2xz^2 + x^2 yz, \quad u''_{xx}(2; -1; 1);$$

$$19) f(x; y; z) = 3x^2 yz^2 + 2x^2 y^2 - yz^3, \quad u''_{xy}(-2; 1; 1);$$

$$20) f(x; y; z) = 2xyz^3 + x^2 z - y^2 z^3, \quad u''_{yz}(1; -2; 1);$$

$$21) f(x; y; z) = 4x^3 y - xyz^2 + y^2 z, \quad u''_{yy}(1; 2; 2);$$

- 22) $f(x; y; z) = 4x^2y^2z - 2xz^3 - yz^2$, $u_{xy}''(1; -2; -1)$;
 23) $f(x; y; z) = 2x^3z^2 - 4xy + yz^2$, $u_{xx}''(-2; 1; 2)$;
 24) $f(x; y; z) = x^2y^3z - 2xy^2 + y^2z^4$, $u_{yz}''(-1; -1; 2)$;
 25) $f(x; y; z) = -2x^3z^2 - 4y^2z + 2x^2z^3$, $u_{xz}''(1; 2; -1)$;
 26) $f(x; y; z) = x^2y^2z - 3xy^2 - z^4$, $u_{xy}''(2; -1; 1)$;
 27) $f(x; y; z) = -2x^3yz + 5xz^2 - y^2z$, $u_{yz}''(1; 1; -2)$;
 28) $f(x; y; z) = -x^3y^2z + xyz - 2y^2z^2$, $u_{xx}''(-1; 2; -1)$;
 29) $f(x; y; z) = 4x^3z^2 + 2x^2y - y^2z$, $u_{zz}''(1; -1; 1)$;
 30) $f(x; y; z) = -2x^2yz^3 - x^2z + 4y^2z$, $u_{yz}''(2; 1; -1)$;

Задание 8.4

Докажите, что функция $z = f(x; y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в частных производных

$$F\left(x; y; z; \frac{\partial z}{\partial x}; \frac{\partial z}{\partial y}; \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = 0.$$

$$1) z = \ln \frac{x}{y} + x^3 - y^3, \quad F = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - 3(x^3 - y^3);$$

$$2) z = e^{xy}, \quad F = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2xyz;$$

$$3) z = \arcsin \frac{x-y}{x+y}, \quad F = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y};$$

$$4) z = \frac{y}{(x^2 - y^2)^5}, \quad F = \frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{z}{y^2};$$

$$5) z = x^y, \quad F = y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - (1 + y \ln x) \frac{\partial z}{\partial x};$$

$$6) z = \ln(x^2 + (y+1)^2), \quad F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2};$$

$$7) z = \ln(x^2 + y^2), \quad F = y \frac{\partial z}{\partial x} - x \frac{\partial z}{\partial y};$$

- 8) $z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$, $F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;
- 9) $z = \frac{x}{y}$, $F = x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y}$;
- 10) $z = \cos y + (y - x) \sin y$, $F = x \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y}$;
- 11) $z = \frac{2x + 3y}{x^2 + y^2}$, $F = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} + z$;
- 12) $z = \frac{y^2}{3x} + \arcsin(xy)$, $F = x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2$;
- 13) $z = x \ln \frac{y}{x}$, $F = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - z$;
- 14) $z = \operatorname{arctg} \frac{x + y}{1 - xy}$, $F = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$;
- 15) $z = y \sqrt{\frac{y}{x}}$, $F = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;
- 16) $z = \sin(x + ay)$, $F = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$;
- 17) $z = \frac{x^2 + y^2}{x - y}$, $F = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} - 2 \frac{x + y}{x - y}$;
- 18) $z = \frac{y^2}{3x^2} + \arcsin(xy)$, $F = x^2 \frac{\partial z}{\partial x} - xy \frac{\partial z}{\partial y} + y^2$;
- 19) $z = (x^2 + y^2) \operatorname{tg} \frac{x}{y}$, $F = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - 2z$;
- 20) $z = \ln(x + e^{-y})$, $F = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$;
- 21) $z = \arcsin \frac{x}{x + y}$, $F = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y}$;
- 22) $z = \frac{y}{x}$, $F = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;

$$23) z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1), \quad F = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2};$$

$$24) z = e^{-(x+3y)} \sin(x+3y), \quad F = 9 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2};$$

$$25) z = \frac{xy}{x+y}, \quad F = x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} - 2z;$$

$$26) z = x e^{\frac{y}{x}}, \quad F = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2};$$

$$27) z = e^{-\cos(x+ay)}, \quad F = a^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2};$$

$$28) z = \sin x + \sin y + \sin(2x - y),$$

$$F = \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} - \cos x + \cos y - 3 \cos(2x - y);$$

$$29) z = x^2 e^{xy}, \quad F = x^2 z - 2x^3 z - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2};$$

$$30) z = \operatorname{arctg}(xy), \quad F = x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Задание 8.5

Найдите du и d^2u для функции $u = f(x, y)$.

$$1) u = -x^2 y^3 - xy^2; \quad 12) u = -2x^3 y^3 - x^2 y^3;$$

$$2) u = 2x^4 y - y^2; \quad 13) u = 3x^4 y^2 + 2xy;$$

$$3) u = -4x^3 y^2 + xy; \quad 14) u = 2x^5 y^3 - x^2 y^2;$$

$$4) u = 3x^3 y + xy^2; \quad 15) u = 3x^3 y^3 - y^2;$$

$$5) u = 4x^4 y^2 - 6x^2 y^2; \quad 16) u = 4x^2 y^2 - x^2 y;$$

$$6) u = 3x^2 y^2 + xy^3; \quad 17) u = 5x^2 y^2 + x^3;$$

$$7) u = 2x^3 y - x^2 y^2; \quad 18) u = -x^4 y^4 + 3x^2;$$

$$8) u = -x^2 y^5 - x^4; \quad 19) u = 2x^2 y - xy;$$

$$9) u = x^2 y^2 - xy^2; \quad 20) u = -2x^2 y^3 - y^5;$$

$$10) u = 5x^3 y^2 + xy; \quad 21) u = 4x^3 y^3 + x^2 y;$$

$$11) u = -x^5 y^4 + 3x^2 y^3; \quad 22) u = 2x^4 y - 5xy^3;$$

- 23) $u = 3x^4y^2 - x^2y$; 27) $u = -2x^2y^2 + 3xy$;
 24) $u = 2x^3y^2 - x^2y$; 28) $u = 4x^3y - y^3$;
 25) $u = -3x^2y^4 - xy^2$; 29) $u = -2x^4y^3 - x^2y$;
 26) $u = 3x^5y^2 - 2xy^3$; 30) $u = -x^3y + 2x^2y$.

Задание 8.6

Составьте уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности, заданной уравнением $f(x; y; z) = 0$ в указанной точке $M(x_0; y_0; z_0)$.

- 1) $2x^4yz - x^3z^2 - 3x^2yz - 2z^3 - 30 = 0$, $M(2; 2; 1)$;
- 2) $3x^2yz^2 - xy^2z + 4yz^2 + z^3 + 32 = 0$, $M(1; -1; 2)$;
- 3) $5x^2 - 3xy^2z - 4y^2z + 2z^3 - 22 = 0$, $M(-2; 1; 1)$;
- 4) $x^3y^2 + x^2z^3 - xyz + y^2 - 11 = 0$, $M(2; 1; 1)$;
- 5) $4x^2y^2z^3 - xy^2z - 2yz^2 - z^3 - 15 = 0$, $M(2; -1; 1)$;
- 6) $2x^4 - x^2yz - 3y^2z - 5yz - 2 = 0$, $M(-1; -2; 1)$;
- 7) $x^3 - 2x^2yz - y^2z^2 + z = 0$, $M(2; 1; 1)$;
- 8) $x^2y^2z - 3xyz^3 - 2y^2z^2 - z + 5 = 0$, $M(2; 1; 1)$;
- 9) $4x^3yz^2 + 2x^2y - 3xy^2z^2 - y^3 + 2z^3 + 6 = 0$, $M(1; 2; 1)$;
- 10) $x^3z - x^2y^2 + y^2z^3 + 3z + 9 = 0$, $M(1; 2; -1)$;
- 11) $x^2y - xyz^2 + 4y^2z^3 - z - 17 = 0$, $M(1; 2; -1)$;
- 12) $4x^2z^3 + xy^2z - 2y^3 + 3yz^2 + 17 = 0$, $M(2; 1; -1)$;
- 13) $x^4 + x^3y^2z - y^2z^2 - y^2 - 3z^2 + 5 = 0$, $M(1; 1; -1)$;
- 14) $2x^3y^2 - 3x^2yz^2 - 4y^2z - y^3 - 2z^3 = 0$, $M(1; -1; 1)$;
- 15) $2x^4y^2 + x^2yz - 6xz^4 - y^2z^5 - 64 = 0$, $M(1; -1; 2)$;
- 16) $3x^2 - xz + y^2 - z^2 + 2 = 0$, $M(-1; 1; 2)$;
- 17) $5x^3z - 2x^2y^2z^2 + 3xyz^2 - z^4 + 57 = 0$, $M(1; 1; 3)$;
- 18) $2x^3 - 3x^2yz - y^2z - y^3 - 4z^2 + 8 = 0$, $M(-2; -1; 1)$;
- 19) $-2x^3y + x^2y - xy^2 + yz^3 - z - 8 = 0$, $M(1; 2; 2)$;
- 20) $x^3yz + 3x^2y - yz^2 - z^4 + 7 = 0$, $M(1; -2; 1)$;
- 21) $6x^2yz + 2xy^2 - yz^2 + 4z^3 - 25 = 0$, $M(2; -1; -1)$;
- 22) $3x^2 + 4xy^2z - yz^2 - yz^2 - y^3 - 6z^3 - 12 = 0$, $M(2; 1; 1)$;

- 23) $2x^3 - x^3y^2 + yz^2 - 3z + 7 = 0$, $M(-1; 2; 1)$;
 24) $3x^2yz - 5yz + 3xy + z^2 + 10 = 0$, $M(-1; 2; 2)$;
 25) $5x^2y^2z - 4xy^3z^2 - yz^3 - z^4 + 30 = 0$, $M(1; 1; 2)$;
 26) $x^4y^2 - 2x^2y^3 - xz^2 + y^2z^2 - 2z - 7 = 0$, $M(-2; 1; 1)$;
 27) $2x^2y^3 - xyz + 3yz^3 - z^2 - 11z + 2 = 0$, $M(1; 1; 2)$;
 28) $-x^4yz^2 - x^2y^2z - z^3 + 4yz + 5 = 0$, $M(-1; 1; 1)$;
 29) $-x^4yz^2 - x^2y^2z - z^3 + 4yz + 5 = 0$, $M(1; 2; -1)$;
 30) $x^3 - 2x^2y^2z - 4yz^2 - y^2 - 6yz^2 + 44 = 0$, $M(1; 1; 2)$.

Задание 8.7

Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найдите $\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial v}$ для заданных функций $u = u(x; y)$, $x = x(t; v)$, $y = y(t; v)$.

- 1) $u = x^2e^{4x-y^2}$, $x = t\sqrt{\ln v}$, $y = t^2v^3$;
- 2) $u = xy^2 \sin(7x + 2y)$, $x = \sqrt{v} \ln(3t + 4v)$, $y = t^2 + v^5$;
- 1) $u = y^2 \arcsin(3x - 10y)$, $x = 3t^5 - 2t^2v$, $y = v \cos(t^2v^3)$;
- 4) $u = x \cdot 2^{x^2-y^3}$, $x = v^2 \arcsin(2tv)$, $y = t^2 - 3v$;
- 5) $u = y^3 \cos(2x + 5y)$, $x = t^2v - v^4$, $y = v \cdot \operatorname{tg}(6tv^2)$;
- 6) $u = x \cdot \arcsin(2x + 7y)$, $x = \sqrt{t} \cdot 2^{t^2v}$, $y = 5t^2 - v^3$;
- 7) $u = y^3e^{2x-5y}$, $x = t^3 + 2v$, $y = t \cdot \operatorname{arctg}(t^2 - v^2)$;
- 8) $u = y \cos(8x - 3y)$, $x = v^3 - tv^2$, $y = v \cdot \operatorname{arctg}(tv)$;
- 9) $u = x^2 \arccos(4x - 5y)$, $x = 3t^6 - 2v^3$, $y = \sqrt{v} \sin(tv)$;
- 10) $u = y \cdot 3^{x-y^4}$, $x = t^2v - v^2$, $y = v \cdot \operatorname{tg}(t^2 - 2v^2)$;
- 11) $u = \sqrt{x} \cdot \operatorname{tg}(5x - 4y)$, $x = t^2e^v$, $y = t^3 - 2v^2$;
- 12) $u = y^3 \operatorname{arctg}(6x - 11y)$, $x = 5t^3 - 2v^4$, $y = t \cdot \cos(t^2v^6)$;
- 13) $u = x^3e^{x-y^2}$, $x = v \sin(t^2 + v^2)$, $y = 2t^7 - 4v^3$;
- 14) $u = x \cdot \operatorname{ctg}(3x + 4y)$, $x = t^2 \sin(tv)$, $y = t\sqrt{v}$;

- 15) $u = y \cdot \operatorname{arctg}(2x + 4y)$, $x = t \sin(t^3 v)$, $y = 5t^2 - 4tv^3$;
 16) $u = y^2 \sin(3x - 2y)$, $x = 2t + 3tv$, $y = t^2 \ln(4t - 3v)$;
 17) $u = x^5 \operatorname{tg}(8x + 3y)$, $x = 3t^2 v$, $y = t^3 \operatorname{arctg}(tv^2)$;
 18) $u = \sqrt{y} \arccos(x^2 + 3y)$, $x = t^4 + v^3$, $y = t \cdot 2^{t^2 - v^4}$;
 19) $u = x^2 \cos(2x - 5y)$, $x = v \ln(t^2 + v^2)$, $y = t^3 v^4$;
 20) $u = y^3 \operatorname{tg}(5x - y)$, $x = v \cdot \operatorname{arctg}(t^2 v)$, $y = 4t^2 - 3v$;
 21) $u = x^3 \arcsin(6x + 5y)$, $x = 2t^7 - tv^3$, $y = t \cdot \operatorname{ctg}(t^2 + 2v^3)$;
 22) $u = y^2 \cdot 4^{x^3 + 5y}$, $x = t\sqrt{v}$, $y = t^2 \ln(t^3 - v^2)$;
 23) $u = \sqrt{x} \operatorname{arctg}(xy^2)$, $x = v^2 \ln(3t + v^3)$, $y = 2t^5 - t^2 v$;
 24) $u = x^3 \operatorname{ctg}(10x - 7y)$, $x = 2t^3 - v^2$, $y = t \cdot \operatorname{arctg}(t^2 v^2)$;
 25) $u = y \cdot \arccos(3x - 4y)$, $x = v^3 \ln(t^2 + v^3)$, $y = 3t^4 - 2v^2$;
 26) $u = x^3 \cos(5x - 3y)$, $x = t \cdot \arcsin(t^2 v)$, $y = e^{t - v^2}$;
 27) $u = y \sin(3x + 2y)$, $x = t^2 e^{t - 3v}$, $y = t - v \cdot \operatorname{tg} t$;
 28) $u = y^2 \operatorname{ctg}(2x - 7y)$, $x = 5t^2 - v^3$, $y = t^2 \ln(t^4 - v^2)$;
 29) $u = x y \sin(6x - 2y)$, $x = t^2 - 5v^3$, $y = v \cdot \operatorname{arctg}(t^2 v)$;
 30) $u = x^2 \operatorname{arctg}(9x - 2y)$, $x = 3t^4 - v^5$, $y = v^2 e^{5t - 4v}$.

Задание 8.8

Найдите u'_x для функции, заданной неявно.

- | | |
|---|--|
| 1) $x\sqrt{y} - 4y^2 e^{2x+5y} = 0$; | 9) $\sqrt{xy} + x \operatorname{arctg}(3x + 4y) = 0$; |
| 2) $x e^{\sqrt{y}} - y \operatorname{tg}(x + 2y) = 0$; | 10) $\sqrt{x} \ln(x + 3y) - y \operatorname{arctg} 2x = 0$; |
| 3) $x^3 \sin(2x + 5y) - y \cos x = 0$; | 11) $\sqrt{x} \operatorname{arctg} y - 5y \arcsin 3x = 0$; |
| 4) $y^2 \sqrt{x^3 + 3y} - 2x \ln(x^2 + 5y) = 0$; | 12) $\sqrt{x^2 + y} - y \operatorname{ctg}(2x + 5y) = 0$; |
| 5) $xy^3 e^x + x \ln y = 0$; | 13) $x^3 y \ln y - y \operatorname{tg}(2x + 3y) = 0$; |
| 6) $y \cos x - 3x \sin y^2 = 0$; | 14) $x^3 \operatorname{ctg} y - y^2 \operatorname{tg} x = 0$; |
| 7) $x^2 y^3 + y \sin(3x - 2y) = 0$; | 15) $x^2 e^y - y^2 e^x = 0$; |
| 8) $x^2 \operatorname{ctg} y - y e^{2x+3y} = 0$; | 16) $y^2 \ln x - 6x \sin y = 0$; |

- 17) $\sqrt{x} \sin 4y - y^2 \operatorname{tg} 3x = 0$; 24) $x^2 \sin(3x + 7y) - \sqrt{y} \cos 2x = 0$;
 18) $\sqrt{xy^4} + x^2 \cos(5x - 7y) = 0$;
 19) $x \ln y - y \ln x = 0$;
 20) $x \arcsin 2y - y \arcsin 3x = 0$;
 21) $x^3 \sqrt{y} - y \operatorname{tg}(6x - 2y) = 0$;
 22) $x^3 \sqrt{y} - y \operatorname{tg}(6x - 2y) = 0$;
 23) $x^2 \operatorname{arctg} 3y + 4y \operatorname{tg} x = 0$;

- 24) $x^2 \sin(3x + 7y) - \sqrt{y} \cos 2x = 0$;
 25) $\sqrt{x} e^{2x+3y} - ye^{4x-3y} = 0$;
 26) $x \ln(3x - 5y) - y^2 \operatorname{ctg} x = 0$;
 27) $x \sin 6y - y \arcsin x = 0$;
 28) $x^2 e^{2x-5y} - y^2 \ln x = 0$;
 29) $x^2 \ln(3x - 2y) + y \sin x = 0$;
 30) $y^2 \operatorname{arctg} 2x - x \operatorname{tg}(2x + 3y) = 0$.

Задание 8.9

Найдите $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ для функции $z = z(x; y)$, заданной неявно

указанным уравнением.

- 1) $\sqrt{x+z} + \ln(2y+3z) = 0$;
 2) $z^2 \operatorname{tg} 2x - y \operatorname{tg} z = 0$;
 3) $\ln(2z^2 + 3y^3) + x \sin z = 0$;
 4) $(y - 3z)^2 - 5 \sin(x + 2z) = 0$;
 5) $z^3 e^{x+y} - xye^z = 0$;
 6) $\ln(2x^4 - z^2) - x^3 y^2 z = 0$;
 7) $(x + 4z)^3 - 7 \cos(3z - 2y) = 0$;
 8) $\ln(6x + 5z) - z^2 e^{xy} = 0$;
 9) $\sqrt{4x + 3z} - 2 \operatorname{tg}(6y + 3z) = 0$;
 10) $z \ln(x + y) - x^2 \ln z = 0$;
 11) $\sqrt{y^2 + 4z} + 3 \operatorname{ctg}(2x - z) = 0$;
 12) $\sin(2x + 7z) - yz^2 = 0$;
 13) $x^2 \operatorname{arctg} z - z \operatorname{arctg} y = 0$;
 14) $\cos(5y - 6z) + z \operatorname{tg} x = 0$;
 15) $x^3 e^z - 5y\sqrt{z} = 0$;
- 16) $(2x + 5z)^2 - y \operatorname{arctg} z = 0$;
 17) $x \cdot 2^{yz} - z^2 \sqrt{y} = 0$;
 18) $x \operatorname{arctg} z - y^2 z^3 = 0$;
 19) $\sqrt{y^2 + z^2} - e^{2x+4z} = 0$;
 20) $y^2 \operatorname{arctg} z^2 - 3xz = 0$;
 21) $xy^2 e^z - z^2 \operatorname{tg} x = 0$;
 22) $x \arcsin z - ye^z = 0$;
 23) $\sqrt{3x - 2z} - e^{y+2z} = 0$;
 24) $y \arccos z^2 - x^2 z^3 = 0$;
 25) $x \operatorname{arctg} yz - ze^x = 0$;
 26) $\ln(x^2 + 2z^2) + yz^3 = 0$;
 27) $x^2 \operatorname{tg} z - \sqrt{y^2 + z^2} = 0$;
 28) $z \operatorname{tg}(xy) - x^2 e^z = 0$;
 29) $\ln(x^3 - z^2) + xe^z$;
 30) $x\sqrt{y^2 + z^2} - y \ln z = 0$.

Задание 8.10

Найдите якобиан $\frac{D(u;v)}{D(x;y)}$ заданной системы функций.

$$1. \begin{cases} u = -4x^2y^2 + x, \\ v = -3xy - y; \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} u = 4xy^2 - x^3, \\ v = 6xy - y; \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} u = -5x^3y^2 + x^2, \\ v = x - y^2; \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} u = \frac{y}{x^2} - x, \\ v = x^4y^2; \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} u = x \operatorname{arctg} y, \\ v = x^2 - xy^2; \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} u = -6x^3y + y^2, \\ v = 3xy^2 - x; \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} u = x^2\sqrt{y}, \\ v = x \ln(x + y); \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} u = 2x - 3xy, \\ v = x^2y + y^2; \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} u = -x^4y + x, \\ v = xy^3; \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} u = \frac{x}{y^2} + 3y, \\ v = xy^4; \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} u = 5x^2y - y^3, \\ v = x^2 \ln y; \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} u = \frac{x}{y} - xy, \\ v = xy^3; \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} u = 4x^3y - x^2, \\ v = 2x^2y^3; \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} u = x^3y^2, \\ v = \frac{y}{x^2} - 4x; \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} u = y^3 \ln x, \\ v = x^2y + 4x; \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} u = y^2\sqrt{x}, \\ v = x^2y - x; \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} u = 7x^3y^2, \\ v = 2x^3y - y^2; \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} u = x^4e^y, \\ v = xy^2 - y; \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} u = 3x^4y + 2y, \\ v = x - 3y^2; \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} u = xe^y, \\ v = x^3y^4; \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} u = 2x^2 - 3xy^2, \\ v = \sqrt{y \cdot \ln x}; \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} u = 10x^2y^2, \\ v = -3x + y^3; \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} u = y^2 \ln x, \\ v = x^2 y^3 - x; \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} u = 2x^5 y^2 + y, \\ v = 3xy^4; \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} u = 2^{x^2 y}, \\ v = 6x^2 - 5xy; \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} u = 2x^2 - xy^2, \\ v = x \cdot 2^y; \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} u = x^3 y^3, \\ v = x \ln y; \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} u = e^{xy}, \\ v = 2x^2 y; \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} u = 5x^4 y^2, \\ v = 3x^2 - y; \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} u = xy^2 - x^2, \\ v = 4x - 3x^2 y^2. \end{cases}$$

Задание 8.11

Функции $u(x; y)$, $v(x; y)$ независимых переменных x и y заданы неявно системой уравнений. Найдите $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$.

$$1. \begin{cases} -5u^2 - 3v + x^2 - 2y + 1 = 0, \\ -3u + 2v - xy = 0; \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 3u + 2v^2 - 5x + y = 0, \\ 2u^2 - v + x - 6y = 0; \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} -6u^2 - 7uv - 3x^2 + y^2 = 0, \\ u^2 - 2v^2 + x - 3xy = 0; \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 5u - v^2 + 3x - y^2 = 0, \\ -4u + v - 5x^2 - y = 0; \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} -4u^2 v + 3x - 5y^2 - 6 = 0, \\ 2u - 3v^3 + x^2 + 2y^2 = 0; \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 3u + 2v^2 - x^2 y + y^2 = 0, \\ u + 3v - xy^3 = 0; \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} -u^2 - v^3 + xy^3 - y^2 - 4 = 0, \\ u^2 v + 2v - x^2 - 3y^2 = 0; \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 2u^3 - v + 3x - y^2 = 0, \\ uv + x^2 - y^2 = 0; \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} -4u^2 - 2uv + 3x^2 y - 7 = 0, \\ 2u - v^2 - x^2 - y + 5 = 0; \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} u^2 - 5v^2 - xy^2 = 0, \\ 3u + u^2 v - x^2 - 4y = 0; \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} u - v^2 - x^2 - 7y = 0, \\ 3u + v + 2xy = 0; \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} -6u^2 - v^2 + 4x^3 - y^2 + 8 = 0, \\ uv + v - 3x^2 y = 0; \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 2u^2 v - v^2 + x^2 y - y = 0, \\ u^2 - v - 3x + 4y = 0; \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} 4u + v + x^2 y = 0, \\ 3u - v^2 - x + y^3 = 0; \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} -3u^2 + v^2 + 2x^2 + y^2 - 10 = 0, \\ uv - x^3 y + y = 0; \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} uv - 3v^2 + x^2 y = 0, \\ ux + v^2 - x^2 + 2y = 0; \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} -2u - v^2 - 5x + y^2 = 0, \\ 4u - v + x^2y^2 = 0; \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 7u - v^2 + 2x - y^2 = 0, \\ uv - x^2 + 3y = 0; \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} u^3 - 2v + 2x^2y - 7 = 0, \\ uy + v^2 - x^2 = 0; \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} -2u^3 + v^2 + x^3y = 0, \\ u - 3v - x^2 - xy = 0; \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} -u^3 + uv + xy^2 - y = 0, \\ 3u^2 - v + 5x^2 + y^2 = 0; \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} 2u^2 - v^3 - x^2y^2 = 0, \\ 3u - xv + y^2 = 0; \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} -3u + 2v - x^2y = 0, \\ u - 2v^2 + x - 3y^2 = 0; \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} 5u + v - x^2 + 3y = 0, \\ 2u - v^2 - x + 6y^2 = 0; \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} -2u^2 + v^3 - x^4y = 0, \\ uv^2 - v + 4x - 3y = 0; \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} u^2 + 3v - x^2y^3 = 0, \\ 2u - 5v + x - y^2 = 0; \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} -4u + v - 3xy^2 = 0, \\ u - 2v^2 + x^2 - y^3 = 0; \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} -5u^2 - v + 3xy^2 - y = 0, \\ u + 3v^2 - 2x^2 - xy = 0; \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} 6u + v - x^2 - 5y = 0, \\ u^2 - v + 3x + y = 0; \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} -2u + 3v^2 - x^2 + y^2 = 0, \\ 3u - v - 4xy^2 = 0. \end{cases}$$

Задание 8.12

В декартовой прямоугольной системе координат Оху область (D) задана системой неравенств. Найдите область (G) в системе координат О'uv, в которую перейдет (D) в результате преобразования координат

$$\begin{cases} x = x(u; v), \\ y = y(u; v). \end{cases}$$

№ п/п	Неравенства, задающие область (D)	Уравнения преобразования координат
1	$-4 \leq x \leq -2; -1 \leq y - x \leq 2$	$\begin{cases} x = -4u - 2v, \\ y = -u + v \end{cases}$
2	$-3 \leq x \leq 0; 1 \leq 3y - x \leq 3$	$\begin{cases} x = 2u - v, \\ y = u + v \end{cases}$
3	$1 \leq y \leq 5; -1 \leq y - 2x \leq 3$	$\begin{cases} x = u - v, \\ y = 3u + v \end{cases}$

№ п/п	Неравенства, задающие область (D)	Уравнения преобразования координат
4	$-5 \leq x \leq -1; 0 \leq y - 2x \leq 3$	$\begin{cases} x = -4u - v, \\ y = 2u + v \end{cases}$
5	$-6 \leq x \leq -4; -3 \leq 2y + x \leq -1$	$\begin{cases} x = 3u - v, \\ y = 2u + v \end{cases}$
6	$0 \leq y \leq 2; -2 \leq 2y - x \leq 1$	$\begin{cases} x = 2u - v, \\ y = -u + v \end{cases}$
7	$-3 \leq y \leq 1; 2 \leq 2y - 3x \leq 4$	$\begin{cases} x = 2u + 3v, \\ y = u - v \end{cases}$
8	$-3 \leq x \leq -1; -2 \leq y - 3x \leq 1$	$\begin{cases} x = -4u + 2v, \\ y = u + 3v \end{cases}$
9	$0 \leq x \leq 4; -2 \leq 3y - 2x \leq 1$	$\begin{cases} x = 3u + v, \\ y = 2u - v \end{cases}$
10	$0 \leq y \leq 3; -1 \leq 3y - x \leq 2$	$\begin{cases} x = -3u + 2v, \\ y = u - v \end{cases}$
11	$1 \leq y \leq 4; -1 \leq 3y - 2x \leq 2$	$\begin{cases} x = -u + 3v, \\ y = 2u + v \end{cases}$
12	$-2 \leq x \leq 1; -2 \leq 2y + x \leq 1$	$\begin{cases} x = u - 2v, \\ y = 2u + v \end{cases}$
13	$1 \leq x \leq 3; -1 \leq y + x \leq 1$	$\begin{cases} x = -4u + v, \\ y = -3u + v \end{cases}$
14	$1 \leq x \leq 4; -1 \leq 4y - x \leq 2$	$\begin{cases} x = -2u - v, \\ y = u + 3v \end{cases}$
15	$-1 \leq y \leq 2; 1 \leq y + 2x \leq 3$	$\begin{cases} x = 2u + v, \\ y = -u + 3v \end{cases}$
16	$-1 \leq x \leq 2; -2 \leq y + x \leq 2$	$\begin{cases} x = -3u - v, \\ y = u + 2v \end{cases}$
17	$-1 \leq x \leq 3; 1 \leq 3y + x \leq 4$	$\begin{cases} x = 4u - v, \\ y = u + v \end{cases}$

№ п/п	Неравенства, задающие область (D)	Уравнения преобразования координат
18	$-2 \leq y \leq 1; 2 \leq 3y - x \leq 5$	$\begin{cases} x = u - 3v, \\ y = -u + v \end{cases}$
19	$2 \leq y \leq 6; 0 \leq y - x \leq 2$	$\begin{cases} x = -3u + v, \\ y = 2u - v \end{cases}$
20	$0 \leq x \leq 2; -2 \leq y + 2x \leq 1$	$\begin{cases} x = -2u + v, \\ y = 2u + 2v \end{cases}$
21	$2 \leq y \leq 4; -2 \leq 2y - x \leq 1$	$\begin{cases} x = u - v, \\ y = 4u + v \end{cases}$
22	$-1 \leq y \leq 3; -3 \leq y - 2x \leq -1$	$\begin{cases} x = u - 3v, \\ y = -u + v \end{cases}$
23	$-1 \leq y \leq 3; -3 \leq y - 2x \leq -1$	$\begin{cases} x = -u + v, \\ y = 2u + 3v \end{cases}$
24	$-1 \leq y \leq 1; 1 \leq 2y - 3x \leq 4$	$\begin{cases} x = -u + 4v, \\ y = u + 2v \end{cases}$
25	$-2 \leq y \leq 2; -1 \leq 3y + x \leq 3$	$\begin{cases} x = 2u + v, \\ y = 3u + v \end{cases}$
26	$-3 \leq x \leq 1; -1 \leq y - 3x \leq 1$	$\begin{cases} x = u - 2v, \\ y = 2u + v \end{cases}$
27	$2 \leq y \leq 5; -1 \leq 3y + x \leq 2$	$\begin{cases} x = -2u + 3v, \\ y = u - v \end{cases}$
28	$1 \leq y \leq 5; 0 \leq 2y + x \leq 3$	$\begin{cases} x = 3u - 2v, \\ y = u - v \end{cases}$
29	$1 \leq y \leq 4; -3 \leq y + 2x \leq -1$	$\begin{cases} x = 2u - v, \\ y = u + v \end{cases}$
30	$-2 \leq y \leq 3; -1 \leq 2y + x \leq 2$	$\begin{cases} x = -u - v, \\ y = 3u + v \end{cases}$

Задание 8.13

В декартовой прямоугольной системе координат Oxy область (D) задана системой неравенств. Найдите область (G) в системе координат $O'u'v'$, в которую перейдет (D) в результате преобразования координат

$$\begin{cases} x = x(u; v), \\ y = y(u; v). \end{cases}$$

№ п/п	Неравенства, задающие область (D)	Уравнения преобразования координат
1	$x \geq -3; y \geq -1; x + y \leq 1$	$\begin{cases} x = u^2 + v^2, \\ y = u - v \end{cases}$
2	$x \leq -2; y \leq 2; x - y \leq 0$	$\begin{cases} x = u^2 + v^2, \\ y = u - 2v \end{cases}$
3	$x \leq 1; y \geq -2; x + 3y \leq 0$	$\begin{cases} x = u + 2v, \\ y = u^2 + v^2 \end{cases}$
4	$x \geq -3; y \geq 1; 2x + y \leq 1$	$\begin{cases} x = 2u - v, \\ y = u^2 + v^2 \end{cases}$
5	$x \leq -1; y \leq 1; 2x + y \geq -2$	$\begin{cases} x = u^2 + v^2, \\ y = u + 2v \end{cases}$
6	$x \leq 3; y \geq -1; 2x - y \geq 1$	$\begin{cases} x = u + v, \\ y = u^2 + v^2 \end{cases}$
7	$x \geq -3; y \leq 2; x - y \leq 1$	$\begin{cases} x = u^2 + v^2, \\ y = u - v \end{cases}$
8	$x \geq -2; y \geq 1; x - y \geq 2$	$\begin{cases} x = 2u + v, \\ y = u^2 + v^2 \end{cases}$
9	$x \geq 2; y \leq 2; 2x - y \leq 3$	$\begin{cases} x = u^2 + v^2, \\ y = u + v \end{cases}$
10	$x \leq 1; y \geq -1; x - 2y \leq 4$	$\begin{cases} x = u + v, \\ y = u^2 + v^2 \end{cases}$
11	$x \leq 3; y \leq 1; x + 2y \leq 6$	$\begin{cases} x = u + 2v, \\ y = u^2 + v^2 \end{cases}$

№ п/п	Неравенства, задающие область (D)	Уравнения преобразования координат
12	$x \geq -1; y \leq 2; x - y \leq 2$	$\begin{cases} x = u^2 + v^2, \\ y = u - 2v \end{cases}$
13	$x \geq -3; y \geq -2; x + 2y \leq -1$	$\begin{cases} x = u - 2v, \\ y = u^2 + v^2 \end{cases}$
14	$x \geq -2; y \leq 1; 3x - y \leq 0$	$\begin{cases} x = u^2 + v^2, \\ y = u - v \end{cases}$
15	$x \leq 2; y \geq -1; x - 2y \geq 2$	$\begin{cases} x = 3u + v, \\ y = u^2 + v^2 \end{cases}$
16	$x \geq 3; y \geq -1; 2x + y \leq 6$	$\begin{cases} x = u^2 + v^2, \\ y = u - v \end{cases}$
17	$x \geq -3; y \leq 1; x - y \leq 0$	$\begin{cases} x = u^2 + v^2, \\ y = u + 2v \end{cases}$
18	$x \geq -2; y \geq -2; x + y \leq 1$	$\begin{cases} x = 3u - v, \\ y = u^2 + v^2 \end{cases}$
19	$x \leq 2; y \leq 3; x + y \leq 2$	$\begin{cases} x = u - v, \\ y = u^2 + v^2 \end{cases}$
20	$x \geq -1; y \geq -2; 2x + y \leq 0$	$\begin{cases} x = u - 3v, \\ y = u^2 + v^2 \end{cases}$
21	$x \leq -3; y \geq -2; x - y \geq -2$	$\begin{cases} x = u + v, \\ y = u^2 + v^2 \end{cases}$
22	$x \geq 1; y \leq 2; 3x - y \leq 2$	$\begin{cases} x = u^2 + v^2, \\ y = u - v \end{cases}$
23	$x \leq -1; y \geq 0; 2x - y \geq -3$	$\begin{cases} x = 3u + v, \\ y = u^2 + v^2 \end{cases}$
24	$x \geq 2; y \geq -2; 2x + y \leq 3$	$\begin{cases} x = u^2 + v^2, \\ y = u - 2v \end{cases}$

№ п/п	Неравенства, задающие область (D)	Уравнения преобразования координат
25	$x \geq -2; y \leq 1; 2x - y \leq -1$	$\begin{cases} x = u^2 + v^2, \\ y = u - 2v \end{cases}$
26	$x \leq -1; y \geq -1; x - 2y \geq 0$	$\begin{cases} x = u - 2v, \\ y = u^2 + v^2 \end{cases}$
27	$x \geq 1; y \leq 3; x - y \leq 1$	$\begin{cases} x = u^2 + v^2, \\ y = u + 2v \end{cases}$
28	$x \geq -2; y \geq -1; 2x + y \leq 1$	$\begin{cases} x = u - 2v, \\ y = u^2 + v^2 \end{cases}$
29	$x \geq 2; y \leq 1; 2x - y \leq 4$	$\begin{cases} x = u^2 + v^2, \\ y = 2u - v \end{cases}$
30	$x \geq 3; y \geq -2; x + 2y \leq 1$	$\begin{cases} x = u^2 + v^2, \\ y = u + 2v \end{cases}$

Задание 8.14

Найдите точки экстремума функции $u(x; y)$.

- 1) $u(x; y) = x^2 - 2x - y^3 + y^2 + y - 5;$
- 2) $u(x; y) = -x^3 + 4x^2 + 3x + y^2 + 4y - 9;$
- 3) $u(x; y) = -x^2 - 6x - 3y^3 + 3y^2 + 3y - 4;$
- 4) $u(x; y) = x^3 + x^2 - x + y^2 + y + 7;$
- 5) $u(x; y) = x^2 + 6x + y^3 + 4y^2 - 3y + 5;$
- 6) $u(x; y) = 3x^3 - 3x^2 - 3x + 5y^2 - 10y + 2;$
- 7) $u(x; y) = x^2 - 3x + 2y^3 - 4y^2 + 2y - 4;$
- 8) $u(x; y) = -2x^3 - 2x^2 + 2x + 3y^2 - 6y - 1;$
- 9) $u(x; y) = 2x^2 + 4x + 9y^3 - 3y^2 - y + 1;$
- 10) $u(x; y) = x^3 + 4x^2 - 4x + y^2 + 2y + 1;$
- 11) $u(x; y) = x^2 - 8x + 2y^3 + 2y^2 - 2y + 7;$
- 12) $u(x; y) = -x^3 + 3x^2 + 9x + 3y^2 - y - 4;$

- 13) $u(x; y) = x^2 - x - y^3 - 4y^2 - 4y + 3;$
- 14) $u(x; y) = x^2 - x - y^3 - 4y^2 - 4y + 3;$
- 15) $u(x; y) = x^2 - x + 15y^3 - 2y^2 - y - 6;$
- 16) $u(x; y) = -2x^3 + 4x^2 - 2x + y^2 - 4y + 1;$
- 17) $u(x; y) = 3x^2 - 6x - y^3 + 2y^2 + 4y + 10;$
- 18) $u(x; y) = -x^3 - 2x^2 + 15x + y^2 + 3y - 1;$
- 19) $u(x; y) = 2x^2 + 4x + 4y^3 + 4y^2 + y - 1;$
- 20) $u(x; y) = -5x^3 + 2x^2 + 3x - 2y^2 + y - 11;$
- 21) $u(x; y) = x^2 - x - y^3 + 5y^2 + 8y - 5;$
- 22) $u(x; y) = 3x^3 - 5x^2 + x + y^2 - 3y + 8;$
- 23) $u(x; y) = -x^2 + 4x + 5y^3 + 2y^2 - 3y + 9;$
- 24) $u(x; y) = 8x^3 - 5x^2 - x + y^2 - 4y + 1;$
- 25) $u(x; y) = x^2 + 3x + y^3 + 5y^2 + 3y - 10;$
- 26) $u(x; y) = -3x^3 - 2x^2 + 5x + 2y^2 + 8y + 4;$
- 27) $u(x; y) = x^2 + x + 4y^3 + 5y^2 - 2y + 3;$
- 28) $u(x; y) = -x^3 + 5x^2 - 3x + y^2 - 6y + 4;$
- 29) $u(x; y) = 4x^2 - 8x - 3y^3 + 2y^2 + 5y - 12;$
- 30) $u(x; y) = -4x^3 - 5x^2 + 2x + 2y^2 - 4y - 1.$

Задание 8.15

Найдите точки экстремума функции $u(x; y; z)$.

- 1) $u(x; y; z) = x^2 - 3x + 2y^2 - y - z^3 - 5z^2 - 3z - 4;$
- 2) $u(x; y; z) = -3x^3 - 2x^2 + 5x - y^2 - 7y + z^2 + z - 2;$
- 3) $u(x; y; z) = x^2 + 6x - 4y^3 + 5y^2 + 2y + z^2 + z - 6;$
- 4) $u(x; y; z) = 3x^2 - 6x + y^2 + 2y - z^3 + z^2 + z - 7;$
- 5) $u(x; y; z) = -x^3 + 4x^2 - 3x + y^2 - 4y + z^2 + 3z - 2;$
- 6) $u(x; y; z) = x^2 + 4x - 3y^3 + 3y^2 + 3y - z^2 - 5z + 1;$
- 7) $u(x; y; z) = x^2 + 10x - y^2 - 4y + 15z^3 - 2z^2 - z + 3;$
- 8) $u(x; y; z) = x^2 - 7x + 4y^3 - 2y^2 - y + 2z^2 - 6z + 1;$

- 9) $u(x; y; z) = -x^3 + 4x^2 - 4x + y^2 - 3y + z^2 + z - 2;$
 10) $u(x; y; z) = 2x^2 - 4x + y^3 - 5y^2 + 3y - z^2 - 2z + 3;$
 11) $u(x; y; z) = x^2 + 3x - y^2 + y + 3z^3 + 2z^2 - 5z + 4;$
 12) $u(x; y; z) = 4x^3 - 5x^2 - 2x + 2y^2 - 6y - z^2 - 8z - 5;$
 13) $u(x; y; z) = x^2 + x + 2y^3 - 4y^2 + 2y - z^2 - 5z + 1;$
 14) $u(x; y; z) = x^2 - 3x - 2y^2 + 5y - 2z^3 - 2z^2 + 2z - 6;$
 15) $u(x; y; z) = 9x^3 - 3x^2 - x + 2y^2 - 8y + z^2 + z - 4;$
 16) $u(x; y; z) = x^2 - 2x - 2y^3 - 4y^2 - 2y + z^2 + 3z - 1;$
 17) $u(x; y; z) = 3x^2 - 6x - y^2 - y - z^3 + 2z^2 + 4z - 7;$
 18) $u(x; y; z) = -x^3 + 2x^2 + 15x + y^2 + y - 3z^2 + 6z - 9;$
 19) $u(x; y; z) = 2x^2 - 6x - y^2 - 2y + z^3 + 4z^2 + 4z - 3;$
 20) $u(x; y; z) = 2x^2 - 8x + 5y^3 - 2y^2 - 3y - z^2 + 4z - 1;$
 21) $u(x; y; z) = x^2 - 2x + y^2 + 3y + 8z^3 + 5z^2 - z + 4;$
 22) $u(x; y; z) = x^3 - x^2 - x - y^2 + y + 2z^2 - 8z + 5;$
 23) $u(x; y; z) = x^2 + 5x + y^3 + 4y^2 - 3y - z^2 - 6z + 1;$
 24) $u(x; y; z) = x^2 - x + y^2 - 3y + 3z^3 - 3z^2 - 3z + 5;$
 25) $u(x; y; z) = 3x^3 - 5x^2 + x - 2y^2 + 6y - z^2 + 5z - 1;$
 26) $u(x; y; z) = 3x^2 - 6x - y^3 + 3y^2 + 9y - z^2 - 4z + 2;$
 27) $u(x; y; z) = x^2 + x - y^2 - 4y + 4z^3 - 4z^2 + z + 3;$
 28) $u(x; y; z) = -5x^3 - 2x^2 + 3x - y^2 + 3y - z^2 - z + 3;$
 29) $u(x; y; z) = x^2 - 4x - y^3 - 5y^2 + 8y + 2z^2 - 8z - 1;$
 30) $u(x; y; z) = 2x^3 + 2x^2 - 2x + y^2 + 4y - z^2 + z - 1.$

Задание 8.16

Для нечетных номеров варианта: в эллипсоид $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема. Для четных номеров варианта: в тело (Т), ограниченное эллиптическим параболоидом $z = c^2 - (a^2x + b^2y^2)$ и плоскостью $z = 0$, вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема.

№	a	b	c
1	2	3	6
2	1	2	5
3	3	1	6
4	2	5	6
5	2	4	5
6	3	2	1
7	3	4	6
8	2	3	4
9	4	1	6
10	5	4	2
11	2	1	5
12	4	3	5
13	5	3	1
14	6	1	3
15	3	2	4
16	6	4	1
17	2	1	3
18	6	4	2
19	4	5	3
20	4	1	5
21	2	1	4
22	1	3	4
23	6	1	5
24	3	2	5
25	4	6	2
26	5	1	6
27	2	5	3
28	2	1	6
29	3	1	4
30	1	3	5

Задание 8.17

Найдите условный экстремум функции $u(x; y)$ при заданном уравнении связи.

- 1) $u(x; y) = 4x^2 + 2xy + y^2 + 3x - y + 1$ при $2x + 3y + 1 = 0$;
- 2) $u(x; y) = -3x^2 + 4xy - 2y^2 - 2x + 3y + 6$ при $4x - y + 2 = 0$;
- 3) $u(x; y) = x^2 + 2xy + 2y^2 + 4x + 3y + 7$ при $-2x + y - 2 = 0$;

- 4) $u(x; y) = -4x^2 + xy - 4y^2 + 3x - 2y + 6$ при $-2x + 2y + 1 = 0$;
- 5) $u(x; y) = 2x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 3y + 8$ при $2x - y + 3 = 0$;
- 6) $u(x; y) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 3x - 2y + 5$ при $x - y + 5 = 0$;
- 7) $u(x; y) = 4x^2 + xy + 2y^2 + 2x + y + 3$ при $x - y + 2 = 0$;
- 8) $u(x; y) = 3x^2 + 2xy + y^2 - 2x + y + 3$ при $x - 2y + 3 = 0$;
- 9) $u(x; y) = -2x^2 + 4xy - 2y^2 + 6x + 2y + 5$ при $-2x + y - 3 = 0$;
- 10) $u(x; y) = -4x^2 - xy + y^2 + x + 2y - 1$ при $x + 3y - 1 = 0$;
- 11) $u(x; y) = 2x^2 + xy + 2y^2 - x + 2y + 4$ при $x + 3y + 5 = 0$;
- 12) $u(x; y) = x^2 - 2xy + 4y^2 - 4x + 2y + 9$ при $2x + y + 1 = 0$;
- 13) $u(x; y) = 3x^2 - 2xy + 2y^2 + 4x - y + 6$ при $2x + y + 4 = 0$;
- 14) $u(x; y) = 2x^2 - 4xy + 4y^2 + 3x - 2y + 6$ при $-2x + y - 1 = 0$;
- 15) $u(x; y) = -2x^2 + 2xy - y^2 + 4x + y + 3$ при $-x + y + 2 = 0$;
- 16) $u(x; y) = 4x^2 + 4xy + 2y^2 + x + 2y - 1$ при $-x + 2y + 4 = 0$;
- 17) $u(x; y) = 3x^2 - 4xy + 4y^2 + 2x + y - 3$ при $-2x - y + 6 = 0$;
- 18) $u(x; y) = -x^2 + 2xy - 4y^2 + 6x + 4y + 1$ при $-x + 3y + 2 = 0$;
- 19) $u(x; y) = -4x^2 - 4xy + 2y^2 + 2x + 8y + 5$ при $2x - y + 6 = 0$;
- 20) $u(x; y) = 3x^2 + 2xy - 2y^2 + 4x + y + 5$ при $2x + 3y - 1 = 0$;
- 21) $u(x; y) = -2x^2 + 8xy - 4y^2 + 3x + 2y + 4$ при $2x - y - 2 = 0$;
- 22) $u(x; y) = 3x^2 + 2xy + 3y^2 + x - 2y - 4$ при $-3x + y + 5 = 0$;
- 23) $u(x; y) = 2x^2 + 4xy + 3y^2 - 2x + 4y + 1$ при $2x - y + 3 = 0$;
- 24) $u(x; y) = -x^2 + 4xy - 6y^2 + 3x - 2y - 7$ при $x - y + 4 = 0$;
- 25) $u(x; y) = 4x^2 + 2xy + 4y^2 - 2x - 4y + 2$ при $3x + y - 1 = 0$;
- 26) $u(x; y) = -3x^2 + 2xy - y^2 + x - 5y + 2$ при $-2x - y + 3 = 0$;
- 27) $u(x; y) = 2x^2 - 2xy + 3y^2 + 4x + y - 2$ при $x - 3y + 1 = 0$;
- 28) $u(x; y) = 3x^2 + 4xy - 3y^2 + 2x - 2y + 4$ при $5x + y - 2 = 0$;
- 29) $u(x; y) = -2x^2 + 4xy - 6y^2 + 2x - 2y + 4$ при $x + 3y + 2 = 0$;
- 30) $u(x; y) = x^2 + 2xy + 3y^2 - 3x - 2y + 8$ при $x - y + 3 = 0$.

Задание 8.18

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $u(x; y)$ в области (D) , заданной указанными неравенствами.

1) $u(x; y) = -4x^2 - xy + 2y^2 + 3x + 2y + 4, (D): x \geq -3, y \geq -2, x + y \leq 12;$

2) $u(x; y) = 3x^2 + 2xy - y^2 + 4x - 2y + 2, (D): x \leq 2, y \leq 3, x + y \geq 1;$

3) $u(x; y) = 2x^2 - xy + 2y^2 + 2x + 3y + 1, (D): x \leq 2, y \geq -1, x - y \geq 1;$

4) $u(x; y) = 4x^2 + 2xy - y^2 + 2x + y - 1, (D): x \geq -2, y \geq -1, x + y \leq 2;$

5) $u(x; y) = -3x^2 - 2xy + y^2 + 4x + y - 2, (D): x \geq -1, y \geq -2, x + y \leq 1;$

6) $u(x; y) = -2x^2 + 3xy + 2y^2 + 4x + y - 1, (D): x \leq 1, y \leq 2, x + y \geq -1;$

7) $u(x; y) = -4x^2 - 2xy - y^2 + 2x - y + 2, (D): x \geq -2, y \geq -2, x + y \leq -1;$

8) $u(x; y) = 3x^2 - xy - 2y^2 + 2x - 2y - 1, (D): x \leq 1, y \geq -1, x - y \geq -2;$

9) $u(x; y) = -x^2 + xy + 2y^2 + 4x + y - 2, (D): x \leq 2, y \leq 2, x + y \geq 1;$

10) $u(x; y) = 4x^2 + 2xy + 4y^2 + x + 6y - 1, (D): x \geq -1, y \leq 3, -x + y \geq -1;$

11) $u(x; y) = -3x^2 - xy + y^2 + 2x + 4y + 1, (D): x \geq -2, y \leq 1, x - y \leq 2;$

12) $u(x; y) = x^2 + xy - 2y^2 + 4x + y - 1, (D): x \geq 0, y \geq 2, x + y \leq 4;$

13) $u(x; y) = -4x^2 + xy + 3y^2 - x - 2y + 3, (D): x \geq 1, y \geq -1, x + y \leq 2;$

14) $u(x; y) = -3x^2 + 2xy + 3y^2 + 2x - 4y + 1, (D): x \geq -2, y \leq 2, x - y \leq 1;$

15) $u(x; y) = -x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 2y + 3, (D): x \leq 3, y \geq -1, x - y \geq 1;$

16) $u(x; y) = 4x^2 + xy + 3y^2 + 2x - 2y + 3, (D): x \leq 1, y \leq 3, x + y \geq 1;$

17) $u(x; y) = -2x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 2y + 1, (D): x \leq 3, y \geq -1, x - y \geq 2;$

18) $u(x; y) = x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + 6y + 1, (D): x \geq -3, y \leq 1, x - y \leq 2;$

19) $u(x; y) = -4x^2 + 2xy - 2y^2 + 3x + y + 4, (D): x \leq 2, y \leq 1, x + y \geq -1;$

20) $u(x; y) = 3x^2 - xy - 4y^2 + 2x + 2y + 1, (D): x \geq 1, y \geq 1, x + y \leq 3;$

21) $u(x; y) = 2x^2 + xy + 2y^2 + 4x + 2y - 1, (D): x \geq -2, y \leq 3, x - y \leq 1;$

22) $u(x; y) = 3x^2 + 2xy - y^2 + x + 2y + 4, (D): x \leq 3, y \leq 1, x + y \geq 2;$

23) $u(x; y) = 2x^2 - 2xy + 4y^2 + x + 6y + 2, (D): x \geq -1, y \geq -2, x - y \geq -1;$

24) $u(x; y) = x^2 + 2xy + 2y^2 + x + 3y - 2, (D): x \leq 2, y \geq -1, x - y \geq 5;$

25) $u(x; y) = 3x^2 + xy + 2y^2 + 2x + 4y - 1, (D): x \geq -1, y \leq 2, x - y \leq 2;$

26) $u(x; y) = 2x^2 + xy + 2y^2 + 4x + y - 1, (D): x \leq 2, y \leq 3, x + y \geq 1;$

$$27) u(x; y) = 2x^2 + 4xy - 2y^2 + x + 2y - 3, (D): x \geq -3, y \geq -1, x - y \geq -4;$$

$$28) u(x; y) = 4x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x - 2y + 1, (D): x \leq 2, y \geq -2, x - y \geq 1;$$

$$29) u(x; y) = x^2 + 2xy - 4y^2 + 2x - 2y + 1, (D): x \geq 1, y \leq 3, x - y \leq 2;$$

$$30) u(x; y) = -x^2 - xy + 4y^2 + 2x - 2y + 1, (D): x \leq 1, y \leq 3, x + y \geq -1.$$

IX. КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

1. Двойной интеграл

Пусть функция $f(x,y)$ определена в замкнутой ограниченной области $(D) \subset \mathbb{R}^2$. Разобьем эту область на частичные области $(D_1), (D_2), \dots, (D_n)$, площади которых равны $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$ соответственно. Обозначим через d_k диаметр области (D_k) : $d_k = \sup \{|M'M''|; M', M'' \in (D_k)\}$. Число $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} d_k$ называется диаметром разбиения. В каждой частичной области (D_k) возьмем по точке $M_k(x_k, y_k)$. Выражение $G = \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \Delta S_k$ называется интегральной суммой функции $f(x,y)$ по области (D) . Если существует конечный предел интегральных сумм G при $\lambda \rightarrow 0$, предел, не зависящий ни от способа разбиения, ни от выбора точек M_k , то этот предел называется двойным интегралом от функции $f(x,y)$ по области (D) и обозначается $\iint_{(D)} f(x,y) dx dy$.

$$\iint_{(D)} f(x,y) dx dy = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k, y_k) \cdot \Delta S_k.$$

При этом говорят, что $f(x,y)$ интегрируема в (D) .

Для интегрируемости $f(x,y)$ в ограниченной замкнутой области (D) достаточно, чтобы $f(x,y)$ была непрерывна в (D) .

Теорема 1. Если $f(x,y)$, $g(x,y)$ интегрируемы в (D) , то $k_1 f(x,y) + k_2 g(x,y)$ также интегрируема в (D) и при этом

$$\iint_{(D)} (k_1 f(x,y) + k_2 g(x,y)) dx dy = k_1 \iint_{(D)} f(x,y) dx dy + k_2 \iint_{(D)} g(x,y) dx dy.$$

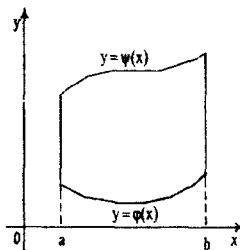
Теорема 2. Если $f(x,y)$ интегрируема в области (D) , то $(D) = (D_1) \cup (D_2)$, и пусть площадь множества $(D_1) \cap (D_2)$ равна нулю.

Тогда

$$\iint_{(D)} f(x,y) dx dy = \iint_{(D_1)} f(x,y) dx dy + \iint_{(D_2)} f(x,y) dx dy.$$

Вычисление двойного интеграла сводится к вычислению повторного интеграла. Если $f(x,y)$ интегрируема в (D) и (D) ограничена непрерывными линиями $y = \varphi(x)$, $y = \psi(x)$, $x = a$, $x = b$, $\varphi(x) \leq \psi(x)$ при $a \leq x \leq b$, то

$$\iint_{(D)} f(x,y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y) dy \right) dx.$$

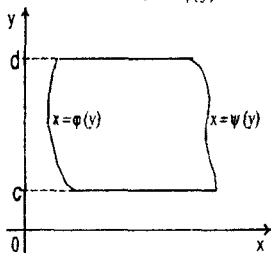


Правая часть последнего равенства обычно записывается иначе:

$$\int_a^b dx \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x; y) dy.$$

Иногда удобно производить внешнее интегрирование по y , внутреннее – по x : если (D) ограничена линиями $x = \varphi(y)$, $x = \psi(y)$, $y = c$, $y = d$, $\varphi(y) \leq \psi(y)$ при $y \in [c, d]$, то

$$\iint_{(D)} f(x; y) dx dy = \int_c^d dy \int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x; y) dx.$$



В случае, если (D) имеет сложный вид, область (D) разбивают на простые подобласти и применяют теорему 2.

Пример 1. Область (D) задана неравенствами $y \geq x^2 - 4x$,

$$y \leq \sqrt{4x - x^2};$$

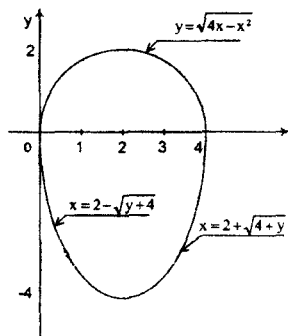
а) построить область (D) ;

б) записать двойной интеграл $\iint_{(D)} f(x; y) dx dy$ в виде повторного;

в) изменить порядок интегрирования в повторном интеграле.

Решение. а) Уравнение $y = x^2 - 4x$ определяет параболу, уравнение $y = \sqrt{4x - x^2}$ – верхнюю полуокружность окружности

$y^2 = 4x - x^2$ или $(x - 2)^2 + y^2 = 4$. Сделаем рисунок. Область (D) заключена между параболой и полуокружностью.



б) Найдем пределы изменения переменного x – проекции (D) на ось Ox .

Для этого составим и решим уравнение $x^2 - 4x = \sqrt{4x - x^2}$.

Отсюда находим $x_1 = 0$, $x_2 = 4$. Таким образом, x пробегает все значения из отрезка $[0; 4]$. При каждом фиксированном значении $x_0 \in [0; 4]$ прямая $x = x_0$ пересекает область (D) по отрезку, тянущемуся от точки параболы с абсциссой x_0 до точки полуокружности с той же абсциссой. Поэтому область (D) определяется следующей системой неравенств:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 4, \\ x^2 - 4x \leq y \leq \sqrt{4x - x^2}. \end{cases}$$

Теперь мы готовы записать двойной интеграл в виде повторного:

$$\iint_{(D)} f(x; y) dx dy = \int_0^4 dx \int_{x^2 - 4x}^{\sqrt{4x - x^2}} f(x; y) dy.$$

в) Изменим порядок интегрирования, приняв в качестве внешнего переменного y , внутреннего – x . Составим уравнения линий, ограничивающих (D), выразив x через y : $x = 2 - \sqrt{4 - y^2}$ – левая полуокружность, $x = 2 + \sqrt{4 - y^2}$ – правая полуокружность, $x = 2 - \sqrt{4 + y}$ – левая ветвь параболы, $x = 2 + \sqrt{4 + y}$ – правая ветвь параболы. Переменное y меняется в целом от -4 до 2 . Покуда y меняется в пределах от -4 до 0 , x меняется от абсциссы соответствующей точки левой ветви параболы $x = 2 - \sqrt{4 + y}$ до

абсциссы соответствующей точки правой ветви параболы $x = 2 + \sqrt{4 + y}$. Если же y меняется в пределах отрезка $[0; 2]$, то x меняется от абсциссы соответствующей точки левой полуокружности $x = 2 - \sqrt{4 - y^2}$ до абсциссы соответствующей точки правой полуокружности $x = 2 + \sqrt{4 - y^2}$. Таким образом, если считать область (D) разбитой на две части: (D_1) – ниже от Ox и (D_2) – выше от Ox , то пределы изменений переменных можно выразить следующими неравенствами:

$$\text{для } (D_1): \begin{cases} -4 \leq y \leq 0, \\ 2 - \sqrt{4 + y} \leq x \leq 2 + \sqrt{4 + y}; \end{cases}$$

$$\text{для } (D_2): \begin{cases} 0 \leq y \leq 2, \\ 2 - \sqrt{4 - y^2} \leq x \leq 2 + \sqrt{4 - y^2}. \end{cases}$$

Эти соображения приводят к следующему представлению двойного интеграла:

$$\iint_{(D)} f(x; y) dx dy = \int_{-4}^0 dy \int_{2 - \sqrt{4 + y}}^{2 + \sqrt{4 + y}} f(x; y) dx + \int_0^2 dy \int_{2 - \sqrt{4 - y^2}}^{2 + \sqrt{4 - y^2}} f(x; y) dx.$$

Пример 2. Вычислить двойной интеграл $\iint_{(D)} xy dx dy$, где (D) –

область из примера 1.

Решение. Имеем

$$\begin{aligned} \iint_{(D)} xy dx dy &= \int_0^4 dx \int_{x^2 - 4x}^{\sqrt{4x - x^2}} xy dy = \int_0^4 x \cdot \left(\frac{1}{2} y^2 \right) \Big|_{y=x^2 - 4x}^{\sqrt{4x - x^2}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^4 x(4x - x^2 - (x^2 - 4x)^2) dx = \frac{1}{2} \int_0^4 (4x^2 - 17x^3 + 8x^4 - x^5) dx = -\frac{352}{15}. \end{aligned}$$

2. Замена переменных в двойном интеграле

Пусть системы уравнений

$$\begin{cases} x = x(u; v), \\ y = y(u; v) \end{cases}$$

осуществляют взаимно однозначное соответствие между областью (D) плоскости Oxy и областью (G) плоскости Ouv , и пусть при этом функции

$$x(u, v), y(u, v) \text{ дифференцируемы и якобиан } J(u, v) = \frac{D(x; y)}{D(u, v)}$$

отличен от 0. Тогда имеет место формула замены переменных в двойном интеграле

$$\iint_{(D)} f(x; y) dx dy = \iint_{(G)} f(x(u; v); y(u; v)) \cdot |J(u; v)| du dv. \quad (1)$$

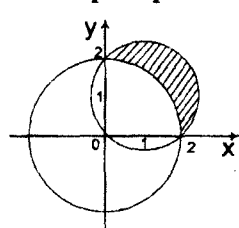
Этой формулой пользуются в тех случаях, когда область (G) имеет более простую форму, чем (D). В частности, при переходе в полярную систему координат

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \end{cases}$$

$$J(u; v) = \rho \text{ и}$$

$$\iint_{(D)} f(x; y) dx dy = \iint_{(G)} f(\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi) \rho d\varphi d\rho. \quad (2)$$

Пример 3. Перейти к полярным координатам и вычислить



двойной интеграл $\iint_{(D)} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, где (D) задано неравенствами $x^2 + y^2 \leq 2x + 2y$, $x^2 + y^2 \geq 4$.

Решение. Построим область (D) в прямоугольной системе координат.

Неравенство $x^2 + y^2 \leq 2x + 2y$ равносильно неравенству $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 2$. Поэтому область (D) интегрирования является множество точек плоскости, находящихся внутри окружности $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ и вне окружности $x^2 + y^2 = 4$ (заштриховано). Осуществим переход к полярной системе координат:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi. \end{cases}$$

Тогда область (D) перейдет в область (G), задаваемую системой неравенств

$$\begin{cases} \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi \leq 2\rho \cos \varphi + 2\rho \sin \varphi, \\ \rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi \geq 4; \end{cases} \quad \begin{cases} \rho^2 \leq 2\rho(\cos \varphi + \sin \varphi), \\ \rho^2 \geq 4; \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} \rho \leq 2(\cos \varphi + \sin \varphi), \\ \rho \geq 2. \end{cases}$$

Последняя система равносильна двойному неравенству $2 \leq \rho \leq 2(\cos \varphi + \sin \varphi)$.

Переменное φ меняется в пределах от 0 до $\pi/2$, а ρ меняется от 2 до $2(\cos \varphi + \sin \varphi)$:

$$\begin{cases} 0 \leq \varphi \leq \pi/2, \\ 2 \leq \rho \leq 2(\cos \varphi + \sin \varphi). \end{cases}$$

Применяя формулу (2), получим

$$\begin{aligned} \iint_{(D)} \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \iint_{(G)} \frac{1}{\sqrt{\rho^2}} \rho d\varphi d\rho = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_2^{2(\cos \varphi + \sin \varphi)} d\rho = 2 \int_0^{\pi/2} (\cos \varphi + \sin \varphi - 1) d\varphi = \\ &= 2(\sin \varphi - \cos \varphi - \varphi) \Big|_0^{\pi/2} = 4 - \pi. \end{aligned}$$

Пример 4. Вычислить двойной интеграл $\iint_{(D)} y \operatorname{tg} x dx dy$, где область (D) задана

неравенствами $0 < x < \pi/2$, $\operatorname{tg} x \leq y \leq 2 \operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x \leq y \leq 3 \operatorname{ctg} x$, сделав надлежащую замену переменных.

Решение. Построим область (D) в декартовой прямоугольной системе координат. Сделаем замену переменных

$$\begin{cases} u = y \operatorname{tg} x, \\ v = y \operatorname{ctg} x. \end{cases}$$

Из этой системы уравнений выразим x и y через u и v :

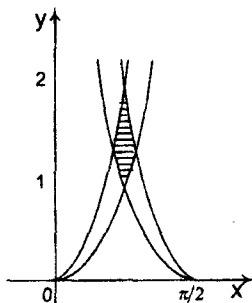
$$\begin{cases} x = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{v}{u}}, \\ y = \sqrt{uv}. \end{cases}$$

Найдем якобиан преобразования $J = \frac{D(x, y)}{D(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}$,

где $x(u, v) = \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{v}{u}}$, $y(u, v) = \sqrt{uv}$:

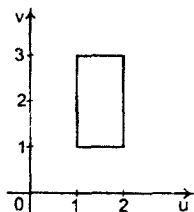
$$J(u; v) = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2(u+v)} \cdot \sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2(u+v)} \cdot \sqrt{\frac{u}{v}} \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{v}{u}} & \frac{1}{2} \sqrt{\frac{u}{v}} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2(u+v)}.$$

Область интегрирования (D) в системе Oxy переходит в системе $O'uv$ область (G), задаваемую неравенствами



$$\begin{cases} 1 \leq u \leq 2, \\ 1 \leq v \leq 3, \end{cases}$$

т.е. (G) оказывается прямоугольником.



Применяя формулу (1), получим

$$\iint_{(D)} y \operatorname{tg} x \, dx \, dy = -\frac{1}{2} \iint_G \frac{v}{u+v} \, du \, dv = -\frac{1}{2} \int_1^3 v \, dv \int_1^2 \frac{du}{u+v} = -\frac{1}{2} \int_1^3 v \ln \frac{v+2}{v+1} \, dv =$$

$$= \left[\begin{array}{l} \text{интегрируем} \\ \text{по частям} \end{array} \right] = -\frac{v^2}{4} \ln \frac{v+2}{v+1} \Big|_1^3 + \frac{1}{4} \int_1^3 v^2 \left(\frac{1}{v+2} - \frac{1}{v+1} \right) \, dv = -\frac{9}{4} \ln \frac{5}{4} +$$

$$+ \frac{1}{4} \ln \frac{3}{2} - \frac{1}{4} \int_1^3 \left(1 - \frac{3\left(v + \frac{3}{2}\right) - \frac{5}{2}}{\left(v + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}} \right) \, dv = -\frac{9}{4} \ln \frac{5}{4} + \frac{1}{4} \ln \frac{3}{2} -$$

$$- \frac{1}{4} \left(v - \frac{3}{2} \ln(v^2 + 3v + 2) + \frac{5}{2} \ln \frac{v+1}{v+2} \right) \Big|_1^3 = \frac{1}{4} (16 \ln 2 - 5 \ln 5 - 3 \ln 3 - 2).$$

3. Приложения двойного интеграла

Вычисление площадей плоских фигур. В декартовой прямоугольной системе координат площадь S плоской фигуры (D) выражается интегралом $S = \iint_{(D)} dx \, dy$.

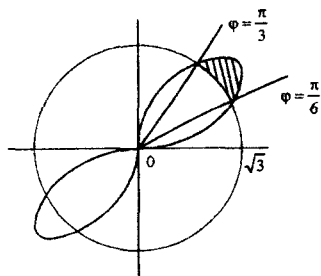
При переходе к новой системе координат $x = x(u; v)$, $y = y(u; v)$ формула примет вид $S = \iint_{(G)} |J(u; v)| \, du \, dv$, где $J(u; v) = \frac{D(x; y)}{D(u; v)}$,

в частности, при переходе к полярным координатам

$$S = \iint \rho \, d\rho \, d\varphi. \quad (3)$$

Пример 5. Найти площадь фигуры, заданной неравенствами $\sqrt{3} \leq \rho \leq 2 \sin 2\varphi$, $0 \leq \varphi \leq \pi/2$ в полярных координатах.

Решение. Неравенство $\rho \geq \sqrt{3}$ определяет внешность круга с центром в начале координат и радиусом $\sqrt{3}$. Неравенство $\rho \leq 2 \sin 2\varphi$ задает внутреннюю часть двухлепестковой розы. Поэтому наша фигура ограничена вышеуказанной окружностью и лепестком двухлепестковой розы, расположенной в первой четверти.



Найдем пределы изменения φ . Для этого решим уравнение $\sqrt{3} = 2 \sin 2\varphi$. На отрезке $[0; \pi/2]$ это уравнение имеет два решения: $\varphi_1 = \pi/6$ и $\varphi_2 = \pi/3$. Поэтому область (G) в полярной системе координат определяется неравенствами

$$\begin{cases} \pi/6 \leq \varphi \leq \pi/3, \\ \sqrt{3} \leq \rho \leq 2 \sin 2\varphi. \end{cases}$$

Применяя формулу (3), получим

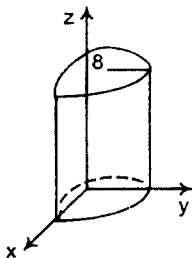
$$\begin{aligned} S &= \iint_{(G)} \rho d\varphi d\rho = \int_{\pi/6}^{\pi/3} d\varphi \int_{\sqrt{3}}^{2 \sin 2\varphi} \rho d\rho = \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/3} \rho^2 \Big|_{\rho=\sqrt{3}}^{2 \sin 2\varphi} d\varphi = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/3} (4 \sin^2 2\varphi - 3) d\varphi = \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/3} (2(1 - \cos 4\varphi) - 3) d\varphi = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/3} (2 \cos 4\varphi + 1) d\varphi = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \sin 4\varphi + \varphi \right) \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{12}. \end{aligned}$$

Вычисление объемов тел. Объем V цилиндрического тела (Т), ограниченного сверху поверхностью $z = f(x; y)$, снизу – плоскостью $z = 0$, с боков – цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси Oz , выражается двойным интегралом

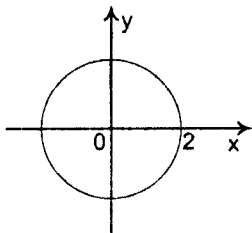
$$V = \iint_{(D)} f(x; y) dx dy,$$

где (D) – проекция тела (Т) на координатную плоскость Oxy .

Пример 6. Найти объем V тела Т, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 4$, $z = 8 - x^2 - y^2$, $z = 0$.



Решение. Уравнение $x^2 + y^2 = 4$ определяет круговой цилиндр радиусом 2 с осью симметрии Oz . Таким образом, нашим телом (T) является "пуля" – часть цилиндра, ограниченная сверху параболоидом. Проекцией (D) тела (T) на плоскость Oxy является круг радиусом 2 с центром в начале координат.



$$\text{Поэтому } v = \iint_{(D)} (8 - x^2 - y^2) dx dy.$$

Для вычисления двойного интеграла целесообразно перейти к полярной системе координат:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \\ 0 \leq \rho \leq 2; \end{cases} \quad J = \rho.$$

Имеем

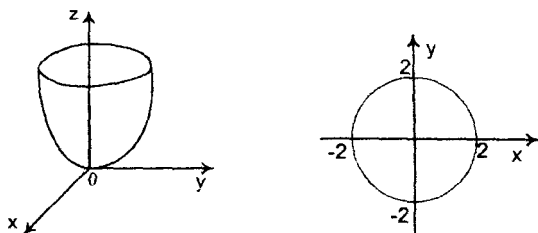
$$\begin{aligned} V &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (8 - \rho^2 \cos^2 \varphi - \rho^2 \sin^2 \varphi) \rho d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (8 - \rho^2) \rho d\rho = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \left[8\rho - \frac{1}{4}\rho^4 \right]_{\rho=0}^2 = \int_0^{2\pi} \left(16 - \varphi \right) d\varphi = 24\pi. \end{aligned}$$

Площадь поверхности. Если в пространстве с заданной прямоугольной системой координат гладкая поверхность (Ω) задана уравнением $z = f(x; y)$ и (D) – проекция этой поверхности на координатную плоскость Oxy , то площадь S этой поверхности выражается формулой

$$S = \iint_{(D)} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dx dy.$$

Пример 7. Найти площадь поверхности (Ω), заданной соотношениями $z = x^2 + y^2, z \leq 4$.

Решение. Нашей поверхностью является часть параболоида. Проекцией (Ω) на плоскость Oxy является круг (D) радиусом 2 с центром в начале координат.



Имеем

$$\begin{aligned}
 S &= \iint_{(D)} \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2} dx dy = \iint_{(D)} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy = \\
 &= \left[\begin{array}{l} x = \rho \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi \\ y = \rho \sin \varphi, \quad J = \rho, \quad 0 \leq \rho \leq 2 \end{array} \right] = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \sqrt{1 + 4\rho^2} \cdot \rho d\rho = \\
 &= \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \left(\int_0^2 (1 + 4\rho^2)^{1/2} d(1 + 4\rho^2) \right) d\varphi = \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{3} (1 + 4\rho^2)^{3/2} \Big|_{\rho=0}^2 \right) d\varphi = \\
 &= \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} (17^{3/2} - 1) d\varphi = \frac{(17\sqrt{17} - 1)}{6} \pi.
 \end{aligned}$$

Механические приложения. Пусть имеется плоская пластина, занимающая область (D) плоскости Oxy и имеющая поверхностную плотность $\gamma(x; y)$. Тогда масса M этой пластины вычисляется по формуле

$$M = \iint_{(D)} \gamma(x; y) dx dy, \quad (4)$$

а координаты ее центра тяжести – по формулам

$$x_0 = \frac{1}{M} \iint_{(D)} x \cdot \gamma(x; y) dx dy, \quad y_0 = \frac{1}{M} \iint_{(D)} y \cdot \gamma(x; y) dx dy. \quad (5)$$

Статические моменты M_x , M_y пластины относительно осей Ox и Oy вычисляются по формулам

$$M_x = \iint_{(D)} y \cdot \gamma(x; y) dx dy, \quad M_y = \iint_{(D)} x \cdot \gamma(x; y) dx dy, \quad (6)$$

а моменты инерции I_x , I_y пластины относительно осей Ox и Oy выражаются формулами

$$I_x = \iint_{(D)} y^2 \gamma(x) dx dy, \quad I_y = \iint_{(D)} x^2 \gamma(x; y) dx dy. \quad (7)$$

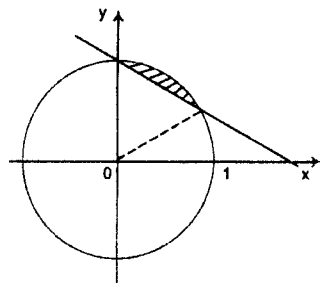
Момент инерции I_0 пластины относительно начала координат равен $I_0 = I_x + I_y$. Центробежный момент I_{xy} пластины рассчитывается по формуле

$$I_{xy} = \iint_{(D)} xy \gamma(x; y) dx dy. \quad (8)$$

Если $\gamma \equiv 1$ (пластина однородная и ее плотность всюду равна 1), то в формулах (4) – (8) моменты называются геометрическими моментами.

Пример 8. Найти центр тяжести (x_0, y_0) и геометрические моменты инерции однородной плоской фигуры ($\gamma \equiv 1$), заданной неравенствами $y \geq 1 - x/\sqrt{3}$, $x^2 + y^2 \leq 1$.

Решение. Построим область (D). Для вычисления требуемых величин удобно перейти к полярным координатам.



Уравнениями линий, ограничивающих (D), будут $\rho = 1$ и $\rho = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \sin \varphi + \cos \varphi}$.

Найдем пределы изменения переменного φ , для чего решим уравнение

$$1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \sin \varphi + \cos \varphi} \quad \text{или} \quad \sin \left(\varphi + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Отсюда находим $\varphi_1 = \pi/6$ и $\varphi_2 = \pi/2$. Таким образом, область (D) в полярных координатах определяется системой неравенств

$$\begin{cases} \frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, \\ \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \sin \varphi + \cos \varphi} \leq \rho \leq 1. \end{cases}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} M &= \iint_{(G)} \rho d\varphi d\rho = \int_{\pi/6}^{\pi/2} d\varphi \int_{\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \sin \varphi + \cos \varphi}}^1 \rho d\rho = \frac{1}{2} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(1 - \frac{3}{(\sqrt{3} \sin \varphi + \cos \varphi)^2} \right) d\varphi = \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\varphi + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \operatorname{tg} \varphi + 1} \right) \Big|_{\pi/6}^{\pi/2 - \epsilon} = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{12}. \end{aligned}$$

$$x_0 = \frac{1}{M} \iint_{(D)} x dx dy = \frac{1}{M} \iint_{(G)} \rho^2 \cos \varphi d\varphi d\rho = \frac{12}{2\pi - 3\sqrt{3}} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \cos \varphi \int_{\sqrt{3}}^1 \rho^2 d\rho =$$

$$= \frac{4}{2\pi - 3\sqrt{3}} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(\cos \varphi - \frac{3\sqrt{3} \cos \varphi}{(\sqrt{3} \sin \varphi + \cos \varphi)^3} \right) d\varphi =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{4}{2\pi - 3\sqrt{3}} \left(\sin \varphi + \frac{3}{2(\sqrt{3} \cdot \operatorname{tg} \varphi + 1)^2} \right) \Bigg|_{\pi/6}^{\pi/2 - \varepsilon} = \frac{1}{2(2\pi - 3\sqrt{3})};$$

$$y_0 = \frac{1}{M} \iint_{(D)} y dx dy = \frac{1}{M} \iint_{(G)} \rho^2 \sin \varphi d\varphi d\rho = \frac{12}{2\pi - 3\sqrt{3}} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin \varphi d\varphi \int_{\sqrt{3}}^1 \rho^2 d\rho =$$

$$= \frac{4}{2\pi - 3\sqrt{3}} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(\sin \varphi - \frac{3\sqrt{3} \sin \varphi}{(\sqrt{3} \sin \varphi + \cos \varphi)^3} \right) d\varphi =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{4}{2\pi - 3\sqrt{3}} \left(-\cos \varphi + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \operatorname{tg} \varphi + 1} - \frac{\sqrt{3}}{2(\sqrt{3} \operatorname{tg} \varphi + 1)^2} \right) \Bigg|_{\pi/6}^{\pi/2 - \varepsilon} = \frac{\sqrt{3}}{2(2\pi - 3\sqrt{3})};$$

$$M_x = M \cdot y_0 = \frac{\sqrt{3}}{24}, \quad M_y = M \cdot x_0 = \frac{1}{24};$$

$$I_x = \iint_{(D)} y^2 dx dy = \iint_{(G)} \rho^3 \sin^2 \varphi d\varphi d\rho = \int_{\pi/6}^{\pi/2} \sin^2 \varphi d\varphi \int_{\sqrt{3}}^1 \rho^3 d\rho =$$

$$= \frac{1}{4} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(\sin^2 \varphi - \frac{9 \sin^2 \varphi}{(\sqrt{3} \sin \varphi + \cos \varphi)^4} \right) d\varphi = \frac{1}{8} \int_{\pi/6}^{\pi/2} (1 - \cos 2\varphi) d\varphi -$$

$$- \frac{1}{4} \int_{\pi/6}^{\pi/2} \left(\frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3} \operatorname{tg} \varphi + 1)^2} - \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3} \operatorname{tg} \varphi + 1)^3} + \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3} \operatorname{tg} \varphi + 1)^4} \right) \frac{\sqrt{3} d\varphi}{\cos^2 \varphi} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} \varphi - \frac{1}{4} \sin 2\varphi + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} \operatorname{tg} \varphi + 1} - \frac{\sqrt{3}}{(\sqrt{3} \operatorname{tg} \varphi + 1)^2} + \frac{\sqrt{3}}{3(\sqrt{3} \operatorname{tg} \varphi + 1)^3} \right] \Bigg|_{\pi/6}^{\pi/2 - \varepsilon} =$$

$$= \frac{\pi - \sqrt{3}}{24}.$$

Аналогично находим

$$I_y = \iint_{(D)} x^2 dx dy = \iint_{(G)} \rho^4 \cos^2 \varphi d\varphi d\rho = \frac{2\pi - 3\sqrt{3}}{48},$$

$$I_0 = I_x + I_y = \frac{4\pi - 5\sqrt{3}}{48},$$

$$I_{xy} = \iint_{(D)} xy dx dy = \iint_{(G)} \rho^3 \sin \varphi \cos \varphi d\varphi d\rho = \frac{1}{32}.$$

4. Тройной интеграл

Пусть функция $u = u(x; y; z)$ определена в области $(T) \subset \mathbb{R}^3$. Разобьем (T) на частичные тела (T_k) , $1 \leq k \leq n$, обозначим через d_k диаметр (T_k) : $d_k = \sup \{ |M'M''| : M', M'' \in (T_k) \}$, через ΔV_k – объем (T_k) . В каждой частичной области (T_k) выберем по точке $M_k(x_k; y_k; z_k)$. Выражение

$$G = \sum_{k=1}^n f(x_k; y_k; z_k) \Delta V_k$$

называется интегральной суммой функции $f(x; y; z)$ по телу (T) . Число $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta V_k$ называется диаметром разбиения. Если существует предел интегральных сумм при $\lambda \rightarrow 0$ (предел, не зависящий ни от способа разбиения (T) , ни от выбора точек M_k), то этот предел называется тройным интегралом функции $u = f(x; y; z)$ по области (T) и обозначается $\iiint_{(T)} f(x; y; z) dT$ или $\iiint_{(T)} f(x; y; z) dx dy dz$.

Свойства тройного интеграла аналогичны свойствам двойного интеграла. Вычисление тройного интеграла сводится к вычислению повторного интеграла. Если область (T) ограничена снизу поверхностью $z = \varphi_1(x; y)$, сверху – поверхностью $z = \varphi_2(x; y)$, с боков – цилиндрической поверхностью с образующей, параллельной оси Oz , и (D) – проекция тела (T) на координатную плоскость Oxy , то

$$\iiint_{(T)} f(x; y; z) dx dy dz = \iint_{(D)} dx dy \int_{\varphi_1(x; y)}^{\varphi_2(x; y)} f(x; y; z) dz.$$

Пример 9. Вычислить $\iiint_{(T)} (2x + y - z) dx dy dz$, где область

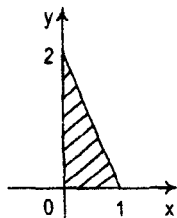
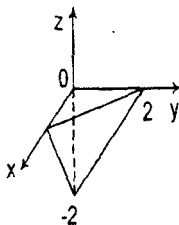
ограничена поверхностями $2x + y - z = 2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Решение. Поверхности, ограничивающие нашу область, являются плоскостями, и (T) является тетраэдром. Сведем тройной интеграл к

повторному. Нетрудно видеть, что проекцией (D) области на координатную плоскость Oxy является прямоугольный треугольник, определяемый неравенствами $2x + y \leq 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Поэтому границы изменений переменных x , y , z определяются неравенствами

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1, \\ 0 \leq y \leq 2 - 2x, \\ 2x + y - 2 \leq z \leq 0. \end{cases}$$



Таким образом,

$$\begin{aligned} \iiint_{(T)} (2x + y - z) dx dy dz &= \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} dy \int_{2x+y-2}^0 (2x + y - z) dz = \\ &= \int_0^1 dx \int_0^{2-2x} \left((2x + y)z - \frac{z^2}{2} \right) \Big|_{z=2x+y-2}^0 dy = -\int_0^1 dx \int_0^{2-2x} \left[(2x + y)(2x + y - 2) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(2x + y - 2)^2}{2} \right] dy = -\frac{1}{2} \int_0^1 \left[8 - 8x - \frac{8}{3} - \frac{8x^3}{3} \right] dx = -4 \int_0^1 \left(\frac{2}{3} - x + \frac{x^3}{3} \right) dx = \\ &= -4 \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^4 \right) \Big|_0^1 = -1. \end{aligned}$$

5. Замена переменных в тройном интеграле

Тройной интеграл $\iiint_{(T)} f(x; y; z) dx dy dz$ иногда проще вычислить, если перейти к новой системе координат uvw .

Если замена переменных происходит с помощью функций $x = x(u, v, w)$, $y = y(u, v, w)$, $z = z(u, v, w)$ и эти функции осуществляют взаимно однозначное соответствие между областью (T) в системе $Oxyz$

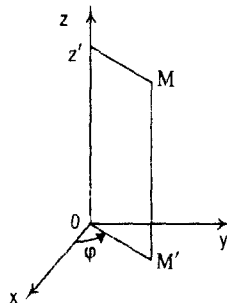
и областью (T_1) в системе $0,uvw$ и якобиан $J(u; v; w) = \frac{D(x; y; z)}{D(u; v; w)}$

непрерывен и не обращается в нуль, то справедлива формула

$$\iiint_{(T)} f(x; y; z) dx dy dz = \iiint_{(T_1)} f(x(u; v; w); y(u; v; w); z(u; v; w)) \times \\ \times |J(u; v; w)| du dv dw. \quad (9)$$

Наиболее употребительными из криволинейных координат являются цилиндрические и сферические системы координат.

В цилиндрической системе координат каждой точке M пространства с заданной декартовой прямоугольной системой координат ставится в соответствие упорядоченная тройка чисел ρ – длина отрезка OM' , где M' – проекция точки M на плоскость Oxy , φ – угол между вектором OM' и положительным направлением оси Ox , z' совпадает с третьей координатой точки



M в декартовой прямоугольной системе координат (числа ρ и φ являются полярными координатами точки M' в системе Oxy). Переменные ρ , φ , z' могут принимать значения: $\rho \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ (или $-\pi \leq \varphi < \pi$), $-\infty < z' < +\infty$. Уравнение $\rho = c$, где c – константа, $c \geq 0$, задает цилиндр в пространстве, уравнение $\varphi = c$ задает полуплоскость, $z' = c$ – плоскость. Переход к цилиндрической системе координат осуществляется с помощью формул

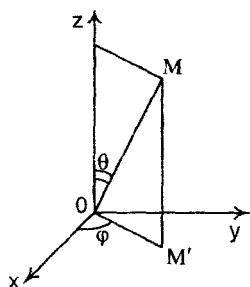
$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z' = z. \end{cases}$$

Якобиан перехода равен $J = \rho$. При этом формула (9) принимает вид

$$\iiint_{(T)} f(x; y; z) dx dy dz = \iiint_{(T_1)} f(\rho \cos \varphi; \rho \sin \varphi; z') \rho d\varphi d\rho dz'. \quad (9')$$

(Часто вместо z' пишут просто z).

В сферической системе координат каждой точке $M(x; y; z)$ пространства с заданной декартовой прямоугольной системой координат ставится в соответствие упорядоченная тройка чисел (ρ, θ, φ) – сферические координаты, где ρ – длина вектора OM , θ – угол между вектором OM и



положительным направлением оси Oz , φ – угол между вектором \mathbf{OM}' и положительным направлением оси Ox (M' , как и выше, – проекция точки M на плоскость Oxy). Переменные ρ , θ , φ могут принимать следующие значения: $\rho \geq 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ (или $-\pi \leq \varphi < \pi$).

Уравнение $\rho = c$, $c \geq 0$ задает сферу радиуса c (чем и объясняется название системы координат), $\theta = c$ – однополостный круговой конус, $\varphi = c$ – полуплоскость.

Формулы перехода к сферической системе координат имеют вид

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \\ z = \rho \cos \theta. \end{cases}$$

Якобиан перехода $J = \rho^2 \sin \theta$. Формула (9) примет вид

$$\iiint_{(T)} f(x; y; z) dx dy dz =$$

$$= \iiint_{(T_1)} f(\rho \sin \theta \cos \varphi; \rho \sin \theta \sin \varphi; \rho \cos \theta) \rho^2 \sin \theta d\varphi d\rho d\theta \quad (9')$$

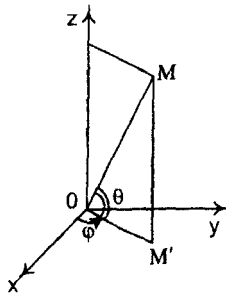
Наряду с приведенной только что сферической системой координат (назовем ее сферической системой координат первого типа) употребляют сферическую систему координат второго типа. Она отличается от системы первого типа только способом определения второй координаты θ : в сферической системе координат второго типа θ есть угол между вектором \mathbf{OM}' и плоскостью Oxy ; при этом θ может меняться в пределах отрезка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Формулы перехода к такой системе координат имеют вид

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \cos \varphi, \\ y = \rho \cos \theta \sin \varphi, \\ z = \rho \sin \theta. \end{cases}$$

Якобиан преобразования $J = \rho^2 \cos \theta$.

При переходе к такой сферической системе формула (9) примет вид



$$\iiint_{(T)} f(x; y; z) dx dy dz = \iiint_{(T_1)} f(\rho \cos \theta \cos \varphi; \rho \cos \theta \sin \varphi; \rho \sin \theta) \times \\ \times \rho^2 \cos \theta d\varphi d\rho d\theta. \quad (9''')$$

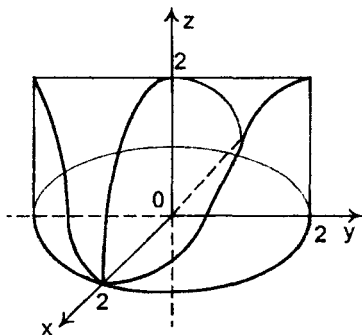
Пример 10. Перейдя к цилиндрическим координатам, вычислите

$$\iiint_{(T)} \frac{5x + y}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy dz, \text{ где } (T) \text{ ограничено поверхностями } z = 2 - \frac{1}{2}x^2,$$

$$x^2 + y^2 = 4, z = 0.$$

Решение. Уравнение $z = 2 - \frac{1}{2}x^2$

задает параболический цилиндр с образующими, параллельными оси Oy , $x^2 + y^2 = 4$ задает цилиндр. Область, на которую распространяется интеграл, изображена на рисунке. Проекцией (T) на плоскость Oxy является круг радиусом 2 с центром в начале координат; перейдем к цилиндрической системе координат:



$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Тогда $J = \rho$, $0 \leq \rho \leq 2$, $0 \leq \varphi < 2\pi$, $0 \leq z \leq 2 - \frac{1}{2}\rho^2 \cos^2 \varphi$.

Применив формулу (9'), получим

$$\begin{aligned} \iiint_{(T)} \frac{5x + 3}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy dz &= \iiint_{(T_1)} \frac{5\rho \cos \varphi + 3}{\rho} \rho d\varphi d\rho dz = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \rho \int_0^{2 - \frac{1}{2}\rho^2 \cos^2 \varphi} (5\rho \cos \varphi + 3) dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 (5\rho \cos \varphi + 3) \times \\ &\times \left(2 - \frac{1}{2}\rho^2 \cos^2 \varphi \right) d\rho = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^2 \left(10\rho \cos \varphi + 6 - \frac{5}{2}\rho^3 \cos^3 \varphi - \right. \\ &\left. - \frac{3}{2}\rho^2 \cos^2 \varphi \right) d\rho = \int_0^{2\pi} \left(5\rho^2 \cos \varphi + 6\rho - \frac{5}{8}\rho^4 \cos^3 \varphi - \frac{1}{2}\rho^3 \cos^2 \varphi \right) \Big|_{\rho=0}^2 d\varphi = \\ &= \int_0^{2\pi} (20 \cos \varphi + 12 - 10 \cos^3 \varphi - 4 \cos^2 \varphi) d\varphi = [20 \sin \varphi + 12\varphi - 10 \times \end{aligned}$$

$$\times \left(\sin \varphi - \frac{1}{3} \sin^3 \varphi \right) - \frac{4}{2} \left(\varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_0^{2\pi} = 24\pi - 4\pi = 20\pi.$$

Пример 11. Вычислите тройной интеграл $\iiint_T \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz$,

где тело (T) задано условиями:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1, \\ z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, \end{cases}$$

перейдя к сферической системе координат.

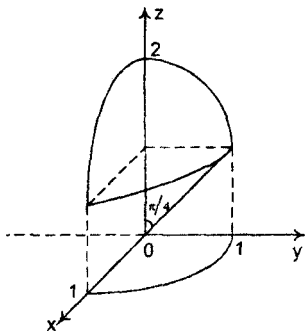
Решение. Область, на которую распространяется данный интеграл, изображена на рисунке – это часть шара $x^2 + y^2 + (z-1)^2 \leq 1$, срезанная плоскостью $z=1$. Проекцией (T) на плоскость Oxy является четверть круга радиусом 1 с центром в начале координат, расположенная в первой четверти. Перейдем к сферической системе координат:

$$\begin{cases} x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \\ z = \rho \cos \theta. \end{cases}$$

$J = \rho^2 \sin \theta$. Переменные φ , θ , ρ меняются в следующих пределах:

$0 \leq \varphi \leq \pi/2$, $0 \leq \theta \leq \pi/4$, $1/\cos \theta \leq \rho \leq 2 \cos \theta$, где $\rho = 1/\cos \theta$, $\rho = 2 \cos \theta$ – уравнения плоскости $z = 1$ и сферы $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ в сферической системе координат соответственно. Применяя формулу (9''), получим

$$\begin{aligned} \iiint_{(T)} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dx dy dz &= \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{\pi/4} d\theta \int_{1/\cos \theta}^{2 \cos \theta} \rho \cdot \rho^2 \sin \theta d\rho = \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/4} \left(\sin \theta \cdot \frac{1}{4} \rho^4 \Big|_{\rho=1/\cos \theta}^{2 \cos \theta} \right) d\theta \right) d\varphi = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \left(\int_0^{\pi/4} \left(\sin \theta \left(16 \cos^4 \theta - \frac{1}{\cos^4 \theta} \right) \right) d\theta \right) d\varphi = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \left(16 \int_0^{\pi/4} \cos^4 \theta \cdot \sin \theta d\theta - \int_0^{\pi/4} \frac{\sin \theta}{\cos^4 \theta} d\theta \right) d\varphi = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{16}{5} \cos^5 \theta \Big|_0^{\pi/4} - \frac{1}{3} \cos^{-3} \theta \Big|_0^{\pi/4} \right) d\varphi = \\
&= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{16}{5} \left(\cos^5 \frac{\pi}{4} - \cos^5 0 \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{\cos^3 \pi/4} - \frac{1}{\cos^3 0} \right) \right) d\varphi = \\
&= \frac{1}{4} \int_0^{\pi/2} \left(-\frac{16}{5} \left(\frac{\sqrt{2}}{8} - 1 \right) - \frac{1}{3} (2\sqrt{2} - 1) \right) d\varphi = \\
&= \left(\frac{4}{5} - \frac{\sqrt{2}}{10} + \frac{1}{12} - \frac{\sqrt{2}}{6} \right) \int_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{53 - 16\sqrt{2}}{120} \pi.
\end{aligned}$$

Задание 9.1

Область (D) задана указанными неравенствами: 1) постройте область (D); 2) запишите двойной интеграл $\iint_{(D)} f(x; y) dx dy$ в виде повторного; 3) измените порядок интегрирования.

- | | |
|--|--|
| 1. а) $y \geq x, y \leq 2x, y \leq 3;$ | в) $x^2 + y^2 \leq 12, y \geq x^2;$ |
| б) $y \geq x^2, y - x \leq 2;$ | г) $y \leq \log_2 x, y \geq 1, x \leq 4.$ |
| 2. а) $x + y \leq 2, x \geq 0, x + 2y \geq 2;$ | в) $x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 2\sqrt{3}x^2;$ |
| б) $y \geq 2x^2, x + y \leq 3;$ | г) $y \leq \arctg x, y \geq \frac{\pi}{4}, x \leq \sqrt{3}.$ |
| 3. а) $y \leq 3x, y \geq 0, 3x + y \leq 6;$ | в) $x^2 + y^2 \leq 3, y \leq -2x^2;$ |
| б) $y \geq -x^2, x - y \leq 2;$ | г) $y \geq 3^x, x \geq 2, y \leq 27.$ |
| 4. а) $y \geq 1, y - x \leq 2, x + 2y \leq 4;$ | в) $x^2 + y^2 \leq 4, x \geq \sqrt{3}y^2$ |
| б) $x \geq y^2, x + y \leq 2;$ | г) $y \leq \cos x, y \geq \frac{1}{2}, -\pi \leq x \leq \pi.$ |
| 5. а) $x + y \geq 1, y \leq 1, x - 2y \leq 1;$ | в) $x^2 + y^2 \leq 6, x \leq -y^2;$ |
| б) $x \leq -2y^2, x + y \geq -3;$ | г) $y \geq \log_{\frac{1}{3}} x, y \leq -1, x \leq 9.$ |
| 6. а) $x + y \leq 2, x \geq 0, x - 2y \leq 2;$ | в) $x^2 + y^2 \leq 2, y \leq -x^2;$ |
| б) $y \geq -3x^2, 2x - y \leq 5;$ | г) $y \geq \operatorname{ctg} x, y \leq \sqrt{3}, x \leq \pi/4.$ |
| 7. а) $y \leq 2, y \geq x, y \geq -2x;$ | в) $x^2 + y^2 \leq 1, x \geq \sqrt{6}y^2;$ |

- 6) $x \geq 2y^2$, $x - 5y \leq 3$; г) $y \geq \frac{1}{4^x}$, $x \leq 3$, $y \leq \frac{1}{4}$.
8. а) $y \leq 1$, $-x + y \leq 1$, $-x + 2y \geq 1$; в) $x^2 + y^2 \leq 1$, $x \leq -\sqrt{2}y^2$;
 б) $x \leq -3y^2$, $-x + 2y \leq 5$; г) $y \leq \sin x$, $y \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$, $0 \leq x \leq \pi$.
9. а) $x \leq 0$, $-x - y \leq 1$, $-2x + y \leq 2$; в) $x^2 + y^2 \leq 5$, $y \geq 2x^2$;
 б) $y \leq 2 - x^2$, $y \geq x$; г) $y \leq \operatorname{tg} x$, $y \geq 1$, $x \leq \pi/3$.
10. а) $y \leq 1$, $x + 2y \geq 1$, $x - y \leq 1$; в) $x^2 + y^2 \leq 20$, $y \leq -x^2$;
 б) $y \geq x^2 - 1$, $y \leq 2x$; г) $y \leq \operatorname{arccot} x$, $y \geq 3\pi/4$, $x \geq -\sqrt{3}$.
11. а) $x + y \leq 2$, $x + 2y \geq 2$, $-x + y \leq 2$;
 в) $x^2 + y^2 \leq 4$, $x^2 + y^2 - 6y \leq 0$;
 б) $x^2 + y^2 \leq 8$, $y \geq x$;
 г) $y \leq \log_2 x$, $y \leq \log_2(4 - x)$, $y \geq 1/2$.
12. а) $-2x + y \leq 2$, $3x - 2y \leq -3$, $x - y \geq -2$;
 б) $x^2 + y^2 \leq 5$, $y \geq -2x$;
 в) $x^2 + y^2 \leq 9$, $x^2 + y^2 + 8y + 12 \leq 0$;
 г) $y \leq 3^x$, $y \geq \frac{9}{3^x}$; $x \leq 2$.
13. а) $y \geq x$, $x + y \leq 2$, $3x - 2y \geq -4$;
 б) $x^2 + y^2 \leq 10$, $y \leq 3x$;
 в) $x^2 + y^2 \leq 16$, $x^2 + y^2 - 10x + 16 \leq 0$;
 г) $y \geq \operatorname{arctg} x$, $y \leq \operatorname{arctg}(6 - x)$, $x \geq 1$.
14. а) $-3x + y \leq 3$, $-x + 5y \geq 1$, $x + 2y \leq 6$;
 б) $x^2 + y^2 \leq 2$, $y \leq -x$;
 в) $x^2 + y^2 \leq 25$, $x^2 + y^2 + 12x + 32 \leq 0$;
 г) $y \leq \cos x$, $y \geq \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$, $0 \leq x \leq \pi$.
15. а) $2x + 3y \geq 6$, $3x + y \leq 9$, $x - 2y \leq -4$;
 б) $x^2 + y^2 \leq 25$, $x - 2y \leq 5$;
 в) $x^2 + y^2 - 4y \leq 0$, $x^2 + y^2 - 12y + 27 \leq 0$;

$$r) y \geq \log_{\frac{1}{3}} x, y \geq \log_{\frac{1}{3}} (6-x), y \leq -\frac{1}{2}.$$

$$16. a) x - y \geq 2, x + y \leq 4, x - 3y \leq 4;$$

$$б) x^2 + y^2 \leq 100, x + 2y \leq 10;$$

$$в) x^2 + y^2 - 2x - 3 \leq 0, x^2 + y^2 - 10x + 16 \leq 0;$$

$$r) y \leq \operatorname{ctg} x, y \leq \operatorname{ctg} \left(\frac{\pi}{3} - x \right), y \geq \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$17. a) 5x - 2y \leq 2, -2x + 3y \leq 8, 3x + y \geq -1;$$

$$б) x^2 + y^2 \leq 25, -x + 3y \leq 5;$$

$$в) x^2 + y^2 - 2y - 3 \leq 0, x^2 + y^2 - 12y + 20 \leq 0;$$

$$r) y \leq \frac{1}{2^x}, y \geq \frac{1}{2^{4-x}}, x \geq 0.$$

$$18. a) 3x - y \leq 7, -x + 3y \leq 3, x + y \geq 1;$$

$$б) x^2 + y^2 \leq 100, -x - 2y \leq 10;$$

$$в) x^2 + y^2 + 2x - 8 \leq 0, x^2 + y^2 + 10x + 21 \leq 0;$$

$$r) y \leq \sin(\pi - 2x), y \geq \sin x, 0 \leq x \leq \pi.$$

$$19. a) 2x + y \geq 4, x + 3y \leq 7, x - 2y \leq 2;$$

$$б) x^2 + y^2 \leq 25, -2x + y \leq 5;$$

$$в) x^2 + y^2 - 2x - 15 \leq 0, x^2 + y^2 - 8x + 12 \geq 0;$$

$$r) y \geq \operatorname{tg} x, y \geq \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - x \right), y \leq \sqrt{3}.$$

$$20. a) 2x - y \leq 3, -x + 3y \leq 1, -x - 2y \leq 1;$$

$$б) x^2 + y^2 \leq 25, 3x + y \leq 5;$$

$$в) x^2 + y^2 - 2y - 24 \leq 0, x^2 + y^2 - 8y + 7 \geq 0;$$

$$r) y \geq \operatorname{arcctg} x, y \geq \operatorname{arcctg}(2-x), y \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$21. a) x \geq 0, -x + 2y \leq 6, 2x + y \leq 8, -x + 3y \geq 3;$$

$$б) x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 \leq 0, x + 2y - 10 \leq 0;$$

$$в) x^2 + y^2 - 6x - 2 \leq 0, x^2 + y^2 - 6x + 4 \geq 0, y \geq x^2 - 6x + 10;$$

$$r) y \geq 1 + \log_2 x, y \geq \log_{\sqrt{2}}(4-x), y \leq 3.$$

$$22. a) y \geq 0, x + 2y \geq 2, 2x - y \leq 6, -x + 4y \leq 4;$$

- б) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 95 \leq 0$, $-x + 2y - 10 \leq 0$;
 в) $x^2 + y^2 + 2y - 9 \geq 0$, $x^2 + y^2 + 2y - 17 \leq 0$, $-x \geq y^2 + 2y + 3$;
 г) $y \leq \log_3 x$, $y \leq \log_{\sqrt{3}}(6 - x)$, $y \geq 1$.
23. а) $x \geq 1$, $y \leq x$, $3x + y \leq 8$, $x + 2y \geq 1$;
 б) $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 \leq 0$, $x + 3y - 4 \geq 0$;
 в) $x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 \leq 0$, $3y \geq x^2 - 4x + 7$, $3x \geq y^2 - 2y + 7$;
 г) $y \geq 2^x$, $y \leq 3^{4-x}$, $x \geq 0$.
24. а) $y \leq 2$, $3x + 2y \geq 7$, $x - y \leq 4$, $x + y \leq 6$;
 б) $x^2 + y^2 - 6x - 8y - 75 \leq 0$, $x - 2y - 5 \leq 0$;
 в) $5y \geq x^2 + 2x + 11$, $-5x \geq y^2 - 4y + 9$, $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 1 \geq 0$;
 г) $y \geq \cos x$, $y \leq \sin 2x$, $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.
25. а) $x \leq 4$, $x + y \leq 6$, $2x - y \geq 3$, $x + y \geq 3$;
 б) $x^2 + y^2 - 10x - 8y + 16 \leq 0$, $2x + y - 19 \leq 0$;
 в) $-4y \geq x^2 - 6x + 17$, $4x \geq y^2 + 4y + 16$, $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 1 \leq 0$;
 г) $y \leq \log_{\frac{1}{5}}(4x)$, $y \leq \log_{\frac{1}{5}}(3 - x)$, $y \geq -1$.
26. а) $y \geq -1$, $y \geq x$, $-2x - y \leq 5$, $-x + 4y \leq 7$;
 б) $x^2 + y^2 - 12x - 10y + 36 \leq 0$, $-3x + y + 8 \leq 0$;
 в) $-2y \geq x^2 + 6x + 17$, $-2x \geq y^2 + 8y + 22$, $x^2 + y^2 + 6x + 8y + 22 \geq 0$;
 г) $y \leq \operatorname{ctg} x$, $y \leq \operatorname{tg} 2x$, $y \geq 1/\sqrt{3}$.
27. а) $x \geq -1$, $y \geq -x$, $-x + 4y \leq 9$, $2x - y \leq 3$;
 б) $x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 \leq 0$, $-x + y - 9 \leq 0$;
 в) $x^2 + y^2 - 2x - 23 \leq 0$, $x^2 + y^2 + 2x - 23 \leq 0$, $x \leq 1$, $2y \geq x^2 - 2x + 1$;
 г) $y \leq \frac{1}{3^x}$, $y \geq \frac{1}{6^{1+x}}$, $x \leq 0$.
28. а) $y \geq -1$, $3x + y \leq 5$, $-x + 2y \leq 3$, $-2x + y \leq 3$;
 б) $x^2 + y^2 - 6x + 4y - 23 \leq 0$, $x + y - 7 \leq 0$;
 в) $x^2 + y^2 - 2y - 5 \leq 0$, $x^2 + y^2 + 2y - 5 \leq 0$, $x \geq y^2 - 2y + 1$, $y \leq 1$;
 г) $y \geq \sin x$, $y \leq \cos 2x$, $0 \leq x \leq \pi/2$.
29. а) $x \leq 4$, $y \leq x$, $2x - y \geq 3$, $2x - 3y \leq 5$;

- б) $x^2 + y^2 + 10x - 8y \leq 0, x + y + 4 \geq 0$;
 в) $x^2 + y^2 - 4x - 44 \leq 0, x^2 + y^2 + 4x - 44 \leq 0, x \leq 1, 2y \leq -x^2 + 4x - 4$;
 г) $y \geq \operatorname{tg} x, y \leq \operatorname{ctg} 3x, y \leq \sqrt{3}$.
30. а) $y \leq 2, y \geq -x, -x + 2y \leq 3, 4x - y \leq 10$;
 б) $x^2 + y^2 - 8x + 6y - 24 \leq 0, x - y - 14 \leq 0$;
 в) $x^2 + y^2 - 4y - 76 \leq 0, x^2 + y^2 + 4y - 76 \leq 0, 2x \leq -y^2 - 4y - 4, y \geq -2$;
 г) $y \geq \log_{\frac{1}{4}} x, y \geq \log_{\frac{1}{2}} (2 - x), y \leq 2$.

Задание 9.2

Вычислите двойной интеграл $\iint_{(D)} f(x; y) dx dy$ по области (D), ограниченной заданными кривыми.

№ п/п	$f(x; y)$	(D)
1	$3x^2y + 2x$	$y^3 = x, 4y = x, x \geq 0$
2	$x + 5x^3y$	$y^2 = 8x, y = 4, x = 0$
3	$6x^2 + 4xy$	$y^2 = x, x + y = 2$
4	$5xy^2 - 3y$	$y^4 = 4x, 2y = x$
5	$2x^2y + 8y^2$	$y^3 = 9x, y = 3, x = 0$
6	$10xy^2 + 6y$	$y = x - 1, 4y = x^2, x = 0$
7	$2xy + 8y^2$	$y^5 = 32x, y = 2x, x \geq 0$
8	$10x^2y + 6y$	$y^4 = -8x, y = 2, x = 0$
9	$16xy + 4y^2$	$x = -2y^2, y = x + 3$
10	$x^2y^2 + 3x$	$y^6 = 4x, 8y = x$
11	$4xy^3 + y^2$	$y = 2 - x^2, y^2 = x, x = 0$
12	$5x^2y + 3x$	$2y = x^2, y^2 = 2x$
13	$8xy^2 + 2y^2$	$y = x^2 + 4, y = 2x^2$
14	$8x^2y + 3x^2$	$y^2 = 8x, y = 8 - x^2, x = 0$
15	$11xy^2 + 5y$	$y = 2x^2, y^3 = -8x$
16	$16x^2y + 6y^2$	$y = -4x^2, y = -3x^2 - 9$

№ п/п	$f(x; y)$	(D)
17	$3xy^2 - 5y^2$	$y^2 = -8x, y = 8 - x^2, x = 0$
18	$-2x^2y + 8x$	$y = 4x^2, y^3 = 36x^2, x \leq 0$
19	$6xy^2 - 10y$	$x = 8y^2, x = 7y^2 + 1$
20	$5xy^2 + 7x^2$	$y = 2 - x, y^2 = 4x + 4$
21	$12x^2y + 2y$	$y = x^2 + 2, y = x^4 - 4$
22	$14xy^2 + 10x$	$x = y^2, x = 2y^2 - 1$
23	$7x^2y + 4y$	$y = x^2 - 2x, x + y = 2$
24	$24x^2y + 4y^2$	$y = 1 - x^4, y = -2x^2 - 2$
25	$28xy^2 + 20x$	$y = -4x^2, y = 5x^2 - 9$
26	$8x^2y + 11y$	$y = x^2 - 4, x + y = 8$
27	$18x^2y + 6x^2$	$y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x$
28	$21xy^2 + 14x$	$y = x^2 + 2x, y = x + 2$
29	$7x^2y^2 + 4x^2$	$y = x^2 - 4, x - y + 8 = 0$
30	$13x^2y + 4y^2$	$y = 1 - x^2, y = x - 1$

Задание 9.3

Перейдя к полярным координатам, вычислите двойной интеграл

$$\iint_{(D)} f(x; y) dx dy.$$

№ п/п	$f(x; y)$	(D)
1	$\sqrt{x^2 + y^2}$	$x^2 + y^2 \leq 2x, 0 \leq y \leq x$
2	$\sqrt{9 - x^2 - y^2}$	$x^2 + y^2 \leq 3y, y \geq 0, x \geq 0$
3	y	$x^2 + y^2 \leq 2y, y \geq x $
4	x	$x^2 + y^2 \leq 4x, x \geq y $
5	xy	$x^2 + y^2 \leq 2x, 0 \leq y \leq x/\sqrt{3}$
6	$x\sqrt{x^2 + y^2}$	$x^2 + y^2 \leq 2x, y \leq x$
7	$y\sqrt{x^2 + y^2}$	$x^2 + y^2 \leq 4y, 0 \leq y \leq \sqrt{3}x$
8	$\sqrt{4 - x^2 - y^2}$	$x^2 + y^2 \leq -2x, y \geq -x, y \geq x$
9	xy	$x^2 + y^2 \leq -4y, x \geq 0, y \leq -x$

№ п/п	$f(x; y)$	(D)
10	x^2	$x^2 + y^2 \leq 6x, -x \leq y \leq 0$
11	y	$x^2 + y^2 \leq 4x, x^2 + y^2 \geq 2x, y \geq 0$
12	x	$x^2 + y^2 \leq 6y, x^2 + y^2 \geq 4y, x \geq 0$
13	$x + y$	$x^2 + y^2 \leq 9, x^2 + y^2 \geq 3x, y \geq 0, x \geq 0$
14	$2x - y$	$x^2 + y^2 \leq 16, x^2 + y^2 \geq 4x, x \geq 0, y \geq 0$
15	$3x + y$	$x^2 + y^2 \leq 4, x^2 + y^2 \geq -2x, y \geq 0, x \leq 0$
16	$2x - 3y$	$x^2 + y^2 \leq 25, x^2 + y^2 \geq -5y, x \geq 0, y \leq 0$
17	$3xy + 1$	$x^2 + y^2 \leq -8x, x^2 + y^2 \geq -4x, y \geq 0$
18	$2xy + 3$	$x^2 + y^2 \leq -10y, x^2 + y^2 \geq -6y, x \geq 0,$
19	$x + 2y$	$x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 \leq 8x, 0 \leq y \leq x$
20	$3x - 2y$	$x^2 + y^2 \geq 4, x^2 + y^2 \leq 8y, 0 \leq x \leq y$
21	$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	$x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 \leq 2\sqrt{3}x, y \geq 0$
22	$\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	$x^2 + y^2 \geq 4, x^2 + y^2 \leq 4x, y \leq 0$
23	$\sqrt{x^2 + y^2}$	$x^2 + y^2 \leq 18, x^2 + y^2 \geq 6y, x \geq 0$
24	$y\sqrt{x^2 + y^2}$	$x^2 + y^2 \leq 9, x^2 + y^2 \geq 6x, y \geq 0$
25	$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	$x^2 + y^2 \geq 25, x^2 + y^2 \leq 10y, x \geq 0$
26	y/x	$x^2 + y^2 \geq 12, x^2 + y^2 \leq -4x, y \geq 0$
27	x/y	$x^2 + y^2 \geq 8, x^2 + y^2 \leq -4y, x \leq 0$
28	$x/(x^2 + y^2)$	$x^2 + y^2 \geq 2, x^2 + y^2 \leq 2x + 2y$
29	$y/(x^2 + y^2)$	$x^2 + y^2 \geq 4, x^2 + y^2 \leq -2x - 2y$
30	$\frac{xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$	$x^2 + y^2 \geq 6, x^2 + y^2 \leq -2x + 2y$

Задание 9.4

Найдите площадь фигуры, определенной указанными неравенствами в полярных координатах.

- | | |
|---|---|
| 1) $\rho \leq 3 \sin 2\varphi$; | 16) $\rho \leq 2(1 - \cos \varphi)$; |
| 2) $\rho^2 \leq 4 \sin 2\varphi$; | 17) $\rho \leq \cos 3\varphi$; |
| 3) $\rho \leq 5(1 - \sin \varphi)$; | 18) $\rho^2 \leq 2 \cos 2\varphi$; |
| 4) $\rho \leq 2 \sin 3\varphi$; | 19) $\rho^2 \leq \sin 3\varphi$; |
| 5) $\rho \leq 3(1 + \cos \varphi)$; | 20) $\rho \leq 4 \cos 2\varphi$; |
| 6) $2 \operatorname{tg} \varphi \cdot \sin \varphi \leq \rho \leq 1/\cos \varphi$; | 21) $1 \leq \rho \leq 2(1 - \cos \varphi)$; |
| 7) $-3/\cos \varphi \leq \rho \leq 4(1 - \cos \varphi)$; | 22) $4 \operatorname{ctg} \varphi \cdot \cos \varphi \leq \rho \leq 3/\sin \varphi$; |
| 8) $1 + \cos \varphi \leq \rho \leq 3 \cos \varphi$; | 23) $1 - \sin \varphi \leq \rho \leq 1$; |
| 9) $2 \operatorname{tg} \varphi \cdot \sin \varphi \leq \rho \leq 3$; | 24) $-\frac{3}{\sin \varphi} \leq \rho \leq 4(1 - \sin \varphi)$; |
| 10) $2(1 + \sin \varphi) \leq \rho \leq 6 \sin \varphi$; | 25) $2\sqrt{3} \operatorname{ctg} \varphi \cdot \cos \varphi \leq \rho \leq 1$; |
| 11) $\rho \leq 4(1 - \sin \varphi)$; | 26) $\sin 3\varphi \leq \rho \leq 2 \sin \varphi$; |
| 12) $\sin \varphi \leq \rho \leq \sin 3\varphi$; | 27) $\cos 2\varphi \leq \rho \leq \sin 2\varphi$; |
| 13) $\rho^2 \geq \cos 2\varphi$, $\rho \leq \sqrt{2} \sin \varphi$; | 28) $\rho \leq \sin \varphi$, $\rho \leq \cos 2\varphi$; |
| 14) $\rho^2 \geq 3 \cos 2\varphi$, $\rho \leq \sqrt{2} \sin 2\varphi$; | 29) $\rho \leq 2 \cos \varphi$, $\rho \leq 2\sqrt{3} \sin \varphi$; |
| 15) $\rho \leq \sqrt{3} \cos 2\varphi$, $\rho \leq \sin 2\varphi$, | 30) $\rho^2 \leq \cos 2\varphi$, $\rho \geq \sqrt{12} \sin 2\varphi$, |
- $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$;
- $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Задание 9.5

Вычислите двойной интеграл $\iint_{(D)} f(x, y) dx dy$, сделав надлежащую

замену переменных.

Указание. В вариантах 1–10 рекомендуется замена переменных

$$\begin{cases} x = a \rho \cos \varphi \\ y = b \rho \sin \varphi \end{cases}, \quad a, b - \text{ постоянные.}$$

В вариантах 11–30 задать область D в виде

$$\begin{cases} a_1 < f(x, y) < b_1, \\ a_2 < g(x, y) < b_2. \end{cases}$$

В этом случае удобно сделать замену переменных

$$\begin{cases} u = f(x, y), \\ v = g(x, y). \end{cases}$$

(Смотри также пример 4 в теории этого параграфа)

№ п/п	$f(x, y)$	(D)
1	x	$(x^2 + 4y^2)^2 \leq 2x^2y, x \geq 0, y \geq 0$
2	y	$(3x^2 + y^2)^3 \leq 4x^3y^2, x \geq 0, y \geq 0$
3	$3x + 2$	$x^2 + 9y^2 \leq 3x, y \geq 0$
4	$2x - y$	$4x^2 + y^2 \leq 6y, x \leq 0$
5	y	$(2x^2 + y^2)^2 \leq 4(2x^2 - y^2)$
6	x	$(x^2 + 5y^2)^3 \leq 3(x^2 - 5y^2)^2, x \geq 0, y \geq 0$
7	y^2	$(x^2 + 2y^2)^2 \leq 3x^2, x \leq 0, y \geq 0$
8	x^2	$(5x^2 + y^2)^2 \leq 2y^2, x \leq 0, y \leq 0$
9	y	$(x^2 + 3y^2)^3 \leq x^2y^2, x \geq 0, y \leq 0$
10	x^2	$(2x^2 + y^2)^2 \leq 3xy, x \geq 0, y \leq 0$
11	x	$y = x^3, y = 2x^3, y^2 = x, y^2 = 3x$
12	x^2	$y = x^4, y = 2x^4, y^3 = x, y^3 = 3x$
13	y^2	$y = x^5, y = 3x^5, y^2 = x, y^2 = 2x$
14	y	$y = 2x^2, y = 3x^2, y^2 = 2x, y^2 = 4x$
15	x^2	$y = x^2, y = 3x^2, xy = 1, xy = 2$
16	y^2	$x = y^2, 2x = y^2, xy = 3, xy = 4$
17	xy	$y = x^2, y = 4x^2, xy = 3, xy = 5$
18	xy^2	$x = y^2, 3x = y^2, xy = 1, xy = 5$
19	x^2y	$2x = y^2, 4x = y^2, xy = 3, xy = 6$
20	xy^2	$y^5 = -x, y^5 = -3x, y = 2x^2, y = 3x^2$
21	$2x + 3y$	$x \leq y \leq 2x, 1 \leq xy \leq 3, x \geq 0, y \geq 0$
22	e^{x+y}	$1 \leq x + y \leq 3, 2x \leq y \leq 4x$
23	xye^{-x}	$e^x \leq y \leq 2e^x, 3e^{-x} \leq y \leq 4e^{-x}$

№ п/п	$f(x; y)$	(D)
24	$1/x$	$\ln x \leq y \leq 2 \ln x, 2 - \ln x \leq y \leq 4 - \ln x$
25	$\ln(x - y)$	$1 + y \leq x \leq 3 + y, -2x \leq y \leq -x$
26	$1/x$	$y - 1 - x^2, y = 1 - 4x^2, y = x^2, y = 3x^2,$ $x > 0, y > 0$
27	$\ln(2x + y)$	$1 \leq 2x + y \leq 3, 3x \leq y \leq 5x$
28	y/x	$3 + \ln x \leq y \leq 5 + \ln x, -2 \ln x \leq y \leq -\ln x$
29	$1/x$	$y = 1 - x^2, y = 1 - 2x^2, y = 3 - 6x^2,$ $y = 3 - 8x^2, x > 0, y > 0$
30	y/x	$y = 3 - x^2, y = 3 - 4x^2, y = x^2,$ $y = 2x^2, x < 0, y > 0$

Задание 9.6

Найдите площадь поверхности (Ω), заданной уравнением $z = f(x; y)$ и указанными неравенствами.

№ п/п	$f(x; y)$	Неравенства, ограничивающие поверхность
1	$1 + 2x^2 + 2y^2$	$z \leq 33$
2	xy	$x^2 + y^2 \leq 1$
3	$x^{3/2} + y^{3/2}$	$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$
4	$x^2 - y^2$	$1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, x \geq y$
5	$9 - x^2 - y^2$	$z \geq 0$
6	$\sqrt{4 - x^2 - y^2}$	$z \geq 0, y \geq 0$
7	x^2	$-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$
8	$3x + y^2$	$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$
9	$2x^2 + 15y$	$-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$
10	$3x^2 + 35y^2$	$0 \leq x \leq 1, y \geq 0, x \geq y$
11	$\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + 1$	$z \leq 9$
12	y^2	$0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$

№ п/п	$f(x; y)$	Неравенства, ограничивающие поверхность
13	$\frac{1}{\sqrt{2}}x^2 + y$	$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$
14	$2x^2 + 2y^2$	$z \leq 9, x \geq 0, x \leq y \leq \sqrt{3}x$
15	$2 - x^2$	$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$
16	$\frac{1}{2}x^2 - 3$	$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$
17	$x^2 - y$	$0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$
18	$15x + 2y^2$	$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$
19	$4x^2 - 65y$	$-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$
20	$\sqrt{1 - x^2 - y^2}$	$y \geq 0, y \geq -x, y \geq x$
21	$\ln x$	$1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1$
22	$3x^2 + 3y^2$	$z \leq 12, x \leq 0, y \geq 0$
23	$x^2 - 2y$	$-1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$
24	$x + y^2$	$-1 \leq x \leq 0, 1 \leq y \leq 2$
25	$x^2 + y^2 - xy$	$x^2 + y^2 \leq 1$
26	$4 - x^2 - y^2$	$z \geq 0, x \leq 0, y \leq 0$
27	$2x^2 + y$	$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$
28	$x^2 - y^2 + xy$	$x^2 + y^2 \leq 4$
29	$x + \ln y$	$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq e$
30	$5x^2 - 99y$	$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$

Задание 9.7

Найдите центр тяжести и геометрические моменты инерции однородной плоской фигуры, заданной неравенствами (плотность $\gamma(x; y) \equiv 1$).

- 1) $x^2 + y^2 \leq 2x, x \leq \sqrt{3}y$;
- 2) $x^2 + y^2 \leq 9x, y \leq \sqrt{3}x$;
- 3) $x^2 + y^2 \leq -4y, y \geq x$;
- 4) $x^2 + y^2 \leq -9x, y \geq -\sqrt{3}x$;
- 5) $x^2 + y^2 \leq 2x + 2y, y \geq x$;
- 6) $x^2 + y^2 \leq 2y, y \leq \sqrt{3}x$;
- 7) $x^2 + y^2 \leq 6y, \sqrt{3}y \geq x$;
- 8) $x^2 + y^2 \leq -2x, y \geq -x$;
- 9) $x^2 + y^2 \geq -16y, y \leq -\sqrt{3}x$;
- 10) $x^2 + y^2 \leq -4x - 4y, x \leq 0$;

- 11) $x^2 + y^2 \leq 2y, x^2 + y^2 \geq 2x$; 21) $x^2 + y^2 \leq 4x, x^2 + y^2 \geq 2x, y \geq 0$;
 12) $x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 \leq 2y, x \geq 0$; 22) $x^2 + y^2 \leq \sqrt{3}y, x^2 + y^2 \leq -x$;
 $x^2 + y^2 \leq 4y, x^2 + y^2 \geq 2y$;
 13) $y \geq \sqrt{3}|x|$; 23) $x^2 + y^2 \geq 3, x^2 + y^2 \leq 2x, y \geq 0$;
 14) $x^2 + y^2 \leq \sqrt{3}xy, x^2 + y^2 \geq -y$; 24) $x^2 + y^2 \leq -6x, x^2 + y^2 \geq -4x, y \leq x$;
 15) $x^2 + y^2 \leq 2, x^2 + y^2 \leq 2y, x \geq 0$; 25) $x^2 + y^2 \leq x + y, x^2 + y^2 \geq 2y$;
 16) $x^2 + y^2 \leq 2y, y \geq x^2, x \geq 0$; 26) $x^2 + y^2 \leq 4, 3y \geq x^2, x \leq 0$;
 17) $y \leq 2 - \sqrt{2 - x^2}, y \geq x^2, x \geq 0$; 27) $x^2 + y^2 \leq 4x, 3x \geq y^2, y \geq 0$;
 18) $x^2 + y^2 \leq 2, y \leq x^2, x \leq 0$; 28) $y \leq 4 - \sqrt{4 - x^2}, y \geq x^2, x \leq 0$;
 19) $x^2 + y^2 \leq 4y, y \leq x^2, x \geq 0$; 29) $x^2 + y^2 \leq 3, y \geq 2x^2, x \geq 0$;
 20) $y \leq 4 - \sqrt{10 - x^2}, y \geq x^2, x \leq 0$; 30) $x^2 + y^2 \leq 2x, y\sqrt{2} \geq \sqrt{x}$.

Задание 9.8

Вычислите тройной интеграл $\iiint_{(T)} f(x; y; z) dx dy dz$ от заданной функции $f(x; y; z)$ по области (T) , ограниченной указанными поверхностями.

№ п/п	$f(x; y; z)$	(T)
1	$2x + y - z$	$2x + y - z - 2 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$
2	$x - y/2 + 2z$	$2x - y + 4z - 4 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$
3	$-\frac{1}{2}x - 2y + \frac{2}{3}z$	$3x + 12y - 4z + 12 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$
4	$4x - 4y + 8z$	$x - y + 2z - 2 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$
5	$-2x + 4y - 4z$	$x - 2y + 2z + 2 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$
6	$2x - y/2 - z$	$4x - y - 2z - 4 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$
7	$\frac{2}{3}x - y + z$	$2x - 3y + 3z - 6 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$
8	$-\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + 2z$	$x + y + z = 0, x = 0, y = 0, z = 0$
9	$\frac{x}{4} + \frac{y}{8} - \frac{z}{4}$	$2x + y - 2z - 4 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$

№ п/п	$f(x; y; z)$	(T)
10	$2x + y - z/2$	$4x + 2y - z - 4 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$
11	$-x + y/3 - 2z$	$z - 3x + y - 6 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$
12	$-2x + y + z/4$	$8 - 8x + 4y + z = 0, x = 0, y = 0, z = 0$
13	$\frac{x}{3} - \frac{y}{9} - \frac{2z}{3}$	$3x - y - 6z - 6 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$
14	$-x - 4y + 4z$	$4 - x - 4y + z = 0, x = 0, y = 0, z = 0$
15	$\frac{8}{3}x + 8y - 8z$	$x + 3y - 3z = 0, x = 0, y = 0, z = 0$
16	$x/2 - y + z$	$x - 2y + 2z - 4 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$
17	$-x + \frac{y}{4} + \frac{z}{2}$	$-4x + y + 2z - 4 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$
18	$2x - 4y + 2z$	$x - 2y + z - 2 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$
19	$\frac{x}{3} - y + 2z$	$x - 3y + 6z - 6 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$
20	$\frac{x}{8} + \frac{y}{2} - \frac{z}{2}$	$x + 4y - 4z - 8 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$
21	$-x - 2y + 2z$	$-x - 2y + z + 2 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$
22	$-\frac{x}{4} + y + \frac{z}{4}$	$-x + 4y + z + 4 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$
23	$\frac{x}{6} - y - \frac{z}{4}$	$2x - 12y + 3z = 0, x = 0, y = 0, z = 0$
24	$-\frac{x}{2} + \frac{y}{4} - \frac{z}{4}$	$-2x + y - z - 4 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$
25	$x - 2y - z$	$x - 2y - z - 2 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$
26	$-\frac{x}{2} - 2y + z$	$-x - 4y + 2z + 4 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$
27	$x - 2y + \frac{z}{3}$	$3x - 6y + z - 6 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$
28	$\frac{4}{9}x + \frac{2}{3}y - \frac{z}{3}$	$4x + 6y - 3z - 12 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$
29	$\frac{x}{4} - \frac{y}{4} + \frac{z}{8}$	$2x - y + z - 4 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$
30	$-\frac{x}{4} + \frac{y}{8} - \frac{z}{8}$	$-2x + y - z + 4 = 0, x = 0, y = 0, z = 0$

Задание 9.9

Вычислите тройной интеграл $\iiint_{(T)} f(x; y; z) dx dy dz$ от заданной функции $f(x; y; z)$ по области (T) , ограниченной многогранником с вершинами в указанных точках.

Варианты 1 – 15.

а) $f(x, y, z) = ax + by + cz$.

$A(a, 0, 0)$, $B(0, 0, 0)$, $C(0, b, 0)$, $D(a, b, 0)$, $S(0, 0, c)$.

в) $f(x, y, z) = axy$.

$A(a, -b, 0)$, $B(0, -b, 0)$, $C(0, b, 0)$, $D(a, b, 0)$, $S(0, 0, c)$.

Варианты 16 – 30.

а) $f(x, y, z) = az + bxy$.

$A(a, 0, c)$, $B(0, 0, c)$, $C(0, b, c)$, $D(a, b, c)$, $S(0, 0, 0)$.

в) $f(x, y, z) = byz$.

$A(a, 0, 0)$, $B(-a, 0, 0)$, $C(-a, b, 0)$, $D(a, b, 0)$, $S(0, 0, c)$.

№ вар.	a	b	c	№ вар.	a	b	c
1	1	-1	3	16	1	1	2
2	1	-2	3	17	1	2	2
3	2	-1	3	18	1	3	2
4	2	-2	3	19	1	4	-3
5	1	1	3	20	2	1	-3
6	1	2	2	21	2	2	-3
7	1	3	2	22	2	3	-3
8	1	4	2	23	2	4	-1
9	2	2	1	24	3	2	-2
10	2	3	1	25	3	3	-2
11	2	1	1	26	3	1	-2
12	2	4	1	27	3	4	-2
13	2	-3	1	28	4	1	-1
14	1	-3	2	29	4	2	-1
15	3	-1	2	30	4	3	-1

Задание 9.10

Вычислите тройной интеграл $\iiint_{(T)} f(x; y; z) dx dy dz$ от заданной функции $f(x; y; z)$ по области (T) , ограниченной многогранником с вершинами в указанных точках.

№ п/п	$f(x; y; z)$	(T)
1	$3 - xy^2 \cos z$	$O(0; 0; 0), A(1; 2; -2), B(-1; 2; -2), C(1; 2; 0), D(-1; 2; 0)$
2	$4y(x+z)^2 + 3$	$O(0; 0; 0), A(2; -4; 0), B(2; 4; 0), C(0; 0; 1)$
3	$(2 + x \sin(yz))/2$	$A(-4; 0; 0), B(4; 0; 0), C(4; 0; 3), D(-4; 0; 3), E(0; -1; 0)$
4	$5(x^3 + z)y - 3$	$O(0; 0; 0), A(2; -2; 1), B(2; 2; 1), C(2; -2; 0), D(2; 2; 0)$
5	$2x \cos^2 z - 6$	$O(0; 0; 0), A(-2; 1; 0), B(0; 0; -1), C(2; 1; 0)$
6	$3 - ye^{x-z}$	$A(0; 4; 0), B(0; -4; 0), C(0; -4; -2), D(0; 4; -2), E(1; 0; 0)$
7	$8(z+1)^2 x - 4$	$O(0; 0; 0), A(3; -2; 2), B(-3; -2; 2), C(3; -2; 0), D(3; -2; 0)$
8	$2y + y \cos z + 3$	$O(0; 0; 0), A(-4; 4; 0), B(-4; -4; 0), C(0; 0; 1)$
9	$(7x\sqrt{z+y} + 3)/2$	$A(2; 0; 0), B(-2; 0; 0), C(-2; 0; -2), D(2; 0; -2), F(0; 4; 0)$
10	$(8yze^x - 3)/4$	$O(0; 0; 0), A(1; 2; -4), B(1; 2; -4), C(1; 2; 0), D(1; -2; 0)$
11	$5 + x\sqrt{z+1} \cdot \sin y$	$O(0; 0; 0), A(-2; 6; 0), B(0; 0; -1), C(2; 6; 0)$
12	$5y \cdot 2^{xz} - 3$	$A(0; -2; 0), B(0; 2; 0), C(0; 2; -8), D(0; -2; -8), E(-1; 0; 0)$
13	$5 - xz \sin y$	$O(0; 0; 0), A(2; -6; -1), B(-2; -6; -1), C(2; -6; 0), D(-2; -6; 0)$
14	$8y\sqrt{z-2x} + 6$	$O(0; 0; 0), A(-4; 1; 0), B(-4; 1; 0), C(0; 0; 1)$

№ п/п	$f(x; y; z)$	(T)
15	$4x + y \cos z + 1$	A(3;0;0), B(-3;0;0), C(-3;0;-1), D(3;0;-1), E(0;1;0)
16	$7y(3x + z)^2 - 3$	O(0;0;0), A(4;-2;2), B(4;2;2), C(4;-2;0), D(4;2;0)
17	$6 + xy\sqrt{1-z}$	O(0;0;0), A(-1;4;0), B(1;4;0), C(0;0;2)
18	$5x^2y \sin z + 18$	A(0;1;0), B(0;-1;0), C(0;-1;2), D(0;1;2), E(2;0;0)
19	$(x \cos y + xz - 7)/2$	O(0;0;0), A(6;-2;1), B(-6;-2;1), C(6;-2;0), D(-6;-2;0)
20	$(5y\sqrt[3]{zx} + 3)/8$	O(0;0;0), A(8;2;0), B(8;-2;0), C(0;0;-2)
21	$(3x \sin^2 y + 12)/2$	A(-2;0;0), B(2;0;0), C(2;0;-2), D(-2;0;2), E(0;-1;0)
22	$(8ye^{2z+x} - 15)/4$	O(0;0;0), A(-4;1;4), B(-4;-1;4), C(-4;1;0), D(-4;-1;0)
23	$5x\sqrt[3]{y^4} + 2x$	O(0;0;0), A(6;-1;0), B(0;0;-4), C(-6;-1;0)
24	$(3yx^2 + yz^3 - 3)/4$	A(0;-4;0), B(0;4;0), C(0;4;-4), D(0;-4;-4), E(-2;0;0)
25	$7x \sin(2z - y) + 6$	O(0;0;0), A(2;-1;-2), B(-2;-1;-2), C(2;-1;0), D(-2;-1;0)
26	$(3y \sin^3 z + 15)/4$	O(0;0;0), A(-4;-1;0), B(-4;1;0), C(0;0;2)
27	$3xz \cdot 5^y - 1$	A(2;0;0), B(-2;0;0), C(-2;0;6), D(2;0;6), E(0;-1;0)
28	$5 + y \cos(z + 12)$	O(0;0;0), A(3;2;-4), B(3;-2;-4), C(3;2;0), D(3;-2;0)

№ п/п	$f(x; y; z)$	(T)
29	$6 - xz(y^2 + 2)$	$O(0; 0; 0), A(2; -2; 0), B(0; 0; -4),$ $C(-2; -2; 0)$
30	$4y \sin^2 z + 3$	$A(0; -4; 0), B(0; 4; 0), C(0; 4; -4),$ $D(0; -4; -4), E(-2; 0; 0)$

Задание 9.11

Вычислите объем тела (T), ограниченного заданными поверхностями.

№ п/п	Уравнения поверхностей, ограничивающих тело
1	$z = 0, y = 0, y - 2x = 0, x = 1, 2z + 4 - y^2 = 0$
2	$x = 2, z = 0, y + 2x = 0, 16z - y^2 = 0$
3	$z = 0, x = 0, x - 4y = 0, y = -1, 3 - z = 3(y + 1)^2$
4	$x = 0, z = 0, x + y = 0, y = -2, 4z - y^2 = 0$
5	$y = 0, z = 0, 2y + x = 0, x = -2, z + 1 - y^2 = 0$
6	$z = 0, x = 1, y + 4x = 0, 8z + y^2 = 0$
7	$z = 0, x = 0, 3y + 2x = 0, y = -2, 2(z - 2) = (y + 2)^2$
8	$z = 0, x = 0, y + x = 0, y = 4, y^2 - 16z = 0$
9	$y = 0, z = 0, y - 2x = 0, x = 2, 8z + 16 - y^2 = 0$
10	$2x - y = 0, z = 0, x = 1, z + y^2 = 0$
11	$y + 3x = 0, z = 0, x = 0, y = 6, 36z = (y - 6)^2 - 36$
12	$y + 2x = 0, y = 2, x = 0, z = 0, z + 2y^2 = 0$
13	$z = 0, y = 0, 3x + y = 0, 36z + 36 - y^2 = 0, x = 2$
14	$z = 0, x = 2, x - 4y = 0, y^2 - z = 0$
15	$z = 0, x = 0, 3x - y = 0, y = 1, z = y^2 - 2y$
16	$z = 0, x = 0, y = 1, 2y + x = 0, 2z - y^2 = 0$
17	$x = -1, y = 0, z = 0, 8z - 16 + y^2 = 0, x + y = 0$
18	$z = 0, x = 2, 2y + x = 0, z - 2y^2 = 0$

№ п/п	Уравнения поверхностей, ограничивающих тело
19	$z = 0, y = -2, x = 0, 3y + x = 0, 4z + y^2 + 4y = 0$
20	$x = 0, y = 2, z = 0, 4y - x = 0, 2z + y^2 = 0$
21	$x = 0, y = -1, z = 0, x - 2y = 0, z - 2y^2 + 2 = 0$
22	$x = -4, z = 0, 4y + x = 0, z - 4y^2 = 0$
23	$z = 0, y = -1, x = 0, 6y + x = 0, z = 4y^2 + 8y$
24	$x = 0, y = 4, z = 0, y + 2x = 0, 4z + y^2 = 0$
25	$z = 0, y = 0, x = 2, 2y + x = 0, z + 2 - 2y^2 = 0$
26	$z = 0, x = -4, x - 4y = 0, z - 2y^2 = 0$
27	$x = 0, y = -1, z = 0, 2y + x = 0, 6 - z = 6(y+1)^2$
28	$x = 0, y = 2, z = 0, 3y - 2x = 0, z + y^2 = 0$
29	$x = 2, y = 0, x + y = 0, z = 0, z + 4 - y^2 = 0$
30	$z = 0, x = -2, y + 2x = 0, 4z + y^2 = 0$

Задание 9.12

Вычислите тройной интеграл $\iiint_{(T)} f(x; y; z) dx dy dz$, перейдя к цилиндрической системе координат, где (T) – тело, ограниченное указанными поверхностями.

№ п/п	$f(x; y; z)$	(T)
1	$(x^2 + y^2)(y^2 - 2x^2)$	$x^2 + y^2 = z^2, x^2 + y^2 = 4, z = 0$ ($z \geq 0$)
2	$z(x^2 + y^2)$	$z = 4(x^2 + y^2), x^2 + y^2 = 1, z = 0$
3	$x^2 y / (x^2 + y^2)^2$	$x^2 + y^2 = 4z^2, z = 2, y = 0$ ($y \geq 0$)
4	$\sqrt[4]{z} x^2$	$z = 9(x^2 + y^2), z = 2$
5	$(y^2 + 1) / (x^2 + y^2)^{3/2}$	$z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 1, z = 2$
6	$(xy + y^2 z) / (x^2 + y^2)^{3/2}$	$z = \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 = 4, z = 3$
7	$(y^2 + xy) / (x^2 + y^2)^{3/2}$	$z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 1 - 2(x^2 + y^2)$

№ п/п	$f(x; y; z)$	(Г)
8	$(2x+z)/\sqrt{x^2+y^2}$	$4-z=x^2+y^2, x^2+y^2=4, z=-3$
9	$5x+1$	$x^2+y^2=1, z+y=2, z=0$
10	$(y+1)/\sqrt{x^2+y^2}$	$z=1-x^2, x^2+y^2=1, z=0$
11	$\sqrt{x^2+y^2}(2x^2+z^2)$	$z=\frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2=4, z=0$
12	$z(x^2+y^2)^4$	$z=9(x^2+y^2), x^2+y^2=1, z=0$
13	$xy^2/(x^2+y^2)^2$	$x^2+y^2=9z^2, z=1, x=0, y=0$ $(x \geq 0, y \geq 0)$
14	$x^2\sqrt[3]{z}$	$z=4(x^2+y^2), z=3$
15	$(-x^2z-y^2)/(x^2+y^2)^{3/2}$	$z=4(x^2+y^2), x^2+y^2=1, z=-2$
16	$(-xy-x^2z)/(x^2+y^2)^{3/2}$	$4-z=x^2+y^2, x^2+y^2=4, z=5$
17	$(2x^2+3xy)/(x^2+y^2)^{3/2}$	$z=\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{x^2+y^2}, z=2-(x^2+y^2)$
18	$(-3x-y)/\sqrt{x^2+y^2}$	$x^2+y^2=z^2, x^2+y^2=z$
19	$3y-1$	$x^2+y^2=4, z+2y=6, z=0$
20	$(2x+2z)/\sqrt{x^2+y^2}$	$z=4-x^2, x^2+y^2=4, z=0$
21	$(x^2+z^2)/\sqrt{x^2+y^2}$	$z=\sqrt{x^2+y^2}, x^2+y^2=1, z=0$
22	$z\sqrt{x^2+y^2}$	$z=\frac{1}{4}(x^2+y^2), x^2+y^2=4, z=0$
23	$x^2y/(x^2+y^2)^2$	$z=3\sqrt{x^2+y^2}, z=3, y=0 (y \geq 0)$
24	$x^2\sqrt[5]{z}$	$z=4(x^2+y^2), z=2$
25	$(x^2z+1)/(x^2+y^2)^{3/2}$	$z^2=4(x^2+y^2), z=2, x=0$ $(x \geq 0)$
26	$x^2z/(x^2+y^2)^{3/2}$	$z=4(x^2+y^2), x^2+y^2=1, z=-2$
27	$(4x^2+5xy)/(x^2+y^2)^{3/2}$	$z=\sqrt{x^2+y^2}, z=2-(x^2+y^2)$
28	$z/\sqrt{x^2+y^2}$	$z=\frac{1}{4}(x^2+y^2), x^2+y^2=4, z=-1$

№ п/п	$f(x; y; z)$	(T)
29	$-3z + 2$	$x^2 + y^2 = 9, z + 3y = 12, z = 0$
30	$(5x + 3)/\sqrt{x^2 + y^2}$	$z = 2 - \frac{1}{2}x^2, x^2 + y^2 = 4, z = 0$

Задание 9.13

Вычислите тройной интеграл $\iiint_{(T)} f(x; y; z) dx dy dz$, перейдя к цилиндрической системе координат, где (T) – тело, ограниченное указанными поверхностями.

№ п/п	$f(x; y; z)$	(T)
1	$\frac{x^2 - y^2 + z^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$	$x^2 + y^2 = 4z^2, x^2 + y^2 = 1, z = 0$
2	$\frac{2xy + z}{(x^2 + y^2)^2}$	$z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 4, z = 0$
3	$\frac{x^2 ye^x}{(x^2 + y^2)^2}$	$x^2 + y^2 = 4z^2, y = 3, y \geq 0$
4	x^2/\sqrt{z}	$z = x^2 + y^2, z = 1$
5	$\frac{x^2 z + y^2 + 1}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$	$x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4(z - 1)^2, z = 0, x \geq 1$
6	$\frac{xy + x^2 z + y^2 z}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$	$x^2 + y^2 = 9(z - 1)^2, x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1$
7	$\frac{x^2 + y^2 + xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$	$x^2 + y^2 = z^2, z = 1 - 2(x^2 + y^2), z \geq 0$
8	$(x + y + z)/\sqrt{x^2 + y^2}$	$x^2 + y^2 + z^2 = 16, z = 5 - \frac{1}{4}(x^2 + y^2), y = 0, y \geq 0$
9	$-x + z + 2$	$x^2 + y^2 = 16, z - 2y = 10, z = 0$

№ n/n	$f(x; y; z)$	(T)
10	$(x + y + z + 1) / \sqrt{x^2 + y^2}$	$z = 1 - x^2, x^2 + y^2 = 1, z = 0$
11	$(2x^2 + y^2 - z^2) / \sqrt{x^2 + y^2}$	$x^2 + y^2 = z^2, x^2 + y^2 = 4, z = 0$
12	$(xy - 2z) / (x^2 + y^2)$	$z = 4(x^2 + y^2), x^2 + y^2 = 1, z = 0$
13	$xy^2 e^{2y} / (x^2 + y^2)^2$	$x^2 + y^2 = 9z^2, z = 4, y \geq 0$
14	$x^2 \sqrt{z}$	$z = 4(x^2 + y^2), z = 3$
15	$\frac{x^2 z - y^2 + 1}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$	$x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = (z - 1)^2,$ $z = 0, x \geq 1$
16	$\frac{-xy + x^2 z + y^2 z}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$	$x^2 + y^2 = (z - 2)^2, x^2 + y^2 = 1,$ $0 \leq z \leq 2$
17	$2x^2 - y^2 + 3xy / (x^2 + y^2)^{3/2}$	$x^2 + y^2 = 3z^2, z = 2 - x^2 - y^2, z \geq 0$
18	$(2x - y + 2z) / \sqrt{x^2 + y^2}$	$x^2 + y^2 + z^2 = 4,$ $z = \frac{5}{2} - \frac{1}{2}(x^2 + y^2), y = 0, y \geq 0$
19	$2y - z + 1$	$x^2 + y^2 = 9, z + 2y = 6, z = 0$
20	$(2x + y + 2z - 1) / \sqrt{x^2 + y^2}$	$z = 1 - 2x^2, x^2 + y^2 = 4, z = 0$
21	$(x^2 + y^2)(x^2 - 2y^2 + z^2)$	$x^2 + y^2 = 4z^2, x^2 + y^2 = 1, z = 0$
22	$(3z - 2xy) / \sqrt{x^2 + y^2}$	$z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 4, z = 0$
23	$x^2 y e^{-2x} / (x^2 + y^2)^2$	$x^2 + y^2 = 9z^2, z = 2, y \geq 0$
24	$x^2 z$	$z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2), z = \frac{1}{3}$
25	$\frac{1 - x^2 z - y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$	$x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 4(z - 1)^2,$ $z = 0, x \geq 1$
26	$\frac{xy + 2x^2 z - y^2 z}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$	$x^2 + y^2 = 4(z - 1)^2, x^2 + y^2 = 1,$ $0 \leq z \leq 1$
27	$3x^2 - 2y^2 + xy / (x^2 + y^2)^{3/2}$	$x^2 + y^2 = z^2, z = 2 - x^2 - y^2, z \geq 0$

№ п/п	$f(x; y; z)$	(T)
28	$(-x + y + 2z) / \sqrt{x^2 + y^2}$	$x^2 + y^2 + z^2 = 9,$ $z = 5 - \frac{1}{2}(x^2 + y^2), y = 0, y \geq 0$
29	$2x - y - 2$	$x^2 + y^2 = 4, z + 3y = 9, z = 0$
30	$(-2x + 3y - z + 2) / \sqrt{x^2 + y^2}$	$z = 2 - \frac{1}{2}x^2, x^2 + y^2 = 4, z = 0$

Задание 9.14

Вычислите тройной интеграл $\iiint_{(T)} f(x; y; z) dx dy dz$, перейдя к сферической системе координат, где (T) – тело, ограниченное указанными поверхностями.

№ п/п	$f(x; y; z)$	(T)
1	$1/z$	$x^2 + y^2 + z^2 = 1, z = \sqrt{x^2 + y^2}, x = 0,$ $y = 0 (x \geq 0, y \geq 0)$
2	$(x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$	$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1, z = \frac{3}{2}, x = 0, y = 0$ $(z \geq \frac{3}{2}, x \geq 0, y \geq 0)$
3	$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 4, y = 0 (y \geq 0)$
4	$\frac{x^2 + y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$	$x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4, z = \sqrt{3}y, y = 0$ $(0 \leq y \leq \frac{z}{\sqrt{3}})$
5	z^{-2}	$x^2 + y^2 + z^2 = 2, x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ $(1 \leq z \leq 2)$
6	$x^2 / (x^2 + y^2 + z^2)$	$x^2 + y^2 + z^2 = 4, z = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{x^2 + y^2}$
7	x	$x^2 + y^2 = z^2, z = 2, x = 0, y = 0 (x \geq 0,$ $y \geq 0)$

№ n/n	$f(x; y; z)$	(T)
8	$\frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$	$x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4,$ $3(x^2 + y^2) = z^2, 0 \leq z \leq 4$
9	$(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$	$x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 9, z = 3, x = 0,$ $y = 0 (z \geq 3, x \geq 0, y \geq 0)$
10	$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$	$x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1, x = 0 (x \geq 0)$
11	$(x^2 + y^2) / (x^2 + y^2 + z^2)^2$	$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1, z = y, y = 0$ $(0 \leq y \leq z)$
12	$y^2 / (x^2 + y^2 + z^2)$	$x^2 + y^2 + z^2 = 9, z = \sqrt{x^2 + y^2}$
13	y	$x^2 + y^2 = 3z^2, z = 3, y = 0 (y \geq 0)$
14	$\frac{z^3}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}}$	$x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4, x^2 + y^2 = z^2,$ $0 \leq z \leq 4$
15	$(x^2 + y^2 + z^2)^{-4/2}$	$x^2 + y^2 + z^2 = 3, x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ $(1,5 \leq z \leq 2)$
16	$x^2 + y^2 + z^2$	$x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4, z = 1, x = 0,$ $y = 0 (z \geq 1, x \geq 0, y \geq 0)$
17	$y^2 / (x^2 + y^2 + z^2)^2$	$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1, y = 0 (y \geq 0)$
18	$(y^2 + 2z^2) / (x^2 + y^2 + z^2)^2$	$x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 9, y = \sqrt{3}z, y = 0$ $(0 \leq y \leq \sqrt{3}z)$
19	$(x^2 + 2y^2) / (x^2 + y^2 + z^2)$	$x^2 + y^2 + z^2 = 16, z = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{x^2 + y^2}$
20	$2x - 3y$	$3(x^2 + y^2) = z^2, z = 1, x = 0, y = 0$ $(x \geq 0, y \geq 0)$
21	$\frac{4x^2 - y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$	$5 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$
22	$(x^2 + y^2 + z^2)^{-1}$	$x^2 + y^2 + z^2 = 9, x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 9$ $(1,5 \leq z \leq 6)$

№ п/п	$f(x; y; z)$	(T)
23	$(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$	$x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4, z=3, x=0,$ $y=0 (z \geq 3, x \geq 0, y \geq 0)$
24	$\frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$	$x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 9, x=0, y=0$ $(x \geq 0, y \geq 0)$
25	$(3x^2 - y^2)/(x^2 + y^2 + z^2)$	$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$ $z = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{x^2 + y^2}$
26	$3x + 4y$	$x^2 + y^2 = z^2, z = \frac{1}{2}, y=0 (y \geq 0)$
27	$(y^2 - 3z^2)/(x^2 + y^2 + z^2)^2$	$x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4, z=y, y=0$ $(0 \leq y \leq z)$
28	$\frac{2x^2 + 3y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}$	$4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 5$
29	z^2	$x^2 + y^2 + z^2 = 8, x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$ $(2 \leq z \leq 4)$
30	$\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1, z=1, x=0, y=0$ $(z \geq 1, x \geq 0, y \geq 0)$

Задание 9.15

Вычислите тройной интеграл $\iiint_{(T)} f(x; y; z) dx dy dz$, перейдя к сферической системе координат, где (T) – тело, ограниченное указанными поверхностями.

№ п/п	$f(x; y; z)$	Уравнения поверхностей, ограничивающих тело
1	$(x^2 + y^2 + (z-1)^2)^2$	$1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$
2	$1/z$	$x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = 4, z = 2$

№ п/п	$f(x; y; z)$	Уравнения поверхностей, ограничивающих тело
3	$1/z$	$x^2 + y^2 + z^2 = 8,$ $x^2 + y^2 + (z-4)^2 = 8,$ $4 - 2\sqrt{2} \leq z \leq 2\sqrt{2}$
4	y	$x^2 + y^2 + z^2 = 1/2, z = z(x^2 + y^2), y \geq 0$
5	z	$x^2 + y^2 + z^2 = 4,$ $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1, 0 \leq z \leq 2$
6	$1/(3x + 4y)$	$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1,$ $z = 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 1$
7	z^{-2}	$x^2 + y^2 = 3(z-2)^2,$ $z = 3, 2 \leq z \leq 3$
8	z^{-2}	$x^2 + y^2 + z^2 = 1/4,$ $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 3/4,$ $1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \leq z \leq 1/2$
9	$(x^2 + y^2 + (z-1)^2)^{-3/2}$	$4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$
10	$1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$	$x^2 + y^2 + z^2 = 4,$ $x^2 + y^2 = 1, z = 0, x \leq 1$
11	$1/x$	$x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1, z = y, y \geq 0$
12	x	$x^2 + y^2 + z^2 = 1/9, y = 2(x^2 + z^2),$ $x \geq 0, z \geq 0, 0 \leq y \leq 1/3$
13	y	$x^2 + y^2 + z^2 = 2,$ $x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1, y \geq \sqrt{2}$
14	$1/(4x + 3y)$	$x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4, z = 1,$ $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 1$

№ п/п	$f(x; y; z)$	Уравнения поверхностей, ограничивающих тело
15	y^{-2}	$x^2 + z^2 - 9(y-4)^2 = 1,$ $y = 6, 4 \leq y \leq 6$
16	x^{-2}	$x^2 + y^2 + z^2 = 3,$ $(x-4)^2 + y^2 + z^2 = 7$
17	$(x^2 + y^2 + (z+4)^2)^{-2}$	$4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$
18	$1/(x^2 + y^2 + z^2)$	$x^2 + y^2 + z^2 = 9, x^2 + y^2 = 9, z = 3$
19	$1/y$	$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$ $x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 3,$ $2 - \sqrt{3} \leq y \leq 1$
20	z	$x^2 + y^2 + z^2 = 4, x = \sqrt{3}(y^2 + z^2),$ $z \geq 0, 0 \leq x \leq 2$
21	x	$x^2 + y^2 + z^2 = 12,$ $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 4, 0 \leq x \leq 2$
22	$1/(6z + 8x)$	$x^2 + (y-2)^2 + z^2 = 4,$ $y = 3, x \geq 0, z \geq 0, y \geq 3$
23	$1/(x^2 + y^2 + z^2)$	$x^2 + y^2 = 12(z-2)^2, z = 4$
24	$1/(x^2 + y^2 + z^2)$	$x^2 + z^2 = 9(y-4)^2,$ $y = 6, 4 \leq y \leq 6$
25	$(x^2 + y^2 + (z-2)^2)^{1/2}$	$\frac{1}{4} \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$
26	$1/(x^2 + y^2 + z^2)$	$x^2 + y^2 + z^2 = 16,$ $x^2 + y^2 = 4, z = 0, z \leq 2$
27	$1/z$	$x^2 + y^2 + z^2 = 3,$ $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 1, 0 \leq z \leq \sqrt{3}$
28	x	$x^2 + y^2 + z^2 = 2,$ $z = x^2 + y^2, x \geq 0$

№ п/п	$f(x; y; z)$	Уравнения поверхностей, ограничивающих тело
29	z	$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$ $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1, 0 \leq z \leq 1$
30	$1/(8y + 6z)$	$(x-4)^2 + y^2 + z^2 = 16,$ $x = 2, x \geq 2, y \geq 0, z \geq 0$

Х. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

1. Арифметическое пространство

Рассмотрим множество всевозможных упорядоченных наборов из n чисел (действительных или комплексных) $x = (\xi_1; \xi_2; \dots; \xi_n)$. На этом множестве введем понятие равенства двух элементов и две линейные операции: сложение и умножение на число. Скажем, что элемент $\bar{x}_1 = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ равен элементу $\bar{x}_2 = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ $\bar{x}_1 = \bar{x}_2$ тогда и только тогда, когда $\xi_1 = \eta_1, \xi_2 = \eta_2, \xi_1 = \eta_1, \dots, \xi_n = \eta_n$.

Сложение определим по правилу: если $x_1 = (\xi_1; \xi_2; \dots; \xi_n)$, $x_2 = (\eta_1; \eta_2; \dots; \eta_n)$, то $x_1 + x_2 = (\xi_1 + \eta_1; \xi_2 + \eta_2; \xi_n + \eta_n)$.

Умножение на число определим по правилу: если $x = (\xi_1; \xi_2; \dots; \xi_n)$ и λ — число (действительное или комплексное), то $\lambda x = (\lambda \xi_1; \lambda \xi_2; \dots; \lambda \xi_n)$.

Множество всевозможных упорядоченных наборов $x = (\xi_1; \xi_2; \dots; \xi_n)$ с введенными выше операциями сложения и умножения на число называется n -мерным арифметическим пространством; будем обозначать его A_n . Элементы $x = (\xi_1; \xi_2; \dots; \xi_n)$ пространства A_n называются векторами. Вектор $0 = (0; 0; \dots; 0)$ называется нулевым вектором.

Выражение $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m$ называется линейной комбинацией векторов $x_1; x_2; \dots; x_m$.

Система $x_1; x_2; \dots; x_m$ арифметических векторов называется линейно-зависимой, если найдутся числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, не все равные нулю и такие, что

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m = 0. \quad (1)$$

Если же равенство (1) возможно лишь при $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$, то система $\{x_j\}_{j=1}^m$ называется линейно независимой.

Упорядоченная система, состоящая из n линейно независимых векторов пространства A_n , называется базисом A_n .

Теорема 1. Система векторов $\mathbf{x}_1 = (\xi_{11}; \xi_{21}; \dots; \xi_{n1})$,
 $\mathbf{x}_2 = (\xi_{12}; \xi_{22}; \dots; \xi_{n2})$, ..., $\mathbf{x}_n = (\xi_{1n}; \xi_{2n}; \dots; \xi_{nn})$ образует базис A_n в том и

только в том случае, если

$$\begin{vmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \dots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \dots & \xi_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_{n1} & \xi_{n2} & \dots & \xi_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Система векторов $(1; 0; 0; \dots; 0)$, $(0; 1; 0; \dots; 0)$, ..., $(0; 0; \dots; 0; 1)$ образует базис A_n , который называется каноническим базисом.

Теорема 2. Если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ – базис A_n , то любой вектор $\mathbf{x} \in A_n$ может быть представлен в виде линейной комбинации векторов $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^n$:

$$\mathbf{x} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{e}_n, \quad (2)$$

причем такое представление определяется однозначно.

Равенство (2) называется разложением вектора \mathbf{x} по базису $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^n$.

Коэффициенты α_j называются координатами вектора \mathbf{x} в базисе $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^n$.

Пример 1. Убедиться, что система векторов $\mathbf{x}_1 = (1; -2; 1; 3)$,
 $\mathbf{x}_2 = (0; 1; -1; -2)$, $\mathbf{x}_3 = (2; 1; -2; 1)$, $\mathbf{x}_4 = (-1; -1; 0; 1)$ образует базис в A_4 .
 Найти разложение вектора $\mathbf{x} = (3; -5; 1; 10)$ в этом базисе.

Решение. Проверим, что $\mathbf{x}_1; \mathbf{x}_2; \mathbf{x}_3; \mathbf{x}_4$ образует базис:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0,$$

следовательно, $\{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^4$ образуют базис в A_4 .

Найдем разложение вектора $\mathbf{x} = (3; -5; 1; 10)$ в этом базисе, т.е. найдем такие $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$, что

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

Это равенство приводит к системе уравнений

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 - \alpha_4 = 3, \\ -2\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = -5, \\ \alpha_1 - \alpha_2 - 2\alpha_3 = 1, \\ 3\alpha_1 - 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 10. \end{cases}$$

Решением этой системы является $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 1$, $\alpha_4 = 1$.

Таким образом, $\mathbf{x} = 2\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 + \mathbf{x}_4$.

2. Линейное пространство

Пусть V — некоторое множество, на котором введены две операции: сложение и умножение на число. Скажем, что множество V замкнуто относительно операции сложения и умножения на число, если для любых \bar{x} и $\bar{y} \in V$ и любого вещественного (комплексного) числа λ $\bar{x} + \bar{y} \in V$, $\lambda\bar{x} \in V$. Предположим, что операции сложения и умножения на число удовлетворяют следующим восьми условиям:

- 1) $x_1 + x_2 = x_2 + x_1$;
- 2) $(x_1 + x_2) + x_3 = x_1 + (x_2 + x_3)$;
- 3) существует элемент \mathbf{i} , такой что $\mathbf{x} + \mathbf{i} = \mathbf{x}$ (элемент и называется нулевым);
- 4) для любого элемента \mathbf{x} существует элемент \mathbf{x}' , такой что $\mathbf{x} + \mathbf{x}' = \mathbf{i}$; при этом пишут $\mathbf{x}' = -\mathbf{x}$, и $(-\mathbf{x})$ называется противоположным элементу \mathbf{x} ;
- 5) $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$;
- 6) $\lambda(\mu\mathbf{x}) = (\lambda\mu)\mathbf{x}$;
- 7) $\lambda(x_1 + x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2$;
- 8) $(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}$.

Множество V называется линейным пространством, если в этом множестве введены понятия равенства двух элементов и операции сложения и умножения элемента на число. При этом предполагается, что множество V замкнуто относительно операций сложения и умножения на число и выполняются условия 1 – 8.

Если числа λ , о которых идет речь в определении линейного пространства, вещественные, то V называют вещественным линейным пространством. Если λ — комплексные числа, то V называют комплексным линейным пространством. Элементы линейного пространства называются векторами.

Примером линейного пространства является A_n . Другими примерами являются: R^n ; P_n – множество всех многочленов степени не выше n ; $C[a; b]$ – множество всех непрерывных на $[a; b]$ функций с естественными операциями сложения и умножения на число.

Определение линейной зависимости и независимости системы векторов повторяет соответствующее определение для пространства A_n . Максимальное число линейно независимых векторов пространства V называется размерностью пространства и обозначается $\dim V$. Например, $\dim R^3 = 3$ (векторы $i; j; k$ образуют максимальную линейно независимую систему), $\dim A_n = n$, $\dim P_n = n+1$ (здесь система многочленов $f_1(t) = 1, f_2(t) = t, f_3(t) = t^2, \dots, f_{n+1}(t) = t^n$ образует максимальную линейно независимую систему векторов).

Пусть $\dim V = n < \infty$. Упорядоченная система e_1, e_2, \dots, e_n из n линейно независимых векторов пространства V называется базисом V . Для линейных n - мерных пространств справедлив аналог Теоремы 2.

Пусть V_1 и V_2 – линейные пространства и пусть задано взаимно-однозначное соответствие $V_1 \leftrightarrow V_2$ между пространствами V_1 и V_2 . Это соответствие называется изоморфизмом, если оно сохраняет линейную структуру пространств, т.е. удовлетворяет следующим двум требованиям: 1) если $x_1 \leftrightarrow y_1, x_2 \leftrightarrow y_2$, то $(x_1 + x_2) \leftrightarrow (y_1 + y_2)$; 2) если $x \leftrightarrow y$ и λ – произвольное число, то $(\lambda x) \leftrightarrow (\lambda y)$.

Пространства, между которыми можно установить изоморфизм, называются изоморфными.

Теорема 3. Конечномерные линейные пространства V_1 и V_2 изоморфны в том и только в том случае, если $\dim V_1 = \dim V_2$.

Пусть V – n -мерное линейное пространство и e_1, e_2, \dots, e_n – базис в V . Изоморфизм между V и A_n можно установить по следующему правилу (элементы A_n будем записывать в виде столбца, а не строки):

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n \leftrightarrow X = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

При этом X называется вектор-столбцом координат вектора x .

$$C^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$C_{11} = \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2, \quad C_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad C_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$C_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad C_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -3, \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$C_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3, \quad C_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7.$$

Таким образом,

$$C^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \\ -2 & -3 & -7 \end{pmatrix}.$$

$$X = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} - \text{вектор-столбец координат } x \text{ в базисе } \{e_j\}_{j=1}^3.$$

Вектор-столбец X' вектора x в базисе $\{f_j\}_{j=1}^3$ найдем по формуле

$$X' = C^{-1}X = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \\ -2 & -3 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 18 \\ 9 \\ 21 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3/2 \\ 7/2 \end{pmatrix}.$$

Итак,

$$x = 3f_1 + \frac{3}{2}f_2 + \frac{7}{2}f_3.$$

Пусть V – линейное пространство. Подмножество $V_1 \subset V$ называется подпространством пространства V , если V_1 в свою очередь является линейным пространством.

Пример 3. Образует ли линейное подпространство пространства A_n множество V , заданное по правилу:

а) $V = \{(\xi_1; \xi_2; \xi_3; \xi_4) : \xi_1 - 2\xi_3 = 0\}$;

б) $V = \{(\xi_1; \xi_2; \xi_3; \xi_4) : \xi_3 + \xi_4 = 3\}$?

Решение. а) Пусть $x = (\xi_1; \xi_2; \xi_3; \xi_4)$, $y = (\eta_1; \eta_2; \eta_3; \eta_4) \in V$, тогда $\xi_1 - 2\xi_3 = 0, \eta_1 - 2\eta_3 = 0$.

Обозначим $z = x + y$; $z = (\xi_1 + \eta_1; \xi_2 + \eta_2; \xi_3 + \eta_3; \xi_4 + \eta_4)$.

Имеем $(\xi_1 + \eta_1) - 2(\xi_3 + \eta_3) = (\xi_1 - 2\xi_3) + (\eta_1 - 2\eta_3) = 0$. Следовательно, $z = x + y \in V$.

Пусть $x = (\xi_1; \xi_2; \xi_3; \xi_4) \in V$, тогда $\xi_1 - 2\xi_3 = 0$.

Для произвольного числа λ имеем

$$\lambda x = (\lambda\xi_1; \lambda\xi_2; \lambda\xi_3; \lambda\xi_4); (\lambda\xi_1) - 2(\lambda\xi_3) = \lambda(\xi_1 - 2\xi_3) = \lambda \cdot 0 = 0.$$

Это говорит о том, что $(\lambda x) \in V$. Из сказанного следует, что V является подпространством пространства A_4 .

б) Пусть $x = (\xi_1; \xi_2; \xi_3; \xi_4) \in V$, тогда $\xi_3 + \xi_4 = 3$. Рассмотрим вектор $2x = (2\xi_1; 2\xi_2; 2\xi_3; 2\xi_4)$. Имеем $(2\xi_3) + (2\xi_4) = 2(\xi_3 + \xi_4) = 6 \neq 3$. Следовательно, $2x \notin V$, и V не образует линейного пространства и поэтому не является подпространством пространства A_4 .

3. Евклидово пространство

Пусть V – вещественное линейное пространство. Определенную на V вещественнозначную функцию двух переменных, обозначаемую (x, y) , называют скалярным произведением, если она удовлетворяет следующим четырем условиям:

$$(x, y) = (y, x);$$

$$(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y);$$

$$(\lambda x, y) = \lambda(x, y);$$

$$(x, x) \geq 0, \text{ причем } (x, x) = 0 \text{ в том и только в том случае, если } x = 0.$$

Конечномерное линейное пространство с заданным на нем скалярным произведением называется евклидовым пространством.

Число $\sqrt{(x, x)}$, обозначаемое $\|x\|$, называется нормой вектора x . Угол φ между векторами x и y определяется по формуле

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{\|x\| \cdot \|y\|}.$$

Векторы x и y называются ортогональными, если $(x, y) = 0$, при этом пишут $x \perp y$.

Базис $\{e_j\}_{j=1}^n$ евклидова пространства называется ортогональным, если $(e_i, e_j) = 0$ при $i \neq j$. Если к тому же $\|e_j\| = 1$, то ортогональный базис $\{e_j\}_{j=1}^n$ называется ортонормированным.

Теорема 6. В любом евклидовом пространстве имеется ортонормированный базис.

Примерами евклидовых пространств являются: 1) R^3 — i, j, k , которые образуют ортонормированный базис; 2) R^n — пространство A_n , в котором скалярное произведение задано по следующему правилу: если $x = (\xi_1; \xi_2; \dots; \xi_n)$, $y = (\eta_1; \eta_2; \dots; \eta_n)$, то

$$(x, y) = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \dots + \xi_n \eta_n;$$

$P_n[0; 1]$ — пространство всех многочленов степени не выше n , в котором скалярное произведение векторов $f(t)$, $g(t)$ задается равенством

$$(f, g) = \int_0^1 f(t)g(t)dt.$$

Пусть E_1 и E_2 — евклидовы пространства и пусть задан изоморфизм линейных пространств $E_1 \leftrightarrow E_2$. Это соответствие называется изоморфизмом евклидовых пространств в том случае, когда оно сохраняет скалярное произведение, т. е. выполняется следующее условие: если $x_1 \leftrightarrow y_1$, $x_2 \leftrightarrow y_2$, то $(x_1, x_2) = (y_1, y_2)$.

Евклидовы пространства, между которыми можно установить изоморфизм, называются изоморфными.

Теорема 7. Евклидовы пространства E_1 и E_2 изоморфны между собой в том и только в том случае, если $\dim E_1 = \dim E_2$.

Комплексное евклидово пространство определяется аналогично вещественному, только от комплекснозначной функции (x, y) вместо равенства $(x, y) = (y, x)$ требуют равенство $(x, y) = \overline{(y, x)}$.

4. Линейные операторы

Отображение $A: V \rightarrow V$ линейного пространства называется линейным оператором, если оно удовлетворяет следующим двум условиям:

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2;$$

$A(\lambda x) = \lambda Ax$ для любых $x_1, x_2, x \in V$ и любого числа λ (принято писать Ax вместо $A(x)$).

Тривиальными примерами линейных операторов являются нулевой оператор, ставящий в соответствие каждому вектору x нуль-вектор θ и тождественный (или единичный) оператор I , действующий по правилу $Ix = x$. Для задания линейного оператора достаточно задать его на элементах базиса пространства: если $\{e_j\}_{j=1}^n$ – базис линейного пространства V , $\{g_j\}_{j=1}^n$ – произвольная система векторов V , то существует единственный линейный оператор $A: V \rightarrow V$, такой что $Ae_j = g_j$. Пусть

$$\begin{cases} Ae_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + \dots + a_{n1}e_n, \\ Ae_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + \dots + a_{n2}e_n, \\ \dots \\ Ae_n = a_{1n}e_1 + a_{2n}e_2 + \dots + a_{nn}e_n. \end{cases}$$

Матрица $(a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ называется матрицей линейного оператора A в базисе $\{e_j\}_{j=1}^n$ и обычно обозначается той же буквой, что и линейный оператор: $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$. Таким образом, устанавливается взаимно-однозначное соответствие между множеством линейных операторов n -мерного линейного пространства и множеством матриц $M_{n \times n}$ (это соответствие зависит от выбора базиса).

Нулевому оператору в любом базисе соответствует нулевая матрица, единичному оператору – единичная матрица.

Если X – вектор-столбец (координат) вектора x , Y – вектор-столбец вектора $y = Ax$ в базисе $\{e_j\}_{j=1}^n$, $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ – матрица линейного оператора $A: V \rightarrow V$ в том же базисе, то справедлива формула

$$Y = AX.$$

Пример 4. Установить, является ли заданное отображение $A: \mathcal{A}_4 \rightarrow \mathcal{A}_4$ линейным оператором:

а) $A(\xi_1; \xi_2; \xi_3; \xi_4) = (\xi_2 - 3\xi_4; -\xi_1; \xi_2 + \xi_3; \xi_1 + 3\xi_2)$;

б) $A(\xi_1; \xi_2; \xi_3; \xi_4) = (3\xi_1 + \xi_2; \xi_2 - \xi_3; \xi_1 \xi_4; \xi_3 - 2\xi_4)$.

Выписать матрицы линейных операторов в каноническом базисе.

Решение. а) Пусть $x = (\xi_1; \xi_2; \xi_3; \xi_4)$, $y = (\eta_1; \eta_2; \eta_3; \eta_4)$. Тогда $x + y = (0_1 + \eta_1; 0_2 + \eta_2; 0_3 + \eta_3; 0_4 + \eta_4)$ и $A(x + y) = ((\xi_2 + \eta_2) - 3(\xi_4 + \eta_4); -(\xi_1 + \eta_1); (\xi_2 + \eta_2) + (\xi_3 + \eta_3); (\xi_1 + \eta_1) + 3(\xi_2 + \eta_2)) = (\xi_2 - 3\xi_4; -\xi_1; \xi_2 + \xi_3; \xi_1 + 3\xi_2) + (\eta_2 - 3\eta_4; -\eta_1; \eta_2 + \eta_3; \eta_1 + 3\eta_2) = Ax + Ay$;

$$A(\lambda x) = A(\lambda \xi_1; \lambda \xi_2; \lambda \xi_3; \lambda \xi_4) = (\lambda \xi_2 - 3\lambda \xi_4; -\lambda \xi_1; \lambda \xi_2 + \lambda \xi_3; \lambda \xi_1 + 3\lambda \xi_2) = \lambda(\xi_2 - 3\xi_4; -\xi_1; \xi_2 + \xi_3; \xi_1 + 3\xi_2) = \lambda Ax.$$

Следовательно, отображение $A: \mathcal{A}_4 \rightarrow \mathcal{A}_4$ является линейным оператором. Найдем матрицу этого оператора в каноническом базисе $e_1 = (1; 0; 0; 0)$, $e_2 = (0; 1; 0; 0)$, $e_3 = (0; 0; 1; 0)$, $e_4 = (0; 0; 0; 1)$.

Имеем

$$Ae_1 = (0; -1; 0; 1), Ae_2 = (1; 0; 1; 3), Ae_3 = (0; 0; 1; 0), Ae_4 = (-3; 0; 0; 0).$$

Таким образом, матрицей оператора A является

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

б) Покажем, что данное отображение A не является линейным оператором. Рассмотрим вектор $x = (1; 0; 0; 1)$. Имеем $Ax = (3; 0; 1; -2)$. Далее $3x = (3; 0; 0; 3)$, $A(3x) = (9; 0; 9; -6) \neq 3Ax$.

Следовательно, отображение $A: \mathcal{A}_4 \rightarrow \mathcal{A}_4$ не является линейным оператором.

Пример 5. Линейный оператор A в базисе e_1, e_2, e_3 задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Найти образ вектора $x = 3e_1 - e_2 + 4e_3$.

Решение. Имеем

$$Ax = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, $Ax = 25e_1 - 4e_2 - 4e_3$.

Линейный оператор в различных базисах задается различными матрицами.

Теорема 8. Пусть $A: V \rightarrow V$ – линейный оператор, которому в базисе $\{e_j\}_{j=1}^n$ соответствует матрица A , и пусть B – матрица того же оператора A в базисе $\{f_j\}_{j=1}^n$. Если C – матрица перехода от базиса $\{e_j\}_{j=1}^n$ к базису $\{f_j\}_{j=1}^n$, то справедливо равенство $B = C^{-1}AC$.

Матрицы, связанные таким равенством, называются подобными.

Пример 6. Линейный оператор $A: V \rightarrow V$ представлен в базисе $\{e_j\}_{j=1}^3$ трехмерного пространства V матрицей

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу оператора A в базисе $\{f_j\}_{j=1}^3$, если

$$\begin{cases} f_1 = e_1 - e_2 + 3e_3, \\ f_2 = 4e_1 + e_2 - e_3, \\ f_3 = 2e_1 - 3e_2. \end{cases}$$

Решение. Матрица перехода от базиса $\{e_j\}_{j=1}^3$ к базису $\{f_j\}_{j=1}^3$ имеет вид

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную ей матрицу. Имеем: $\det C = -36 + 2 - 6 - 3 = -43$,

$$C_{11} = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -3, \quad C_{21} = -\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2, \quad C_{31} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -14,$$

$$C_{12} = -\begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9, \quad C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6, \quad C_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$C_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2, \quad C_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 13, \quad C_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$C^{-1} = -\frac{1}{43} \begin{pmatrix} -3 & -2 & -14 \\ -9 & -6 & 1 \\ -2 & 13 & 5 \end{pmatrix}.$$

Матрица B оператора A в базисе $\{f_j\}_{j=1}^3$ равна

$$\begin{aligned} B &= C^{-1}AC = -\frac{1}{43} \begin{pmatrix} -3 & -2 & -14 \\ -9 & -6 & 1 \\ -2 & 13 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{1}{43} \begin{pmatrix} 18 & -37 & -3 \\ 11 & -25 & 34 \\ 12 & 47 & -45 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{43} \begin{pmatrix} 46 & 38 & 147 \\ 138 & -15 & 97 \\ -170 & 140 & -117 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

На множестве линейных операторов в линейном пространстве V вводятся операции умножения на число, сложения операторов и умножения операторов. Произведением линейного оператора $A: V \rightarrow V$ на число λ называется отображение, обозначаемое λA , которое определяется по правилу $(\lambda A)x = \lambda(Ax)$. Сумма операторов A и B (обозначается $A+B$) определяется по правилу: $(A+B)x = Ax + Bx$. Произведение операторов A и B определяется по правилу: $(AB)x = A(Bx)$.

Доказывается, что если A и B – линейные операторы в линейном пространстве V , то отображения λA , $A+B$, AB также являются линейными операторами. Более того, если линейным операторам A и B в базисе $\{e_j\}_{j=1}^n$ отвечают матрицы A и B соответственно, то в том же базисе: а) оператору λA отвечает матрица λA ; б) оператору $A+B$ отвечает матрица $A+B$; в) оператору AB отвечает матрица AB .

Обратным линейному оператору $A: V \rightarrow V$ называется отображение, обозначаемое A^{-1} , такое что $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, где I – тождественное отображение. Не всякий линейный оператор имеет обратный ему. Однако, если линейный оператор A имеет обратный A^{-1} , говорят оператор A обратим, в этом случае A^{-1} также является линейным оператором.

Теорема 9. Линейный оператор A обратим в том и только том случае, если матрица этого оператора в некотором базисе является невырожденной (на самом деле она будет невырожденной в любом базисе).

Если обратимому линейному оператору A в некотором базисе соответствует матрица A , то оператору A^{-1} в том же базисе соответствует матрица A^{-1} . Справедливы равенства:

$$(A^{-1})^{-1} = A, \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Ядром линейного оператора $A: V \rightarrow V$ называется множество $\ker A = \{x \in V : Ax = \vec{0}\}$. Образом линейного оператора A называется множество $\operatorname{dom} A = \{y \in V : \text{существует } x \in V, \text{ такое что } Ax = y\}$.

Ядро и образ линейного оператора являются подпространствами линейного пространства V .

Теорема 10. Линейный оператор $A: V \rightarrow V$ в конечномерном линейном пространстве обратим в том и только в том случае, если его ядро состоит лишь из нулевого вектора: $\ker A = \{\vec{0}\}$.

Теорема 11. Если $A: V \rightarrow V$ — линейный оператор в n -мерном линейном пространстве, $n < \infty$, то $\dim(\ker A) + \dim(\operatorname{dom} A) = n$.

Теорема 12. Пусть $A: V \rightarrow V$ — линейный оператор в n -мерном линейном пространстве, $n < \infty$, представленный в некотором базисе матрицей A . Тогда $\dim(\operatorname{dom} A) = \operatorname{rang} A$.

В качестве базиса $\operatorname{dom} A$ можно взять систему векторов, представленных вектор-столбцами базисного минора матрицы A .

Пример 7. Найти образ и ядро линейного оператора $A: R^3 \rightarrow R^3$, заданного в каноническом базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Решение. Ядро оператора составляет множество решений матричного уравнения $AX = \vec{0}$,

или

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} \xi_1 + 2\xi_2 + 5\xi_3 = 0, \\ -2\xi_1 + \xi_2 = 0, \\ -\xi_1 - \xi_3 = 0. \end{cases}$$

Эта система равносильна системе

$$\begin{cases} \xi_1 + 2\xi_2 = -5\xi_3, \\ \xi_2 = -2\xi_3. \end{cases}$$

Общее решение системы имеет вид $t \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Таким образом, $\ker A = \{(-t; -2t; t) : t \in \mathcal{R}\}$.

Найдем образ оператора A .

Так как $\dim(\ker A) = 1$, то $\dim(\operatorname{dom} A) = 3 - 1 = 2$. Это означает, что $\operatorname{rang} A = 2$. Нетрудно видеть, что первые два столбца матрицы A образуют линейно-независимую систему; значит, векторы

$f_1 = (1; -2; -1), f_2 = (2; 1; 0)$ образуют базис в $\operatorname{dom} A$. Таким образом,

$$\operatorname{dom} A = \{\alpha(1; -2; -1) + \beta(2; 1; 0) : \alpha, \beta \in \mathcal{R}\}.$$

Пример 8. Найти какой-нибудь базис и определить размерность линейного пространства решений однородной СЛАУ

$$\begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0, \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Запишем матрицу коэффициентов СЛАУ и найдем ее ранг методом элементарных преобразований

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 & 4 & 7 \\ 7 & 4 & -3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix} I_3 \end{matrix} \end{array} \xrightarrow{\sim} \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ 6 & 3 & -2 & 4 & 7 \\ 7 & 4 & -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \end{matrix} \end{array} \sim \\ \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 4 & 16 & 25 \\ 0 & -3 & 4 & 16 & 25 \end{pmatrix} \end{matrix} \end{array} \sim \\ \sim \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 4 & 16 & 25 \end{pmatrix} \end{matrix} \end{array} \end{array}$$

Так как максимальный порядок минора, отличного от нуля, равен 2, то $\operatorname{rang} A = r = 2$. При этом $r < n$ ($2 < 5$), значит однородная СЛАУ имеет бесчисленное множество ненулевых решений. Данную СЛАУ можно записать в виде $A\bar{x} = \Theta$. Это означает, что множество ненулевых решений системы совпадает с ядром линейного оператора с размерностью $\dim(\ker A) = n - r = 5 - 2 = 3$. Итак, это линейное

подпространство с размерностью 3. Следовательно, имеется 3 линейно-независимых решения, которые образуют фундаментальную систему решений (ФСР) однородной СЛАУ.

Выберем в качестве базисного минора $M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$, тогда

x_1, x_2 – базисные, а x_3, x_4, x_5 – свободные неизвестные.

Решим укороченную систему относительно базисных неизвестных

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 + 2x_4 + 3x_5, \\ 3x_2 = 4x_3 + 16x_4 + 25x_5. \end{cases}$$

Откуда находим $x_2 = \frac{4}{3}x_3 + \frac{16}{3}x_4 + \frac{25}{3}x_5$, $x_1 = -\frac{1}{3}x_3 - \frac{10}{3}x_4 - \frac{16}{3}x_5$.

Базисные решения получим, если свободным неизвестным будем придавать поочередно значение 1, полагая остальные равными 0.

x_3	x_4	x_5	x_1	x_2
1	0	0	$-1/3$	$4/3$
0	1	0	$-10/3$	$16/3$
0	0	1	$-16/3$	$25/3$

Запишем базис линейного пространства решений однородной СЛАУ (ФСР)

$$e_1 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{4}{3} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} -\frac{10}{3} \\ \frac{16}{3} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} -\frac{16}{3} \\ \frac{25}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Размерность линейного пространства решений однородной СЛАУ равна 3.

Базис: e_1, e_2, e_3 .

5. Собственные векторы и собственные значения

Пусть $A: V \rightarrow V$ линейный оператор. Число λ называется собственным значением оператора A , если существует ненулевой вектор $x \in V$, такой что $Ax = \lambda x$; при этом вектор x называется собственным вектором оператора A , соответствующим собственному значению λ .

Поскольку существует взаимно-однозначное соответствие между множеством линейных операторов n -мерного пространства и множеством квадратных матриц n -го порядка, то можно доказать, что собственные векторы и собственные значения оператора будут собственными векторами и собственными значениями соответствующей ему матрицы.

Теорема 13. Множество собственных векторов линейного оператора, отвечающих одному и тому же собственному значению, образует линейное подпространство (конечно же, после присоединения к нему нулевого вектора).

Теорема 14. Пусть линейный оператор $A: V \rightarrow V$ в n -мерном линейном пространстве имеет n собственных векторов e_1, e_2, \dots, e_n , образующих линейно независимую систему. Тогда оператор A в базисе $\{e_j\}_{j=1}^n$ представлен диагональной матрицей

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & \lambda_n \end{pmatrix},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – собственные значения оператора A , отвечающие собственным векторам e_1, e_2, \dots, e_n .

Пусть $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ – матрица линейного оператора $A: V \rightarrow V$ в базисе $\{e_j\}_{j=1}^n$. Задача нахождения собственных векторов и собственных значений сводится к следующей: найти числа λ , при которых однородная система

$$\begin{vmatrix} 10-\lambda & 4 & 4 \\ -1 & 1-\lambda & 0 \\ -13 & -6 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda - 50) + 24 + 52(1-\lambda) - 4(5+\lambda) = 0;$$

$$(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3) = 0.$$

$\lambda=1, \lambda=2, \lambda=3$ – собственные значения оператора A (матрицы A).

Найдем соответствующие им собственные векторы.

$\lambda=1$. Этому собственному вектору соответствует система

$$\begin{cases} (10-1)\xi_1 + 4\xi_2 + 4\xi_3 = 0, \\ -\xi_1 + (1-1)\xi_2 = 0, \\ -13\xi_1 - 6\xi_2 + (-5-1)\xi_3 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 9\xi_1 + 4\xi_2 + 4\xi_3 = 0, \\ -\xi_1 = 0, \\ -13\xi_1 - 6\xi_2 - 6\xi_3 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi_1 = 0, \\ \xi_2 + \xi_3 = 0. \end{cases}$$

Ранг этой системы равен 2. Положим $\xi_3=1$.

Тогда $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ – вектор-столбец координат собственного вектора

$x = -e_2 + e_3$, соответствующего собственному значению $\lambda=1$ (в дальнейшем будем просто говорить, что X_1 является собственным вектором оператора A). Множество всех векторов, отвечающих собственному значению $\lambda=1$, имеет вид

$$X = C \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ или } X = \begin{pmatrix} 0 \\ -C \\ C \end{pmatrix},$$

где C – произвольное число, отличное от нуля.

$\lambda=2$. Это собственное значение приводит к системе

$$\begin{cases} (10-2)\xi_1 + 4\xi_2 + 4\xi_3 = 0, \\ -\xi_1 + (1-2)\xi_2 = 0, \\ -13\xi_1 - 6\xi_2 + (-5-2)\xi_3 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 8\xi_1 + 4\xi_2 + 4\xi_3 = 0, \\ -\xi_1 - \xi_2 = 0, \\ -13\xi_1 - 6\xi_2 - 7\xi_3 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi_1 + \xi_2 = 0, \\ 2\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0, \\ 13\xi_1 + 6\xi_2 + 7\xi_3 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_1 + \xi_2 = 0, \\ -\xi_2 + \xi_3 = 0, \\ -7\xi_2 + 7\xi_3 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_1 + \xi_2 = 0, \\ -\xi_2 + \xi_3 = 0. \end{cases}$$

Ранг этой системы равен 2. Объявим ξ_3 свободным неизвестным и

положим $\xi_3=1$. Тогда $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ – собственный вектор матрицы A .

Множество всех векторов, соответствующих собственному значению $\lambda=2$, имеет вид

$$X = C \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ или } X = \begin{pmatrix} -C \\ C \\ C \end{pmatrix},$$

где C – произвольное число, отличное от нуля.

$\lambda=3$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} (10-3)\xi_1 + 4\xi_2 + 4\xi_3 = 0, \\ -\xi_1 + (1-3)\xi_2 = 0, \\ -13\xi_1 - 6\xi_2 + (-5-3)\xi_3 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 7\xi_1 + 4\xi_2 + 4\xi_3 = 0, \\ -\xi_1 - 2\xi_2 = 0, \\ -13\xi_1 - 6\xi_2 - 8\xi_3 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi_1 + 2\xi_2 = 0, \\ 7\xi_1 + 4\xi_2 + 4\xi_3 = 0, \\ 13\xi_1 + 6\xi_2 + 8\xi_3 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_1 + 2\xi_2 = 0, \\ -10\xi_2 + 4\xi_3 = 0, \\ -20\xi_2 + 8\xi_3 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_1 + 2\xi_2 = 0, \\ 5\xi_2 - 2\xi_3 = 0. \end{cases}$$

Ранг системы равен 2. Положим $\xi_3=5$. Тогда $X_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ – собственный

вектор, соответствующий собственному значению $\lambda=3$. Множество всех собственных векторов, отвечающих этому собственному значению, описывается равенством

$$X = C \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ или } X = \begin{pmatrix} -4C \\ 2C \\ 5C \end{pmatrix},$$

где $C \neq 0$.

б) Найдем собственное значение матрицы:

$$\begin{vmatrix} \frac{4}{3}-\lambda & \frac{2}{3} & -1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{8}{3}-\lambda & -1 \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0; \quad \frac{1}{9} \begin{vmatrix} 4-3\lambda & 2 & -1 \\ -2 & 8-3\lambda & -1 \\ -2 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$(1-\lambda)(9\lambda^2 - 36\lambda + 32) + 4 + 4 - 2(8-3\lambda) + 2(4-3\lambda) + 4(1-\lambda) = 0;$$

$$9(1-\lambda)(2-\lambda)^2 = 0.$$

Оператор A имеет два собственных значения: $\lambda=1$ и $\lambda=2$.

Собственному значению $\lambda=1$ отвечает система уравнений

$$\begin{cases} \left(\frac{4}{3}-1\right)\xi_1 + \frac{2}{3}\xi_2 - \xi_3 = 0, \\ -\frac{2}{3}\xi_1 + \left(\frac{8}{3}-1\right)\xi_2 - \xi_3 = 0, \\ -\frac{2}{3}\xi_1 + \frac{2}{3}\xi_2 + (1-1)\xi_3 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_1 + 2\xi_2 - 3\xi_3 = 0, \\ -2\xi_1 + 5\xi_2 - 3\xi_3 = 0, \\ -2\xi_1 + 2\xi_2 = 0; \end{cases} \begin{cases} l_2 + 2l_1 \\ l_3 + 2l_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi_1 + 2\xi_2 - 3\xi_3 = 0, \\ 9\xi_2 - 9\xi_3 = 0, \\ 6\xi_2 - 6\xi_3 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \xi_1 + 2\xi_2 - 3\xi_3 = 0, \\ \xi_2 - \xi_3 = 0. \end{cases}$$

Неизвестное ξ_3 объявим свободным и положим $\xi_3=1$. Тогда $\xi_2=1$, $\xi_1=1$ и

$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ – вектор-столбец координат собственного вектора

$X = e_1 + e_2 + e_3$, соответствующего собственному значению $\lambda=1$.

Множество всех векторов, отвечающих собственному значению $\lambda=1$, имеет вид

$$X = C \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{или} \quad X = \begin{pmatrix} C \\ C \\ C \end{pmatrix},$$

где C – произвольное число, отличное от нуля.

Собственное значение $\lambda=2$ приводит к системе

$$\begin{cases} \left(\frac{4}{3}-2\right)\xi_1 + \frac{2}{3}\xi_2 - \xi_3 = 0, \\ -\frac{2}{3}\xi_1 + \left(\frac{8}{3}-2\right)\xi_2 - \xi_3 = 0, \\ -\frac{2}{3}\xi_1 + \frac{2}{3}\xi_2 + (1-2)\xi_3 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -2\xi_1 + 2\xi_2 - 3\xi_3 = 0, \\ -2\xi_1 + 2\xi_2 - 3\xi_3 = 0, \\ -2\xi_1 + 2\xi_2 - 3\xi_3 = 0. \end{cases}$$

Эта система равносильна уравнению $2\xi_1 - 2\xi_2 + 3\xi_3 = 0$. Неизвестные ξ_2 и ξ_3 объявим свободными.

Положим $\xi_2=1$ и $\xi_3=0$, тогда $\xi_1=1$. Вектор $\mathbf{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ является

собственным (точнее, вектор-столбцом координат собственного вектора), соответствующим собственному значению $\lambda=2$.

Положим $\xi_2=0$ и $\xi_3=1$, тогда $\xi_1=-3/2$. Вектор $\mathbf{X}_3 = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ — другой

собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda=2$. Векторы \mathbf{X}_2 и \mathbf{X}_3 линейно независимы. Множество всех собственных векторов, отвечающих собственному значению $\lambda=2$, имеет вид

$$\mathbf{X} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} -3/2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где C_1, C_2 — произвольные числа, такие что $|C_1| + |C_2| \neq 0$.

Линейный оператор $A: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ в евклидовом пространстве называется самосопряженным, если $(A\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, A\mathbf{y})$ для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{E}$.

Пример 10.

Привести матрицу $A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ -13 & -6 & -5 \end{pmatrix}$ к диагональному виду.

Решение. В примере 9 были найдены собственные числа $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$ и отвечающие им собственные векторы

$$\bar{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{X}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \bar{X}_3 = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ матрицы } A.$$

Так как собственные векторы матрицы, отвечающие различным собственным значениям, линейно независимы, то векторы $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3$ образуют базис в R^3 .

Вспользуемся теоремой 8. Пусть $A: R^3 \rightarrow R^3$ – линейный оператор, которому в базисе $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ отвечает матрица A и пусть B – матрица того же оператора в базисе, состоящем из собственных векторов оператора A $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3$. Тогда матрица B диагональна и $B = C^{-1}AC$, где C – матрица перехода из базиса $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ в базис $\{\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3\}$.

Столбцы матрицы C есть координаты разложения нового базиса по старому.

$$\text{Следовательно, } C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\det C = 1. \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} B = C^{-1}AC &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 7 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ -13 & -6 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 14 & 8 & 8 \\ -6 & -3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Теорема 15. Если $\{e_j\}_{j=1}^n$ – ортонормированный базис в евклидовом пространстве E и $A: E \rightarrow E$ – самосопряженный оператор, то матрица $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$ оператора A в базисе $\{e_j\}_{j=1}^n$ является симметричной: $a_{ij} = a_{ji}$.

Теорема 16. Все собственные значения самосопряженного оператора являются вещественными числами.

Теорема 17. Если $A: E \rightarrow E$ – самосопряженный оператор в евклидовом пространстве, то существует ортонормированный базис в E , состоящий из собственных векторов оператора A .

6. Квадратичные формы

Пусть E – евклидово пространство. Функция двух переменных $A(x, y)$, ставящая в соответствие каждой паре векторов $x, y \in E$ число $A(x, y)$, называется билинейной формой, если она удовлетворяет следующим условиям:

$$A(x_1 + x_2, y) = A(x_1, y) + A(x_2, y);$$

$$A(x, y_1 + y_2) = A(x, y_1) + A(x, y_2);$$

$$A(\lambda x, y) = \lambda A(x, y);$$

$$A(x, \lambda y) = \lambda A(x, y).$$

Билинейная форма $A(x, y)$ называется симметрической, если $A(x, y) = A(y, x)$ для любых $x, y \in E$.

Пусть $A(x, y)$ – симметрическая билинейная форма в n -мерном евклидовом пространстве E . Функция $A(x, x)$ называется квадратичной формой. Если $\{e_j\}_{j=1}^n$ – базис в E , то квадратичная форма $A(x, x)$ в этом базисе имеет вид

$$A(x, x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j,$$

где $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n$; n называется порядком квадратичной формы. Матрица $A = (a_{ij})_{i,j=1, \dots, n}$ называется матрицей квадратичной

формы в базисе $\{e_j\}_{j=1}^n$. Матрица квадратичной формы является симметрической. Матрица квадратичной формы зависит от выбора базиса. Если в некотором базисе квадратичная форма имеет вид

$$A(x, x) = \lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \dots + \lambda_n \xi_n^2,$$

то говорят, что квадратичная форма в этом базисе имеет канонический вид.

Теорема 19. Для любой квадратичной формы существует базис, в котором эта форма имеет канонический вид.

Этой теореме можно придать другую формулировку: любую квадратичную форму можно линейным обратимым преобразованием координат привести к каноническому виду.

Теорема 20. Пусть квадратичная форма $A(x, x)$ задана в R^n и $A = (a_{ij})_{i,j=1,n}$ — матрица формы в каноническом базисе. Существует ортонормированный базис в R^n , состоящий из собственных векторов матрицы A , в котором квадратичная матрица имеет канонический вид. Если U — матрица n -го порядка, столбцы которой составлены из координат собственных векторов матрицы квадратичной формы, образующих ортонормированный базис, то линейное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду, имеет вид

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} \xi'_1 \\ \xi'_2 \\ \vdots \\ \xi'_n \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Такая матрица U называется ортогональной, а преобразование (6) — ортогональным преобразованием.

Пример 10. Привести квадратичную форму

$$A(x, x) = \frac{5}{3}\xi_1^2 + \frac{2}{3}\xi_2^2 + \frac{2}{3}\xi_3^2 + \frac{4}{3}\xi_1\xi_2 + \frac{4}{3}\xi_1\xi_3 - \frac{8}{3}\xi_2\xi_3,$$

в пространстве R^3 к каноническому виду ортогональным преобразованием.

Решение. Матрица квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения и собственные векторы матрицы A .

$$\begin{vmatrix} \frac{5}{3} - \lambda & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} - \lambda & -\frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{2}{3} - \lambda \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 5 - 3\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2 - 3\lambda & -4 \\ 2 & -4 & 2 - 3\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$\lambda^3 - 3\lambda^2 + 4 = 0; (\lambda + 1)(\lambda - 2)^2 = 0.$$

Матрица A имеет два собственных значения: $\lambda = -1$ и $\lambda = 2$.

Составим ортонормированный базис, состоящий из собственных векторов матрицы A .

$\lambda = -1$. Получаем систему

$$\begin{cases} \left(\frac{5}{3} + 1\right)\xi_1 + \frac{2}{3}\xi_2 + \frac{2}{3}\xi_3 = 0, \\ \frac{2}{3}\xi_1 + \left(\frac{2}{3} + 1\right)\xi_2 - \frac{4}{3}\xi_3 = 0, \\ \frac{2}{3}\xi_1 - \frac{4}{3}\xi_2 + \left(\frac{2}{3} + 1\right)\xi_3 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 8\xi_1 + 2\xi_2 + 2\xi_3 = 0, \\ 2\xi_1 + 5\xi_2 - 4\xi_3 = 0, \\ 2\xi_1 - 4\xi_2 + 5\xi_3 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0, \\ 9\xi_2 - 9\xi_3 = 0, \\ -9\xi_2 + 9\xi_3 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 4\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 0, \\ \xi_2 - \xi_3 = 0. \end{cases}$$

Пусть $\xi_3 = 2$. Тогда $\xi_2 = 2$, $\xi_1 = -1$. Вектор $\mathbf{x}_1 = (-1; 2; 2)$ – собственный вектор матрицы A , соответствующий собственному значению $\lambda = -1$. Нормируем его:

$$\|\mathbf{x}_1\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 2^2} = 3, \text{ положим } \mathbf{y}_1 = \frac{1}{3}(-1; 2; 2).$$

$\lambda = 2$. Это собственное значение приводит к системе

$$\begin{cases} \left(\frac{5}{3} - 2\right)\xi_1 + \frac{2}{3}\xi_2 + \frac{2}{3}\xi_3 = 0, \\ \frac{2}{3}\xi_1 + \left(\frac{2}{3} - 2\right)\xi_2 - \frac{4}{3}\xi_3 = 0, \\ \frac{2}{3}\xi_1 - \frac{4}{3}\xi_2 + \left(\frac{2}{3} - 2\right)\xi_3 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -\xi_1 + 2\xi_2 + 2\xi_3 = 0, \\ 2\xi_1 - 4\xi_2 - 4\xi_3 = 0, \\ 2\xi_1 - 4\xi_2 - 4\xi_3 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет ранг 1 и поэтому она равносильна уравнению $\xi_1 - 2\xi_2 - 2\xi_3 = 0$. Объявим неизвестные ξ_2 и ξ_3 свободными:

а) Положим $\xi_2 = 1$ и $\xi_3 = 0$. Тогда $\xi_1 = 2$ и вектор $\mathbf{x}_2 = (2; 1; 0)$ – собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda = 2$.

Нормируя его, получаем другой собственный вектор $\mathbf{y}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2; 1; 0)$.

б) Положим $\xi_2=0$ и $\xi_3=1$. Тогда $\xi_1=2$ и $\mathbf{x}_3=(2;0;1)$ – другой собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda=2$. Пронормируем \mathbf{y}_3 .

$$\text{Имеем } \mathbf{y}_3 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2;0;1).$$

Система векторов $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \mathbf{y}_3$ образует нормированный базис, но не ортогональный; легко проверяется, что $\mathbf{y}_1 \perp \mathbf{y}_2$, $\mathbf{y}_1 \perp \mathbf{y}_3$, но \mathbf{y}_2 и \mathbf{y}_3 не взаимно ортогональны.

Для ортогонализации базиса положим

$$\mathbf{z} = \mathbf{y}_1 \times \mathbf{y}_2 = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{3\sqrt{5}}(-2;4;-5).$$

$\|\mathbf{z}\|=1$. Обозначим $\mathbf{e}_1 = \mathbf{y}_1, \mathbf{e}_2 = \mathbf{y}_2, \mathbf{e}_3 = \mathbf{z}$. Система векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, являющихся собственными векторами, образует ортонормированный базис, в этом базисе квадратная форма имеет следующий канонический вид:

$$A(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = -\xi_1'^2 + 2\xi_2'^2 + 2\xi_3'^2.$$

Преобразование, приводящее исходную квадратичную форму к этому каноническому виду, имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \\ \xi_3' \end{pmatrix},$$

$$\text{где } V = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & 0 & -\frac{\sqrt{5}}{3} \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{cases} \xi_1 = -\frac{1}{3}\xi_1' + \frac{2}{\sqrt{5}}\xi_2' - \frac{2}{3\sqrt{5}}\xi_3', \\ \xi_2 = \frac{2}{3}\xi_1' + \frac{1}{\sqrt{5}}\xi_2' + \frac{4}{3\sqrt{5}}\xi_3', \\ \xi_3 = \frac{2}{3}\xi_1' - \frac{\sqrt{5}}{3}\xi_3'. \end{cases}$$

Пример 11. $A(x, x) = 4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 - 2x_3^2$.

Привести квадратичную форму к сумме квадратов соответствующих координат методом выделения полных квадратов (методом Лагранжа).

Решение. Будем преобразовывать систему координат так, чтобы в квадратичной форме исчезали произведения координат с различными индексами. Выделим в квадратичной форме слагаемые, содержащие переменную x_1 , и дополним эту сумму до полного квадрата

$$\begin{aligned} A(x, x) &= 4(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_1x_3) + 3x_2^2 - 2x_3^2 = \\ &= 4\left[\left(x_1 + x_2 + \frac{x_3}{2}\right)^2 - x_2^2 - \frac{x_3^2}{4} - x_2x_3\right] + 3x_2^2 - 2x_3^2 = \\ &= 4\left(x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)^2 - x_2^2 - 3x_3^2 - 4x_2x_3. \end{aligned}$$

Дальше, полагая $x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3 = x_1'$,

(*)

$$x_2 = x_2',$$

(*)

$$x_3 = x_3',$$

получим новое выражение для квадратичной формы:

$$A(x, x) = 4x_1'^2 - x_2'^2 - 3x_3'^2 - 4x_2'x_3'.$$

В полученной квадратичной форме выделим слагаемые, содержащие x_2' , и дополним эту сумму до полного квадрата:

$$\begin{aligned} A(x, x) &= 4x_1'^2 - (x_2'^2 + 4x_2'x_3') - 3x_3'^2 = 4x_1'^2 - \left[(x_2' + 2x_3')^2 - 4x_3'^2\right] - \\ &- 3x_3'^2 = 4x_1'^2 - (x_2' + 2x_3')^2 + x_3'^2. \end{aligned}$$

Если теперь сделать замену $x_2' + 2x_3' = x_2''$,

$$x_1' = x_1'',$$

(**)

$$x_3' = x_3'',$$

то квадратичная форма в новой системе координат примет канонический вид: $A(x, x) = 4x_1'^2 - x_2'^2 + x_3'^2$.

При этом, подставляя (*) в (**), получим формулы преобразования координат

$$\begin{cases} x_1'' = x_1 + x_2 + \frac{1}{2}x_3; \\ x_2'' = x_2 + 2x_3; \\ x_3'' = x_3, \end{cases}$$

т.е. выражение новых координат через первоначальные координаты.

Одним из применений теории квадратичных форм является приведение уравнений кривых и поверхностей второго порядка к каноническому виду.

Пример 12. Линейным преобразованием координат привести уравнение кривой второго порядка $-3x^2 + 8xy + 3y^2 + 2x - 15 = 0$ к каноническому виду и определить вид кривой.

Решение. Слагаемые второй степени уравнения образуют квадратичную форму: $-3x^2 + 8xy + 3y^2$; матрица этой формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение матрицы A:

$$\begin{vmatrix} -3 - \lambda & 4 \\ 4 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Корни этого уравнения $\lambda = 5$ и $\lambda = -5$ являются собственными значениями матрицы A. Найдем собственные векторы, соответствующие этим собственным значениям. Собственное значение $\lambda = 5$ приводит к системе

$$\begin{cases} (-3 - 5)\xi_1 + 4\xi_2 = 0, \\ 4\xi_1 + (3 - 5)\xi_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -8\xi_1 + 4\xi_2 = 0, \\ 4\xi_1 - 2\xi_2 = 0. \end{cases}$$

Эта система, имеющая ранг, равный единице, равносильна уравнению $2\xi_1 - \xi_2 = 0$.

Положим $\xi_2 = 2$, тогда $\xi_1 = 1$. Вектор $u_1 = (1; 2)$ – собственный вектор матрицы A, соответствующий собственному значению $\lambda = 5$. Нормируем его и получаем

$$\|u_1\| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}; e_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(1; 2).$$

Обратившись к собственному значению $\lambda = -5$, получим систему

$$\begin{cases} (-3+5)\xi_1 + 4\xi_2 = 0, & \begin{cases} 2\xi_1 + 4\xi_2 = 0, \\ \xi_1 + 2\xi_2 = 0. \end{cases} \\ 4\xi_1 + (3+5)\xi_2 = 0; & \begin{cases} 4\xi_1 + 8\xi_2 = 0; \end{cases} \end{cases}$$

Положим $\xi_2 = 1$, тогда $\xi_1 = -2$. Пронормировав собственный вектор

$$u_2 = (-2; 1), \text{ получим } e_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-2; 1).$$

Столбцы координат векторов ортонормированного базиса e_1, e_2 образуют матрицу V

$$V = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Запишем ортогональное преобразование, приводящее вышеуказанную квадратичную форму к каноническому виду:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y', \\ y = \frac{2}{\sqrt{5}}x' + \frac{1}{\sqrt{5}}y'. \end{cases}$$

Исходное уравнение при этом преобразовании примет вид

$$5x'^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}x'y' - 5y'^2 - \frac{4}{\sqrt{5}}y' - 15 = 0.$$

Преобразуя это уравнение, получим

$$5\left(x'^2 + \frac{2}{5\sqrt{5}}x'y' + \frac{1}{125}\right) - 5\left(y'^2 + \frac{4}{5\sqrt{5}}y' + \frac{4}{125}\right) - \frac{372}{125} = 0,$$

или

$$5\left(x' + \frac{1}{5\sqrt{5}}\right)^2 - 5\left(y' + \frac{2}{5\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{372}{125}.$$

После преобразования параллельного переноса

$$\begin{cases} x'' = x' + \frac{1}{5\sqrt{5}} \\ y'' = y' + \frac{2}{5\sqrt{5}} \end{cases}$$

получим уравнение

$$5x^{n^2} - 5y^{n^2} = \frac{372}{125}, \text{ или } \frac{x^{n^2}}{\frac{372}{625}} - \frac{y^{n^2}}{\frac{372}{625}} = 1.$$

Таким образом, исходное уравнение является уравнением гиперболы.

Пример 13. Преобразованиями координат привести уравнение поверхности второго порядка $2x^2 - y^2 + 2z^2 - 2xy + 6yz - 4x + z - 1 = 0$ к каноническому виду и определить вид этой поверхности.

Решение. Слагаемые второй степени в уравнении поверхности образуют квадратичную форму: $2x^2 - y^2 + 2z^2 - 2xy + 6yz$; матрицей этой формы является

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение этой матрицы:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & -1-\lambda & 3 \\ 0 & 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Корнями этого уравнения являются $\lambda_1=2, \lambda_2=4, \lambda_3=-3$ – собственные значения матрицы A . Найдем собственные векторы, соответствующие этим собственным значениям.

Собственное значение $\lambda=2$ приводит к системе

$$\begin{cases} (2-2)\xi_1 - \xi_2 = 0, \\ -\xi_1 + (-1-2)\xi_2 + \xi_3 = 0, \\ 3\xi_2 + (2-2)\xi_3 = 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} \xi_2 = 0, \\ -\xi_1 - 3\xi_2 + 3\xi_3 = 0, \\ 3\xi_2 = 0. \end{cases}$$

Решением этой системы является любой вектор вида $(3t; 0; t)$, где t – произвольное число. Положим $t=1$, получим собственный вектор $\mathbf{u}_1 = (3; 0; 1)$.

При $\lambda=4$ получаем систему

$$\begin{cases} (2-4)\xi_1 - \xi_2 = 0, \\ -\xi_1 + (-1-4)\xi_2 + 3\xi_3 = 0, \\ 3\xi_2 + (2-4)\xi_3 = 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} -2\xi_1 - \xi_2 = 0, \\ -\xi_1 - 5\xi_2 + 3\xi_3 = 0, \\ 3\xi_2 - 2\xi_3 = 0. \end{cases}$$

Одним из решений этой системы является $\mathbf{u}_2 = (-1; 2; 3)$ – собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda=4$.

В случае $\lambda = -3$ приходим к системе

$$\begin{cases} (2+3)\xi_1 - \xi_2 = 0, \\ -\xi_1 + (-1+3)\xi_2 + 3\xi_3 = 0, \\ 3\xi_2 + (2+3)\xi_3 = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 5\xi_1 - \xi_2 = 0, \\ -\xi_1 + 2\xi_2 + 3\xi_3 = 0, \\ 3\xi_2 + 5\xi_3 = 0. \end{cases}$$

Ранг этой системы равен двум, взяв $\xi_3 = -3$, получим решение $\mathbf{u}_3 = (1; 5; -3)$ – собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda = -3$.

Нормируем векторы $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3$:

$$\|\mathbf{u}_1\| = \sqrt{3^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{10}, \quad \mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(3; 0; 1);$$

$$\|\mathbf{u}_2\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{14}}\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{14}}(-1; 2; 3);$$

$$\|\mathbf{u}_3\| = \sqrt{1^2 + 5^2 + (-3)^2} = \sqrt{35}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{35}}\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{35}}(1; 5; -3).$$

Составим матрицу ортогонального преобразования из координат векторов ортонормированного базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:

$$V = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{14}} & \frac{1}{\sqrt{35}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{14}} & \frac{5}{\sqrt{35}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{14}} & -\frac{3}{\sqrt{35}} \end{pmatrix}$$

С помощью матрицы V запишем искомое ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму, составленную из старших членов исходного уравнения, к каноническому виду:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{\sqrt{10}}x' - \frac{1}{\sqrt{14}}y' + \frac{1}{\sqrt{35}}z', \\ y = \frac{2}{\sqrt{14}}y' + \frac{5}{\sqrt{35}}z', \\ z = \frac{1}{\sqrt{10}}x' + \frac{3}{\sqrt{14}}y' - \frac{3}{\sqrt{35}}z'. \end{cases}$$

При этом первоначальное уравнение поверхности примет вид

$$2x'^2 - \frac{11}{\sqrt{10}}x' + 4y'^2 + \frac{7}{\sqrt{14}}y' - 3z'^2 - \frac{7}{\sqrt{35}}z' - 1 = 0.$$

Преобразуя это уравнение, получим

$$2\left(x' - \frac{11}{4\sqrt{10}}\right)^2 + 4\left(y' + \frac{7}{8\sqrt{14}}\right)^2 - 3\left(z' + \frac{7}{2\sqrt{35}}\right)^2 - \frac{269}{160} = 0.$$

После преобразования параллельного переноса

$$\begin{cases} x'' = x' - \frac{11}{4\sqrt{10}}, \\ y'' = y' + \frac{7}{8\sqrt{14}}, \\ z'' = z' + \frac{7}{2\sqrt{35}} \end{cases}$$

получим уравнение

$$2x''^2 + 4y''^2 - 3z''^2 = \frac{269}{160}, \text{ или } \frac{x''^2}{a^2} + \frac{y''^2}{b^2} - \frac{z''^2}{c^2} = 1,$$

$$\text{где } a = \sqrt{\frac{269}{320}}, \quad b = \sqrt{\frac{269}{640}}, \quad c = \sqrt{\frac{269}{480}}.$$

Таким образом, исходное уравнение является уравнением однополостного гиперболоида.

Задание 10.1

Убедившись, что система векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_4$ образует базис в \mathcal{A}_3 , найдите разложение вектора \mathbf{x} в этом базисе.

1) $\mathbf{x}_1 = (1, 1, 2, 0), \mathbf{x}_2 = (2, 0, 1, -1), \mathbf{x}_3 = (0, 2, -1, 3), \mathbf{x}_4 = (1, 0, 1, -2),$
 $\mathbf{x} = (1, 1, 0, 2).$

2) $\mathbf{x}_1 = (0, 2, 1, -1), \mathbf{x}_2 = (0, 3, 1, 0), \mathbf{x}_3 = (1, -2, 0, 1), \mathbf{x}_4 = (2, 1, 0, -1),$
 $\mathbf{x} = (-1, 0, 1, 3).$

3) $\mathbf{x}_1 = (1, -1, 1, -1), \mathbf{x}_2 = (1, 3, 0, 0), \mathbf{x}_3 = (-3, -2, 1, 1), \mathbf{x}_4 = (1, 0, 2, 1),$
 $\mathbf{x} = (3, -1, 1, 0).$

4) $\mathbf{x}_1 = (3, 1, 2, 0), \mathbf{x}_2 = (1, -1, 0, 1), \mathbf{x}_3 = (0, 2, 3, 1), \mathbf{x}_4 = (-1, 3, 0, 1),$
 $\mathbf{x} = (1, 2, 1, 0).$

5) $\mathbf{x}_1 = (1, 0, 2, 0), \mathbf{x}_2 = (1, 5, 0, 2), \mathbf{x}_3 = (1, 0, 3, 1), \mathbf{x}_4 = (0, -1, 2, 1),$

$$\mathbf{x} = (4, 2, 0, -2).$$

$$6) \mathbf{x}_1 = (6, 1, 0, 2), \mathbf{x}_2 = (-3, 0, 1, 2), \mathbf{x}_3 = (1, 0, 2, 1), \mathbf{x}_4 = (1, 0, 3, -2), \\ \mathbf{x} = (2, 1, 0, -1).$$

$$7) \mathbf{x}_1 = (2, -1, 3, 0), \mathbf{x}_2 = (5, 1, 0, -2), \mathbf{x}_3 = (2, 0, 2, 0), \mathbf{x}_4 = (1, 0, 2, 1), \\ \mathbf{x} = (0, 2, 1, -2).$$

$$8) \mathbf{x}_1 = (4, 0, -2, 1), \mathbf{x}_2 = (0, 2, 0, 1), \mathbf{x}_3 = (2, 0, 1, 3), \mathbf{x}_4 = (1, 2, 0, -1), \\ \mathbf{x} = (0, 2, -1, 1).$$

$$9) \mathbf{x}_1 = (1, 3, 0, -1), \mathbf{x}_2 = (0, 2, 1, 2), \mathbf{x}_3 = (-1, 5, 0, 0), \mathbf{x}_4 = (1, 2, 2, 3), \\ \mathbf{x} = (1, -1, 0, 3).$$

$$10) \mathbf{x}_1 = (2, 1, 6, 0), \mathbf{x}_2 = (1, -1, 0, 1), \mathbf{x}_3 = (1, 0, -2, 2), \mathbf{x}_4 = (2, 0, 3, 1), \\ \mathbf{x} = (1, -2, 0, 2).$$

$$11) \mathbf{x}_1 = (1, -2, 0, 5), \mathbf{x}_2 = (3, 0, 1, -1), \mathbf{x}_3 = (4, 1, 0, 2), \mathbf{x}_4 = (0, 2, -1, 2), \\ \mathbf{x} = (2, -4, 0, 1).$$

$$12) \mathbf{x}_1 = (2, 0, 1, 5), \mathbf{x}_2 = (-2, 1, 2, 1), \mathbf{x}_3 = (3, 0, -2, 2), \mathbf{x}_4 = (-1, 2, 0, 1), \\ \mathbf{x} = (2, 5, -1, 0).$$

$$13) \mathbf{x}_1 = (2, 1, 0, -1), \mathbf{x}_2 = (-2, 4, 3, 0), \mathbf{x}_3 = (0, 1, 1, 2), \mathbf{x}_4 = (0, -2, 0, 6), \\ \mathbf{x} = (6, 0, 2, -3).$$

$$14) \mathbf{x}_1 = (4, 0, 1, 2), \mathbf{x}_2 = (1, 1, 0, -2), \mathbf{x}_3 = (3, 0, 2, -1), \mathbf{x}_4 = (0, -3, 1, 2), \\ \mathbf{x} = (1, 2, 0, -2).$$

$$15) \mathbf{x}_1 = (-1, 2, 3, 0), \mathbf{x}_2 = (3, 1, 0, -1), \mathbf{x}_3 = (4, 0, 1, 2), \mathbf{x}_4 = (0, 2, 1, -1), \\ \mathbf{x} = (5, 5, 0, -1).$$

$$16) \mathbf{x}_1 = (1, -2, 0, 4), \mathbf{x}_2 = (-2, 0, 1, -1), \mathbf{x}_3 = (0, 2, 1, 3), \mathbf{x}_4 = (4, 0, 1, 1), \\ \mathbf{x} = (0, 2, 3, -1).$$

$$17) \mathbf{x}_1 = (-1, 0, 2, 1), \mathbf{x}_2 = (1, 3, 0, 1), \mathbf{x}_3 = (-3, 0, 3, 1), \mathbf{x}_4 = (1, 2, 0, -1), \\ \mathbf{x} = (1, 2, 0, -2).$$

$$18) \mathbf{x}_1 = (1, 2, 0, 1), \mathbf{x}_2 = (4, 0, 2, -1), \mathbf{x}_3 = (-1, 0, 2, 3), \mathbf{x}_4 = (0, 3, 2, 1), \\ \mathbf{x} = (1, 2, 0, -2).$$

$$19) \mathbf{x}_1 = (1, -1, 0, 2), \mathbf{x}_2 = (2, -1, 0, 3), \mathbf{x}_3 = (1, 0, 2, 1), \mathbf{x}_4 = (1, 0, 1, 3), \\ \mathbf{x} = (4, 2, 5, 0).$$

$$20) \mathbf{x}_1 = (2, 1, 1, 0), \mathbf{x}_2 = (1, 2, 1, -2), \mathbf{x}_3 = (0, -1, 3, 1), \mathbf{x}_4 = (1, 1, 0, 5),$$

$$\mathbf{x} = (-2, 0, -3, -4).$$

$$21) \mathbf{x}_1 = (1, -1, 0, 2), \mathbf{x}_2 = (1, 0, -3, 1), \mathbf{x}_3 = (1, 3, 0, 2), \mathbf{x}_4 = (0, 1, 2, 1),$$

$$\mathbf{x} = (0, 5, -2, -1).$$

$$22) \mathbf{x}_1 = (3, -1, 1, 0), \mathbf{x}_2 = (1, 2, 0, 5), \mathbf{x}_3 = (3, 1, 0, -1), \mathbf{x}_4 = (-2, 0, 1, 2),$$

$$\mathbf{x} = (1, 0, -1, -3).$$

$$23) \mathbf{x}_1 = (0, 3, 2, 1), \mathbf{x}_2 = (-1, 0, 2, -1), \mathbf{x}_3 = (3, 2, 0, 3), \mathbf{x}_4 = (1, 0, 1, -2),$$

$$\mathbf{x} = (1, 0, -1, -3).$$

$$24) \mathbf{x}_1 = (1, 2, -3, 0), \mathbf{x}_2 = (4, 0, 1, 1), \mathbf{x}_3 = (0, 1, 0, -1), \mathbf{x}_4 = (4, 0, 1, 2),$$

$$\mathbf{x} = (5, -2, -3, 0).$$

$$25) \mathbf{x}_1 = (0, 2, 3, 1), \mathbf{x}_2 = (2, 0, 2, 1), \mathbf{x}_3 = (-1, 1, 1, 0), \mathbf{x}_4 = (2, 5, 0, 1),$$

$$\mathbf{x} = (0, 4, 1, -3).$$

$$26) \mathbf{x}_1 = (2, 1, 5, 0), \mathbf{x}_2 = (-1, 2, 0, 2), \mathbf{x}_3 = (-1, 0, 1, 3), \mathbf{x}_4 = (2, 0, 1, 2),$$

$$\mathbf{x} = (5, 0, 1, -1).$$

$$27) \mathbf{x}_1 = (8, 3, 5, 0), \mathbf{x}_2 = (1, -2, 0, 1), \mathbf{x}_3 = (2, 0, 3, 1), \mathbf{x}_4 = (2, -1, -1, 0),$$

$$\mathbf{x} = (1, -3, -2, 0).$$

$$28) \mathbf{x}_1 = (1, 1, 2, 0), \mathbf{x}_2 = (2, 0, 1, -1), \mathbf{x}_3 = (0, 2, -1, 3), \mathbf{x}_4 = (1, 0, 1, -2),$$

$$\mathbf{x} = (1, 1, 0, 2).$$

$$29) \mathbf{x}_1 = (0, 2, 1, 1), \mathbf{x}_2 = (5, 1, -1, 0), \mathbf{x}_3 = (-2, 3, 0, 1), \mathbf{x}_4 = (0, 1, 1, 2),$$

$$\mathbf{x} = (4, 2, 0, -2).$$

$$30) \mathbf{x}_1 = (1, 0, 2, 4), \mathbf{x}_2 = (1, -2, 0, 1), \mathbf{x}_3 = (3, 3, 0, 1), \mathbf{x}_4 = (1, 2, 0, 3),$$

$$\mathbf{x} = (5, 2, 0, -1).$$

Задание 10.2

Пусть e_1, e_2, e_3 – базис в линейном пространстве V и заданы векторы f_1, f_2, f_3 . Докажите, что f_1, f_2, f_3 образуют базис в V и найдите разложение вектора \mathbf{x} в этом базисе, если:

$$1) \begin{cases} f_1 = 2e_1 + e_2 - e_3, \\ f_2 = e_1 - 3e_2 + e_3, \\ f_3 = -e_1 + e_2 - e_3, \end{cases} \quad \mathbf{x} = 4e_1 + 2e_2 - 5e_3;$$

- $$2) \begin{cases} f_1 = e_1 + 2e_2 - 3e_3, \\ f_2 = -2e_1 + 2e_2 + e_3, \\ f_3 = 2e_1 - e_2 - e_3 \end{cases} \quad \mathbf{x} = -2e_1 + e_2 - 2e_3;$$
- $$3) \begin{cases} f_1 = e_1 + e_2 - 4e_3, \\ f_2 = 2e_1 - 2e_2 + e_3, \\ f_3 = e_1 - e_2 + e_3 \end{cases} \quad \mathbf{x} = 2e_1 - 2e_2 + e_3;$$
- $$4) \begin{cases} f_1 = 3e_1 + e_2 + e_3, \\ f_2 = e_1 + 2e_2 - e_3, \\ f_3 = e_1 - e_2 + 2e_3 \end{cases} \quad \mathbf{x} = 2e_1 - 3e_2 + e_3;$$
- $$5) \begin{cases} f_1 = 2e_1 - e_2 + e_3, \\ f_2 = e_1 + e_2 - 2e_3, \\ f_3 = e_1 - e_2 + e_3 \end{cases} \quad \mathbf{x} = e_1 - e_2 + e_3;$$
- $$6) \begin{cases} f_1 = e_1 - e_2 + e_3, \\ f_2 = 4e_1 + 5e_2 - e_3, \\ f_3 = e_1 - 3e_2 + 2e_3 \end{cases} \quad \mathbf{x} = e_1 + 5e_2 + e_3;$$
- $$7) \begin{cases} f_1 = e_1 + 2e_2 - e_3, \\ f_2 = -4e_1 + 2e_2 - e_3, \\ f_3 = e_1 - 2e_2 + e_3 \end{cases} \quad \mathbf{x} = -2e_1 + 3e_2 - e_3;$$
- $$8) \begin{cases} f_1 = 2e_1 + 3e_2 - e_3, \\ f_2 = e_1 + 2e_2 - e_3, \\ f_3 = -e_1 - 2e_2 + 2e_3 \end{cases} \quad \mathbf{x} = 5e_1 - e_2 - 4e_3;$$
- $$9) \begin{cases} f_1 = e_1 + 2e_2 + 3e_3, \\ f_2 = 3e_1 + 2e_2 + e_3, \\ f_3 = -e_1 - 2e_2 - e_3 \end{cases} \quad \mathbf{x} = e_1 + 2e_2 + 3e_3;$$
- $$10) \begin{cases} f_1 = 6e_1 + 2e_2 + e_3, \\ f_2 = 4e_1 + 2e_2 + 2e_3, \\ f_3 = 2e_1 - 2e_2 - e_3 \end{cases} \quad \mathbf{x} = 3e_1 + 3e_2 - 4e_3;$$
- $$11) \begin{cases} f_1 = e_1 + e_2 - 2e_3, \\ f_2 = 4e_1 + 2e_2 - 2e_3, \\ f_3 = 2e_1 + e_2 + e_3 \end{cases} \quad \mathbf{x} = -2e_1 - 3e_2 + e_3;$$

- $$12) \begin{cases} f_1 = 2e_1 + e_2 + e_3, \\ f_2 = -4e_1 + 2e_2 + 3e_3, \\ f_3 = -2e_1 - 3e_2 - 4e_3 \end{cases} \quad \mathbf{x} = e_1 - 5e_2 + 2e_3;$$
- $$13) \begin{cases} f_1 = -2e_1 - e_2 + 2e_3, \\ f_2 = 6e_1 - e_2 + 2e_3, \\ f_3 = e_1 - 3e_2 + e_3 \end{cases} \quad \mathbf{x} = -e_1 + 3e_2 + e_3;$$
- $$14) \begin{cases} f_1 = e_1 + 2e_2 + 2e_3, \\ f_2 = 3e_1 - 4e_2 + 2e_3, \\ f_3 = e_1 + 2e_2 + e_3 \end{cases} \quad \mathbf{x} = -4e_1 + 4e_2 + 3e_3;$$
- $$15) \begin{cases} f_1 = 4e_1 + e_2 + e_3, \\ f_2 = 3e_1 + e_2 + 2e_3, \\ f_3 = -e_1 + 2e_2 + e_3 \end{cases} \quad \mathbf{x} = 5e_1 - 4e_2 + 2e_3;$$
- $$16) \begin{cases} f_1 = e_1 + 4e_2 + e_3, \\ f_2 = 3e_1 + e_2 - 2e_3, \\ f_3 = 3e_1 - 3e_2 - 2e_3 \end{cases} \quad \mathbf{x} = e_1 - 5e_2 + e_3;$$
- $$17) \begin{cases} f_1 = 2e_1 + 4e_2 + e_3, \\ f_2 = e_1 - 4e_2 + e_3, \\ f_3 = 3e_1 + 2e_2 + e_3 \end{cases} \quad \mathbf{x} = 5e_1 - 3e_2 - 3e_3;$$
- $$18) \begin{cases} f_1 = -4e_1 - e_2 + 2e_3, \\ f_2 = 2e_1 + e_2 + e_3, \\ f_3 = -2e_1 + e_2 + 3e_3 \end{cases} \quad \mathbf{x} = -e_1 - 3e_2 - e_3;$$
- $$19) \begin{cases} f_1 = e_1 - e_2 + 2e_3, \\ f_2 = e_1 + e_2 + e_3, \\ f_3 = 2e_1 + e_2 + 2e_3 \end{cases} \quad \mathbf{x} = e_1 + 4e_2 - 2e_3;$$
- $$20) \begin{cases} f_1 = e_1 + e_2 + 3e_3, \\ f_2 = 3e_1 + e_2 + e_3, \\ f_3 = 2e_1 + 2e_2 + 2e_3 \end{cases} \quad \mathbf{x} = -e_1 + 2e_2 + 5e_3;$$
- $$21) \begin{cases} f_1 = -2e_1 + e_2 - e_3, \\ f_2 = e_1 + 2e_2 + e_3, \\ f_3 = 2e_1 - 2e_2 + e_3 \end{cases} \quad \mathbf{x} = -2e_1 + 4e_2 - 4e_3;$$

- 22) $\begin{cases} f_1 = e_1 + 2e_2 - 3e_3, \\ f_2 = -2e_1 + e_2 - 2e_3, \\ f_3 = e_1 - e_2 + 2e_3 \end{cases} \quad \mathbf{x} = e_1 + 3e_2 + 5e_3 ;$
- 23) $\begin{cases} f_1 = 2e_1 + 2e_2 + e_3, \\ f_2 = 2e_1 + e_2 - 2e_3, \\ f_3 = -4e_1 - e_2 + 3e_3 \end{cases} \quad \mathbf{x} = -e_1 - 5e_2 + 2e_3 ;$
- 24) $\begin{cases} f_1 = -e_1 + 3e_2 - 2e_3, \\ f_2 = 5e_1 + e_2 - 2e_3, \\ f_3 = 4e_1 - e_2 + e_3 \end{cases} \quad \mathbf{x} = e_1 - 6e_2 - 4e_3 ;$
- 25) $\begin{cases} f_1 = 2e_1 + 3e_2 + e_3, \\ f_2 = 2e_1 - 2e_2 - e_3, \\ f_3 = -4e_1 + e_2 + 2e_3 \end{cases} \quad \mathbf{x} = -3e_1 + 3e_2 - e_3 ;$
- 26) $\begin{cases} f_1 = e_1 + 2e_2 + e_3, \\ f_2 = -2e_1 - 2e_2 - e_3, \\ f_3 = -e_1 + e_2 + 2e_3 \end{cases} \quad \mathbf{x} = e_1 - 2e_2 - 5e_3 ;$
- 27) $\begin{cases} f_1 = -2e_1 + 2e_2 + e_3, \\ f_2 = 4e_1 - e_2 + e_3, \\ f_3 = 4e_1 + e_2 + e_3 \end{cases} \quad \mathbf{x} = 3e_1 + 2e_2 + 5e_3 ;$
- 28) $\begin{cases} f_1 = e_1 + 2e_2 + e_3, \\ f_2 = 4e_1 - e_2 - 2e_3, \\ f_3 = -2e_1 + e_2 + e_3 \end{cases} \quad \mathbf{x} = -2e_1 + 4e_2 - 2e_3 ;$
- 29) $\begin{cases} f_1 = 3e_1 + 2e_2 + e_3, \\ f_2 = -2e_1 - 3e_2 + e_3, \\ f_3 = -2e_1 + e_2 + e_3 \end{cases} \quad \mathbf{x} = 4e_1 + 2e_2 - 5e_3 ;$
- 30) $\begin{cases} f_1 = 3e_1 + 2e_2 - 2e_3, \\ f_2 = -4e_1 - e_2 + 2e_3, \\ f_3 = -e_1 + e_2 + e_3 \end{cases} \quad \mathbf{x} = 5e_1 - e_2 - 2e_3 .$

Задание 10.3

Образует ли линейное пространство множество V , заданное по правилу:

1. а) $V = \{ \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid \xi_1 - 2\xi_3 = 0 \},$

б) $V = \{ \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid \xi_3 + \xi_4 = 1 \}.$

2. а) $V = \{ \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid 2\xi_2 + \xi_3 = 0 \},$

б) $V = \{ \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid \xi_2 - \xi_4 = 1 \}.$

3. а) $V = \{ \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid \xi_1 + 2\xi_4 = 0 \},$

б) $V = \{ \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid 3\xi_1 - \xi_4 = 5 \}.$

4. а) $V = \{ \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid \xi_4 - \xi_3 = 0 \},$

б) $V = \{ \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid 5\xi_2 + \xi_3 = 2 \}.$

5. а) $V = \{ \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid 3\xi_2 + 2\xi_3 = 0 \},$

б) $V = \{ \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid 2\xi_1 - \xi_2 = 1 \}.$

6. а) $V = \{ \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid 5\xi_4 + 2\xi_2 = 0 \},$

б) $V = \{ \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid 2\xi_1 - 3\xi_4 = 5 \}.$

7. а) $V = \{ \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid 2\xi_2 + \xi_3 = 0 \},$

б) $V = \{ \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid 5\xi_2 - \xi_1 = 4 \}.$

8. а) $V = \{ \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid 2\xi_1 + 2\xi_4 = 0 \},$

б) $V = \{ \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid \xi_1 - 2\xi_4 = 5 \}.$

9. а) $V = \{ \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid 2\xi_3 - \xi_2 = 0 \},$

б) $V = \{ \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid \xi_1 - 4\xi_4 = 1 \}.$

10. а) $V = \{ \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid 2\xi_2 + \xi_4 = 0 \},$

б) $V = \{ \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid \xi_1 - 5\xi_4 = 2 \}.$

11. а) $V = \{ \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid 3\xi_3 - 2\xi_1 = 0 \},$

б) $V = \{ \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid 2\xi_1 - \xi_4 = 3 \}.$

12. а) $V = \{ \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid 2\xi_4 - \xi_3 = 0 \},$

б) $V = \{ \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid 2\xi_1 - \xi_2 = 3 \}.$

13. а) $V = \{ \xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid 3\xi_4 - \xi_3 = 0 \},$

- 6) $V = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid 2\xi_1 + 3\xi_4 = 4\}$.
14. a) $V = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid \xi_2 + \xi_3 = 0\}$,
 б) $V = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid 2\xi_1 - \xi_4 = 1\}$.
15. a) $V = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid 5\xi_1 + 2\xi_3 = 0\}$,
 б) $V = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid -\xi_3 - \xi_2 = 2\}$.
16. a) $V = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid 2\xi_1 - \xi_2 = 0\}$,
 б) $V = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid 2\xi_3 - 2\xi_2 = 3\}$.
17. a) $V = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid \xi_4 - 2\xi_2 = 0\}$,
 б) $V = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid \xi_1 + 2\xi_4 = 1\}$.
18. a) $V = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid 3\xi_1 - 2\xi_4 = 0\}$,
 б) $V = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid 3\xi_3 - \xi_1 = 4\}$.
19. a) $V = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid 3\xi_1 - \xi_4 = 0\}$,
 б) $V = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid 2\xi_1 - \xi_4 = 5\}$.
20. a) $V = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid 5\xi_1 - \xi_4 = 0\}$,
 б) $V = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid 3\xi_3 + 4\xi_4 = 1\}$.
21. a) $V = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid 3\xi_4 - \xi_1 = 0\}$,
 б) $V = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid \xi_3 - \xi_2 = 3\}$.
22. a) $V = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid \xi_1 - \xi_3 = 0\}$,
 б) $V = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid 3\xi_1 + 4\xi_4 = 2\}$.
23. a) $V = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid 2\xi_1 + 4\xi_2 = 0\}$,
 б) $V = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid \xi_1 + 4\xi_4 = 1\}$.
24. a) $V = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid -2\xi_1 - \xi_3 = 0\}$,
 б) $V = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid -4\xi_3 + \xi_4 = 1\}$.
25. a) $V = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid 2\xi_3 - \xi_4 = 0\}$,
 б) $V = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid \xi_2 + 3\xi_4 = 3\}$.
26. a) $V = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid 4\xi_4 - 3\xi_3 = 0\}$,
 б) $V = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid \xi_2 + 2\xi_3 = 2\}$.
27. a) $V = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid 4\xi_1 - \xi_4 = 0\}$,

- б) $V = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid 2\xi_3 - \xi_2 = 4\}$.
28. а) $V = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid 5\xi_2 + 2\xi_4 = 0\}$,
- б) $V = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid 2\xi_3 - \xi_1 = 1\}$.
29. а) $V = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid 4\xi_1 + \xi_3 = 0\}$,
- б) $V = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid 2\xi_1 + 3\xi_4 = 2\}$.
30. а) $V = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid -2\xi_1 - 3\xi_3 = 0\}$,
- б) $V = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4 \mid 2\xi_1 - 5\xi_4 = 3\}$.

Задание 10.4

Докажите линейность, найдите матрицу, область значений и ядро оператора:

- 1) проектирования на ось OY ;
- 2) проектирования на плоскость $y = 0$;
- 3) проектирования на ось OX ;
- 4) зеркального отражения относительно плоскости $x - y = 0$;
- 5) зеркального отражения относительно плоскости $y + z = 0$;
- 6) проектирования на плоскость $z = 0$;
- 7) проектирования на плоскость $y - z = 0$;
- 8) проектирования на ось OZ ;
- 9) зеркального отражения относительно плоскости OYZ ;
- 10) проектирования на плоскость $x - \sqrt{3}z = 0$;
- 11) проектирования на плоскость $x - y = 0$;
- 12) зеркального отражения относительно плоскости $x + y = 0$;
- 13) зеркального отражения относительно плоскости $y - z = 0$;
- 14) проектирования на плоскость $x + y = 0$;
- 15) проектирования на плоскость $x - z = 0$;
- 16) зеркального отражения относительно плоскости $x - z = 0$;
- 17) зеркального отражения относительно плоскости OXY ;
- 18) поворота относительно оси OX на угол $\frac{\pi}{2}$ в положительном направлении;
- 19) проектирования на плоскость $y = \sqrt{3}x$;
- 20) проектирования на плоскость $y + z = 0$;
- 21) проектирования на плоскость $\sqrt{3}y + z = 0$;
- 22) зеркального отражения относительно плоскости $x + z = 0$;

- 23) зеркального отражения относительно плоскости OXZ ;
- 24) поворота в положительном направлении относительно оси OY на угол $\frac{\pi}{2}$;
- 25) проектирования на плоскость $x + z = 0$;
- 26) проектирования на плоскость $y + \sqrt{3}z = 0$;
- 27) поворота в положительном направлении относительно оси OZ на угол $\frac{\pi}{2}$;
- 28) проектирования на плоскость $\sqrt{3}x + y = 0$;
- 29) проектирования на плоскость $\sqrt{3}x + z = 0$;
- 30) поворота в положительном направлении относительно оси OZ на угол $\frac{\pi}{4}$.

Задание 10.5

Линейный оператор $A: V \rightarrow V$ в базисе e_1, e_2, e_3 представлен данной матрицей. Найдите матрицу этого линейного оператора в базисе f_1, f_2, f_3 .

$$1. A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{cases} f_1 = e_1 - e_2 + 3e_3, \\ f_2 = 4e_1 + e_2 - e_3, \\ f_3 = 2e_1 - 3e_2; \end{cases}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{cases} f_1 = 2e_1 + e_2 + 4e_3, \\ f_2 = e_1 - e_2 - 2e_3, \\ f_3 = e_2 + 2e_3; \end{cases}$$

$$3. A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{cases} f_1 = 3e_1 + 2e_2 + e_3, \\ f_2 = -e_1 - e_3, \\ f_3 = -e_1 + 4e_2 + e_3; \end{cases}$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{cases} f_1 = -2e_1 + e_3, \\ f_2 = -2e_1 + 3e_2 + 2e_3, \\ f_3 = -2e_1 + 2e_2 + e_3; \end{cases}$$

$$5. A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{cases} f_1 = -2e_2 - e_3, \\ f_2 = 2e_1 - 3e_2 + 3e_3, \\ f_3 = -e_1 + e_2 + 2e_3; \end{cases}$$

$$6. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & 2 & -5 \end{pmatrix}, \begin{cases} f_1 = 3e_1 + 3e_2 + e_3, \\ f_2 = -e_2 + 2e_3, \\ f_3 = e_1 + 2e_2 - 3e_3; \end{cases}$$

$$7. A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \begin{cases} f_1 = 2e_1 + 2e_2 - e_3, \\ f_2 = -e_1 + 2e_2 + 2e_3, \\ f_3 = 3e_2 + e_3; \end{cases}$$

$$8. A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{cases} f_1 = 2e_1 - e_3, \\ f_2 = -2e_1 + e_2 + 2e_3, \\ f_3 = 2e_1 + 4e_2 - 2e_3; \end{cases}$$

$$9. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{cases} f_1 = 3e_1 - 2e_2 + 2e_3, \\ f_2 = e_1 - 3e_2, \\ f_3 = 4e_1 - e_2 + e_3; \end{cases}$$

$$10. A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{cases} f_1 = e_1 - 4e_2 + e_3, \\ f_2 = -e_2 + e_3, \\ f_3 = -2e_1 + 2e_2 + e_3; \end{cases}$$

$$11. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 5 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{cases} f_1 = -e_1 - e_2 - 2e_3, \\ f_2 = 2e_1 - e_2 + 4e_3, \\ f_3 = 2e_2 + 2e_3; \end{cases}$$

$$12. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -4 & -1 & 1 \\ 10 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \begin{cases} f_1 = -2e_1 + 2e_2 + e_3, \\ f_2 = 2e_2 + e_3, \\ f_3 = 11e_1 + 8e_2 - 4e_3; \end{cases}$$

$$13. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 4 & -1 & 1 \\ -1 & 8 & -7 \end{pmatrix}, \begin{cases} f_1 = 2e_1 + e_2 - 4e_3, \\ f_2 = e_1 - e_2 + e_3, \\ f_3 = -4e_1 + 2e_2; \end{cases}$$

$$14. A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \begin{cases} f_1 = 2e_1 + 2e_2 + e_3, \\ f_2 = -5e_1 - e_2 + 3e_3, \\ f_3 = e_1 + 2e_2; \end{cases}$$

$$15. A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}, \begin{cases} f_1 = 2e_1 - 2e_3, \\ f_2 = e_1 - e_2 + 2e_3, \\ f_3 = -3e_1 + 2e_2 + e_3; \end{cases}$$

$$16. A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -5 & 2 \end{pmatrix}, \begin{cases} f_1 = -4e_1 + e_3, \\ f_2 = 2e_1 - e_2 + 2e_3, \\ f_3 = e_1 - 4e_2 - e_3; \end{cases}$$

$$17. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \begin{cases} f_1 = e_1 - 3e_2, \\ f_2 = 2e_1 - e_2 + e_3, \\ f_3 = -2e_1 + e_2 + 2e_3; \end{cases}$$

$$18. A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \begin{cases} f_1 = -e_1 - 3e_2 + 2e_3, \\ f_2 = 2e_1 - e_2 + e_3, \\ f_3 = e_1 + 2e_2; \end{cases}$$

$$19. A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{cases} f_1 = -e_2 - 4e_3, \\ f_2 = 2e_1 - 3e_2 + 2e_3, \\ f_3 = -e_1 + e_2 + 4e_3; \end{cases}$$

$$20. A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{cases} f_1 = e_1 + 2e_2 - 2e_3, \\ f_2 = 2e_1 - 2e_3, \\ f_3 = e_1 + 3e_2 + 6e_3; \end{cases}$$

$$21. A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & -5 & -2 \\ -5 & 3 & 8 \end{pmatrix}, \begin{cases} f_1 = -3e_1 + e_2 + 2e_3, \\ f_2 = -5e_2 - 2e_3, \\ f_3 = -2e_1 - 2e_2 - 4e_3; \end{cases}$$

$$22. A = \begin{pmatrix} -3 & -5 & 3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{cases} f_1 = -3e_1 + e_2 + 2e_3, \\ f_2 = e_2 - 5e_3, \\ f_3 = 2e_1 - e_2 + 4e_3; \end{cases}$$

$$23. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -5 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 4 \end{pmatrix}, \begin{cases} f_1 = 2e_1 + 7e_2 + 2e_3, \\ f_2 = -2e_1 + 3e_2 + e_3, \\ f_3 = -2e_1 + 4e_2; \end{cases}$$

$$24. A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -5 \\ 2 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}, \begin{cases} f_1 = 2e_1 - 5e_2 + e_3, \\ f_2 = 2e_1 - 4e_2 + 2e_3, \\ f_3 = 7e_1 + 2e_3; \end{cases}$$

$$25. A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{cases} f_1 = e_1 + 6e_2 - 4e_3, \\ f_2 = -2e_1 - 2e_2 + 3e_3, \\ f_3 = -4e_2 - e_3; \end{cases}$$

$$26. A = \begin{pmatrix} -3 & 7 & -4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & -4 \end{pmatrix}, \begin{cases} f_1 = -e_2 - 8e_3, \\ f_2 = 3e_1 + 2e_2 - e_3, \\ f_3 = -2e_1 + e_2 + e_3; \end{cases}$$

$$27. A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ -6 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}, \begin{cases} f_1 = 3e_1 + e_3, \\ f_2 = -4e_1 + e_2 + 5e_3, \\ f_3 = e_1 + 2e_2 - 2e_3; \end{cases}$$

$$28. A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 7 \\ -1 & 6 & -2 \end{pmatrix}, \begin{cases} f_1 = -3e_1 + e_2 + 5e_3, \\ f_2 = 2e_1 + e_2 - 4e_3, \\ f_3 = 4e_2 - 2e_3; \end{cases}$$

$$29. A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -1 \\ 6 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \begin{cases} f_1 = 3e_1 + 2e_2, \\ f_2 = -e_1 + 2e_2 - 4e_3, \\ f_3 = 5e_1 + e_2 + 3e_3; \end{cases}$$

$$30. A = \begin{pmatrix} -5 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & -4 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{cases} f_1 = -6e_1 + 3e_2 + 2e_3, \\ f_2 = e_1 - e_3, \\ f_3 = 4e_1 - 2e_2 + e_3. \end{cases}$$

Задание 10.6

Найдите ядро и образ линейного оператора $A: V \rightarrow V$, заданного в каноническом базисе следующей матрицей.

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$5. A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$6. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$7. A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$8. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$9. A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$10. A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$11. A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 6 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$12. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -4 \end{pmatrix}$$

$$13. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

$$14. A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$15. A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$16. A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$17. A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \\ -4 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

$$18. A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$19. A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 0 & 4 & 10 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$20. A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$21. A = \begin{pmatrix} 4 & -6 & 0 \\ 1 & 5 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$22. A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & -5 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

$$23. A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$24. A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$25. A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & 8 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$28. A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$26. A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$29. A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$27. A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$30. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Задание 10.7

Найдите какой-нибудь базис и определите размерность линейного пространства решений системы.

$$1. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0; \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0; \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + 16x_3 + x_4 + 6x_5 = 0; \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 - 34x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0; \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0, \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0; \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
7. & \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 0; \end{cases} \\
8. & \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 5x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 - x_5 = 0; \end{cases} \\
9. & \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 2x_4 - 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 2x_2 - 2x_4 - 6x_5 = 0; \end{cases} \\
10. & \begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 - 12x_5 = 0, \\ -4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 - 4x_5 = 0; \end{cases} \\
11. & \begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0; \end{cases} \\
12. & \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0, \\ 12x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 - x_5 = 0, \\ 24x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 - 2x_5 = 0; \end{cases} \\
13. & \begin{cases} x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0; \end{cases} \\
14. & \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 + x_5 = 0; \end{cases} \\
15. & \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 10x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 30x_4 - 3x_5 = 0; \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0; \end{cases}
\end{aligned}$$

17.
$$\begin{cases} x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 30x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 10x_4 + x_5 = 0; \end{cases}$$
18.
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 - 7x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0; \end{cases}$$
19.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0; \end{cases}$$
20.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - 7x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0, \\ 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0; \end{cases}$$
21.
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 6x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0; \end{cases}$$
22.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 6x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0; \end{cases}$$
23.
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0; \end{cases}$$
24.
$$\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0; \end{cases}$$
25.
$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 + x_5 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 0; \end{cases}$$
26.
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 0, \\ 5x_1 - 10x_2 + x_3 + 5x_4 - 13x_5 = 0, \\ 7x_1 - 14x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0; \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0; \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ 8x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0; \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0, \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0, \\ 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0; \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0, \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 0, \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Задание 10.8

Найдите собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного в базисе e_1, e_2, e_3 следующей матрицей.

$$1. \text{ а) } A = \begin{pmatrix} 10 & 4 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ -13 & -6 & -5 \end{pmatrix}, \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix};$$

$$2. \text{ а) } A = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -8 \\ 6 & 28 & 26 \\ -6 & -27 & -25 \end{pmatrix}, \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -3 & 1 & 6 \end{pmatrix};$$

$$3. \text{ а) } A = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ 3 & 4 & -7 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$4. \text{ а) } A = \begin{pmatrix} -12 & -10 & -10 \\ -5 & -1 & -2 \\ 20 & 14 & 15 \end{pmatrix}, \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \end{pmatrix};$$

$$5. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

$$6) A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -3 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$6. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$6) A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix};$$

$$7. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 3 \\ 2 & 6 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$6) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix};$$

$$8. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$

$$6) A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix};$$

$$9. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} -9 & -8 & -8 \\ -22 & -11 & -16 \\ 34 & 22 & 27 \end{pmatrix},$$

$$6) A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$10. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -10 & -4 & -20 \\ -2 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$6) A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix};$$

$$11. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$6) A = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix};$$

$$12. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} -15 & 12 & -2 \\ -19 & 16 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$6) A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix};$$

$$13. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} 6 & -10 & -10 \\ -6 & 11 & 9 \\ 11 & -20 & -18 \end{pmatrix},$$

$$6) A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ -6 & 3 & -1 \end{pmatrix};$$

$$14. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ -1 & -3 & -4 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$6) A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$15. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -19 & 14 & 10 \\ 15 & -9 & -5 \end{pmatrix},$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 4 & -1 \end{pmatrix};$$

$$16. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} 13 & -10 & 11 \\ 8 & -5 & 8 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix},$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & -6 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix};$$

$$17. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 5 \\ 3 & -4 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 7 \end{pmatrix};$$

$$18. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} 13 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & -6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix},$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix};$$

$$19. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 22 & 5 & 13 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix};$$

$$20. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} -11 & 8 & -2 \\ -13 & 10 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{. a) } A = \begin{pmatrix} 6 & -4 & -4 \\ -11 & 11 & 8 \\ 19 & -17 & -14 \end{pmatrix},$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$22. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -1 \\ -4 & 1 & -4 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix},$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix};$$

$$23. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} 8 & -13 & 5 \\ 7 & -12 & 7 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -3 & 1 \end{pmatrix};$$

$$24. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 13 & 11 & 10 \\ -16 & -10 & -9 \end{pmatrix},$$

$$\text{б) } A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix};$$

$$\begin{array}{ll}
 25. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ -17 & 14 & 11 \\ 23 & -19 & -16 \end{pmatrix}, & \text{ б) } A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix}; \\
 26. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} -12 & 11 & -13 \\ -10 & 9 & -10 \\ 6 & -6 & 7 \end{pmatrix}, & \text{ б) } A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \\
 27. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -4 & 6 & -4 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, & \text{ б) } A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -2 \\ 5 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \\
 28. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 4 \\ -9 & -3 & -8 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix}, & \text{ б) } A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}; \\
 29. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} -14 & 11 & -16 \\ -14 & 11 & -14 \\ 4 & -4 & 6 \end{pmatrix}, & \text{ б) } A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ -3 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \\
 30. \text{ a) } A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -6 \\ -27 & 22 & 18 \\ 39 & -33 & -29 \end{pmatrix}, & \text{ б) } A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}.
 \end{array}$$

Задание 10.9

Привести матрицу A к диагональному виду.

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$3. A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$2. A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$5. A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$6. A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ -3 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$7. A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$8. A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$9. A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 5 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$10. A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$11. A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$12. A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$13. A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & -2 \\ 3 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$14. A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}.$$

$$15. A = \begin{pmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 5 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$16. A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$17. A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$18. A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$19. A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

$$20. A = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

$$21. A = \begin{pmatrix} -1 & 5 & -4 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$22. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$23. A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -1 & 4 & 3 \\ 3 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$27. A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$24. A = \begin{pmatrix} -4 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ 1 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

$$28. A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$25. A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ -1 & 2 & 4 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$29. A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$26. A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$30. A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задание 10.10

Приведите квадратичную форму к каноническому виду методом Лагранжа.

- 1) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - x_3^2$;
- 2) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 - 4x_3^2$;
- 3) $x_1^2 + 4x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 4x_3^2$;
- 4) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_3^2$;
- 5) $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$;
- 6) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 6x_2x_3 + x_3^2$;
- 7) $x_1^2 + 4x_1x_3 - x_2^2 - 2x_2x_3 + 2x_3^2$;
- 8) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - x_3^2$;
- 9) $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 - 4x_3^2$;
- 10) $x_1^2 + 4x_1x_3 - x_2^2 - 2x_2x_3 + 4x_3^2$;
- 11) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 - x_3^2$;
- 12) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 + x_3^2$;
- 13) $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_3^2$;
- 14) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 4x_3^2$;

- 15) $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 3x_2^2 + 4x_3^2$;
- 16) $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 - 2x_3^2$;
- 17) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$;
- 18) $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2^2 + 2x_3^2$;
- 19) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 3x_2^2 - 6x_2x_3 - 2x_3^2$;
- 20) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 + x_3^2$;
- 21) $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_3^2$;
- 22) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 + 2x_3^2$;
- 23) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + x_3^2$;
- 24) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_2^2 + 2x_2x_3 - x_3^2$;
- 25) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 5x_2^2 + 10x_2x_3 + 4x_3^2$;
- 26) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 16x_2x_3 + 7x_3^2$;
- 27) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 5x_2^2 + 12x_2x_3 + 7x_3^2$;
- 28) $x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 12x_2x_3 + 4x_3^2$;
- 29) $4x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 5x_2^2 + 8x_2x_3 + 4x_3^2$;
- 30) $4x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2^2 + 8x_2x_3 + x_3^2$.

Задание 10.11

Приведите квадратичную форму к каноническому виду ортогональным преобразованием.

- 1) $-2x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$;
- 2) $5x_1^2 + 13x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3$;
- 3) $-3x_1^2 + 9x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3$;
- 4) $-4x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;
- 5) $-2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$;
- 6) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;
- 7) $3x_1^2 - 7x_2^2 + 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 8x_2x_3$;
- 8) $x_1^2 - 7x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3$;
- 9) $-x_1^2 - x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 6x_2x_3$;
- 10) $4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;
- 11) $-4x_1^2 - 4x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$;

- 12) $4x_2^2 - 3x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$;
- 13) $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3$;
- 14) $2x_1^2 + 9x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3$;
- 15) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3$;
- 16) $6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$;
- 17) $11x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3$;
- 18) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;
- 19) $x_1^2 - 5x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;
- 20) $x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 2\sqrt{3}x_2x_3$;
- 21) $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + \frac{2}{3}x_1x_2 + \frac{4\sqrt{2}}{3}x_2x_3$;
- 22) $x_1^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 4\sqrt{2}x_1x_3 - 2\sqrt{2}x_2x_3$;
- 23) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - \frac{4}{3}x_1x_2 - \frac{8\sqrt{2}}{3}x_2x_3$;
- 24) $5x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 2\sqrt{2}x_1x_3 + 4\sqrt{2}x_2x_3$;
- 26) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \frac{4}{3}x_1x_2 + \frac{8\sqrt{2}}{3}x_2x_3$;
- 27) $2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_2 - 4\sqrt{2}x_1x_3 + 2\sqrt{2}x_2x_3$;
- 28) $-\frac{1}{2}x_1^2 + 5x_2^2 - \frac{1}{2}x_3^2 - 4x_1x_2 + 3x_1x_3 + 4x_2x_3$;
- 29) $-2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 5\sqrt{2}x_1x_3 + \sqrt{2}x_2x_3$;
- 30) $2x_2^2 - 3x_3^2 - 2\sqrt{3}x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4\sqrt{3}x_2x_3$.

Задание 10.12

Исследуйте кривую второго порядка и постройте ее график.

- 1) $x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y + 1 = 0$;
- 2) $3x^2 - 4xy + 3y^2 + 4x + 4y + 1 = 0$;
- 3) $2x^2 - 4xy + 2y^2 - 8x + 8y + 1 = 0$;
- 4) $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$;
- 5) $5x^2 + 4xy + 2y^2 + 20x + 20y - 18 = 0$;
- 6) $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$;

- 7) $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$;
- 8) $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0$;
- 9) $x^2 + 4xy + 4y^2 - 6x - 8y = 0$;
- 10) $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x - 8y - 1 = 0$;
- 11) $x^2 + 4xy + y^2 + 4x + 2y - 5 = 0$;
- 12) $2x^2 - 2xy + 2y^2 + 6x - 6y - 6 = 0$;
- 13) $-x^2 + 2xy - y^2 + 2x - 2y + 1 = 0$;
- 14) $4xy + 4x - 4y = 0$;
- 15) $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0$;
- 16) $4xy + 4x - 4y - 2 = 0$;
- 17) $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$;
- 18) $8x^2 + 4xy + 5y^2 + 16x + 4y - 28 = 0$;
- 19) $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 3y - 7 = 0$;
- 20) $6xy - 8y^2 + 12x - 26y - 11 = 0$;
- 21) $3x^2 - 4xy + 3y^2 + 6x - 4y - 7 = 0$;
- 22) $-x^2 + 4xy - y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$;
- 23) $-2x^2 + 2xy - 2y^2 - 6x + 6y + 3 = 0$;
- 24) $x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0$;
- 25) $4xy + 4x - 4y - 2 = 0$;
- 26) $2x^2 + 4xy + 2y^2 - 8x + 8y + 1 = 0$;
- 27) $x^2 + 4xy + y^2 - 8x - 4y + 1 = 0$;
- 28) $4x^2 + 2xy + 4y^2 + 12x + 12y + 1 = 0$;
- 29) $2xy + 2x + 2y - 3 = 0$;
- 30) $2x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x - 2y + 1 = 0$.

XI. РЯДЫ

1. Числовые ряды. Сходимость числового ряда

Числовым рядом называется выражение вида

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad (1)$$

в котором слагаемые a_n – числа, называемые членами ряда.

Сумма n первых членов ряда

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k$ называется n -й частичной суммой ряда.

Если существует конечный предел $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, то числовой ряд (1)

называется сходящимся, а число S – суммой ряда; в противном случае

числовой ряд называется расходящимся. Ряд $a_{n+1} + a_{n+2} + \dots = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$

называется n -м остатком ряда; ряд (1) сходится, если его n -е остатки сходятся и их суммы стремятся к нулю.

Пример 1. Доказать сходимость рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$; б) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, $|q| < 1$.

Решение. а) Общий член ряда $a_n = \frac{1}{(n+2)(n+3)}$. Эту дробь

можно представить в виде суммы двух простых дробей

$$\frac{1}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}.$$

Поэтому n -ю частичную сумму S_n ряда можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} = \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} = \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{n+3}. \end{aligned}$$

Имеем $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{n+3} \right) = \frac{1}{3}$. Таким образом, наш числовой ряд сходится к сумме $S = 1/3$.

б) Члены числового ряда $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ образуют геометрическую прогрессию с первым (нулевым) членом $a_0 = 1$ и знаменателем q . При $|q| < 1$ прогрессия является убывающей и ряд сходится к $S = \frac{1}{1-q}$.

Критерий Коши. Для сходимости числового ряда (1) необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало натуральное число $N = N(\varepsilon)$ такое, что для любых $n > N$ и $m > 0$ справедливо неравенство

$$S_{n+m} - S_n = |a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+m}| < \varepsilon. \quad (2)$$

Пример 2. Доказать расходимость гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

Решение. Зададимся $\varepsilon = \frac{1}{2}$ и $m = n$ и найдём номер N , такой, что для любого $n > N$

$$|S_{n+m} - S_n| = |S_{2n} - S_n| > \frac{1}{2}.$$

Имеем

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}, \quad S_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n},$$

$$|S_{2n} - S_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

В последней сумме n слагаемых и наименьшее из них равно $\frac{1}{2n}$.

Если каждое из слагаемых заменить на меньшее, то сумма уменьшится, поэтому

$$|S_{2n} - S_n| > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \dots + \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Как видим, $|S_{2n} - S_n| > \frac{1}{2}$ для любого n и не выполняется условие критерия Коши, следовательно, ряд расходится.

Необходимое условие сходимости. Если числовой ряд (1) сходится, то $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Пример 3. Доказать расхожимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n+2}$.

Решение. Проверим выполнение необходимого условия сходимости. Имеем $a_n = \frac{2n-1}{3n+2}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{3n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{1}{n}}{3 + \frac{2}{n}} = \frac{2}{3}.$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 2/3 \neq 0$, то ряд расходится.

Отметим, что необходимое условие сходимости ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$) не является достаточным для сходимости ряда (пример 2).

2. Признаки сходимости числовых рядов

Теорема 1 (первый признак сравнения). Пусть наряду с рядом (1) дан числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и пусть $0 \leq a_n \leq b_n$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Тогда

- 1) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходится, то ряд (1) также сходится;
- 2) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ расходится, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ также расходится.

Теорема 2 (второй признак сравнения). Пусть наряду с рядом (1) дан числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и пусть существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = q$, при этом $0 < q < \infty$. Тогда ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ведут себя одинаково в смысле сходимости (т.е. или одновременно сходятся, или одновременно расходятся).

Часто при исследовании на сходимость ряда используется тот хорошо известный факт, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \begin{cases} \text{сходится при } p > 1, \\ \text{расходится при } 0 < p \leq 1. \end{cases}$$

Пример 4. Исследовать на сходимость ряды: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)^2}$,

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3n^2+2}$, в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n}}{n+1}$, г) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n^2+3}{n^2+2}$, д) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}$,

е) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 \frac{\pi n}{2}}{(n+2)(n+1)+1}$.

Решение. а) В качестве вспомогательного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ возьмём числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)}$, сходимость которого доказана в примере

1 (а). Имеем $a_n = \frac{1}{(n+3)^2}$, $b_n = \frac{1}{(n+2)(n+3)}$,

$$0 < \frac{1}{(n+3)^2} < \frac{1}{(n+2)(n+3)} \text{ для любого } n.$$

Согласно первому признаку сравнения, сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ влечёт за собой сходимость нашего ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)^2}$.

б) В качестве вспомогательного ряда возьмём ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$. Имеем

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{3n^2+2}, \quad b_n = \frac{1}{n^{3/2}},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} \cdot n^{3/2}}{3n^2+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2(3 + \frac{2}{n^2})} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3 + \frac{2}{n^2}} = \frac{1}{3}.$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{1}{3} \neq 0, \infty$, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ведут себя одинаково в смысле сходимости. Но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{3/2}}$ сходится ($p = \frac{3}{2} > 1$), следовательно, сходится и наш ряд.

в) В качестве вспомогательного ряда возьмём $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$. Имеем

$$a_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{n+1}, \quad b_n = \frac{1}{n^{2/3}},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n} \cdot n^{2/3}}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1 \neq 0, \infty$, то ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ведут себя одинаково в смысле сходимости. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$ расходится ($p = \frac{2}{3} < 1$), следовательно, наш ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2/3}}$ расходится.

г) Для сравнения возьмём ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$. Так как это ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, где $p = 2 > 1$, то он сходится.

Применим предельный признак сравнения:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{n^2+3}{n^2+2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n^2+2} \right)}{\frac{1}{n^2}}$$

При $n \rightarrow \infty$ $\frac{1}{n^2+2} \rightarrow 0$ и величина $\ln \left(1 + \frac{1}{n^2+2} \right)$ эквивалентна $\frac{1}{n^2+2}$.

$$\text{Поэтому } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{n^2+2} \right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{n^2+2} = 1.$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то и данный ряд сходится.

д) При $n \rightarrow \infty$ бесконечно малая величина $\operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}$ эквивалентна $\frac{1}{\sqrt{n}}$. Поэтому для сравнения возьмём ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$. Этот ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, где $p_{\infty} = \frac{3}{2} > 1$. Следовательно, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ сходится.

Применим предельный признак сравнения:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n} \cdot \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1.$$

Так как ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$ сходится, то и данный ряд сходится.

е) В качестве вспомогательного ряда возьмём ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+1)+1}$

Сравним его со сходящимся рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ по предельному признаку сравнения.

Поскольку $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{(n+2)(n+1)+1} = 1$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится, то и ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+1)+1}$ сходящийся.

Так как $\cos^2 \frac{\pi n}{2} \leq 1$, то $\frac{\cos^2 \frac{\pi n}{2}}{(n+2)(n+1)+1} \leq \frac{1}{(n+2)(n+1)+1}$.

Следовательно, по признаку сравнения исходный ряд сходится.

Теорема 3. Если изменить конечное число членов ряда, то это не скажется на сходимости (расходимости) ряда.

Отсюда следует, что теорема 1 справедлива и в том случае, если неравенство $0 \leq a_n \leq b_n$ выполняется начиная с некоторого номера n .

Теорема 4 (признак сходимости Даламбера). Если члены числового ряда (1) положительны и существует предел $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$, то:

- 1) при $q < 1$ ряд (1) сходится;
- 2) при $q > 1$ ряд (1) расходится.

Пример 5. Исследовать на сходимость числовые ряды: а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{4^n}$,

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{n!}$, в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{n+1}}{2^{2n+1}}$.

Решение. а) Имеем $a_n = \frac{n^2}{4^n}$, $a_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{4^{n+1}}$,

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 \cdot 4^n}{n^2 \cdot 4^{n+1}} = \frac{1}{4} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 = \frac{1}{4}.$$

Так как $q = \frac{1}{4} < 1$, то согласно признаку Даламбера ряд сходится.

б) В данном случае $a_n = \frac{8^n}{n!}$, $a_{n+1} = \frac{8^{n+1}}{(n+1)!}$,

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{8^{n+1} \cdot n!}{(n+1)! \cdot 8^n} = 8 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = 8 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n!(n+1)} =$$

$$= 8 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 8 \cdot 0 = 0.$$

Так как $q = 0 < 1$, то ряд сходится.

в) Имеем $a_n = \frac{7^{n+1}}{2^{2n+1}}$, $a_{n+1} = \frac{7^{n+2}}{2^{2(n+1)+1}} = \frac{7^{n+2}}{2^{2n+3}}$,

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^{n+2} \cdot 2^{2n+1}}{2^{2n+3} \cdot 7^{n+1}} = \frac{7}{2^2} = \frac{7}{4}.$$

$q = \frac{7}{4} > 1$, следовательно, ряд расходится.

Теорема 5 (радикальный признак Коши). Если члены числового ряда (1) неотрицательны и существует предел $q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n}$, то:

- 1) при $q < 1$ ряд сходится;
- 2) при $q > 1$ ряд расходится.

Пример 6. Исследовать на сходимость числовые ряды:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n+4}{4n-3} \right)^{2n+3}$, б) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{n+1} \right)^n$, в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n-1}{2n+2} \right)^{n^2}$

Решение. а) Имеем $a_n = \left(\frac{3n+4}{4n-3} \right)^{2n+3}$,

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{3n+4}{4n-3} \right)^{2n+3}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+4}{4n-3} \right)^{\frac{2n+3}{n}} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3 + \frac{4}{n}}{4 - \frac{3}{n}} \right)^{2 + \frac{3}{n}} = \left(\frac{3}{4} \right)^2 = \frac{9}{16}.$$

Так как $q = 9/16 < 1$, то согласно радикальному признаку Коши ряд сходится.

б) Имеем $a_n = \left(\frac{2n-1}{n+1} \right)^n$,

$$q = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{n+1} \right)^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n-1}{n+1} = 2.$$

Этот ряд расходится, так как $q = 2 > 1$.

в) В этом случае $a_n = \left(\frac{2n-1}{2n+2} \right)^{n^2}$,

$$\begin{aligned}
 q &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n-1}{2n+2}\right)^{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-1}{2n+2}\right)^n = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{2n+2}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{2n+2}\right)^{\frac{2n+2}{3} \cdot \frac{-3}{2n+2} n} = \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{-3n}{2n+2}} = e^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{e\sqrt{e}}.
 \end{aligned}$$

Так как $q = \frac{1}{e\sqrt{e}} < 1$, то этот ряд сходится.

Теорема 6 (интегральный признак Коши). Пусть функция $f(x)$ определена на $[1; +\infty)$ и является невозрастающей неотрицательной функцией. Пусть $f(n) = a_n$ для любого n . Тогда числовой ряд (1) и несобственный интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Пример 7. Исследовать на сходимость числовые ряды:

$$\text{а) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}, \quad \text{б) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}.$$

Решение. а) Введём в рассмотрение функцию $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$. Эта функция определена на $[2; +\infty)$, положительна и монотонно убывает в этом промежутке. Более того, при $n > 2$ $f(n) = \frac{1}{n \ln n} = a_n$.

Следовательно, согласно теореме 6, ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$ и несобственный интеграл $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x}$ ведут себя одинаково в смысле сходимости.

Исследуем интеграл на сходимость:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{d \ln x}{\ln x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \ln(\ln x) \Big|_2^b =$$

$$= \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln \ln b - \ln \ln 2) = +\infty.$$

Видим, что несобственный интеграл расходится, следовательно, расходится и наш ряд.

б) Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x \ln^2 x}$, определённую на $[2; +\infty)$.

Она монотонно убывает и положительна на $[2; +\infty)$ и $f(n) = \frac{1}{n \ln^2 n} = a_n$.

Выполнены все требования теоремы 6, поэтому ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^2 n}$ и

несобственный интеграл $\int_2^{+\infty} f(x) dx$ ведут себя одинаково в смысле сходимости. Имеем

$$\begin{aligned} \int_2^{+\infty} f(x) dx &= \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{dx}{x \ln^2 x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_2^b \frac{d(\ln x)}{\ln^2 x} = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\ln x} \Big|_2^b \right) = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{\ln b} + \frac{1}{\ln 2} \right) = \frac{1}{\ln 2}. \end{aligned}$$

Видим, что несобственный интеграл сходится, следовательно, сходится и наш ряд.

3. Знакопеременные ряды. Признак сходимости Лейбница

Числовой ряд называется знакопеременным, если среди его членов есть как положительные, так и отрицательные.

Знакопередающимся рядом называется числовой ряд вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n, \quad (3)$$

где $a_n \geq 0$.

Теорема 7 (признак Лейбница). Пусть дан знакопередающийся ряд (3) и пусть выполнены два условия: 1) $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \dots$ ($a_n \geq a_{n+1}$); 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$. Тогда ряд (3) сходится. Более того, если r_n — n -й остаток ряда, то при выполнении условий 1), 2) для знакопередающегося ряда $|r_n| \leq |a_{n+1}|$.

Пример 8. Исследовать на сходимость числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$.

Решение. Данный ряд является знакопередающим. Обозначим $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Проверим выполнение условий 1), 2) теоремы 7.

1) $a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n+1}} = a_{n+1}$, что означает, что первое условие выполнено.

2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$ – выполнено и второе условие.

Следовательно, данный ряд сходится.

Числовой ряд (1) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов:

$$|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|. \quad (4)$$

Если же ряд (1) сходится, а ряд (4) расходится, то говорят, что ряд (1) сходится условно.

Теорема 8. Если ряд (1) абсолютно сходится, то он сходится.

4. Функциональные ряды

Функциональным рядом называется выражение вида

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \quad (5)$$

членами которого являются функции $u_n(x)$ с общей областью определения. Совокупность всех значений переменного x , для которых сходится функциональный ряд (5), называется областью сходимости этого ряда. Функция

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n u_k(x),$$

определённая в области сходимости ряда (5), называется суммой функционального ряда (5). Абсолютная сходимость функционального ряда определяется так же, как и абсолютная сходимость числового ряда. Область абсолютной сходимости функционального ряда можно находить с помощью признаков Даламбера и Коши.

Пример 9. Найти область абсолютной сходимости функционального ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^n \sqrt{(x-3)^n}}, \quad x > 3.$$

Решение. Для данного ряда

$$|u_n(x)| = \frac{1}{n \cdot 2^n \sqrt{(x-3)^n}}, \quad x > 3.$$

Найдём предел

$$q(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n \cdot 2^n \sqrt{(x-3)^n}}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{x-3} \cdot \sqrt[n]{n}} = \frac{1}{2\sqrt{x-3}}.$$

(мы здесь воспользовались тем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$). Согласно радикальному

признаку Коши, ряд сходится, если $q(x) < 1$, т.е. $\frac{1}{2\sqrt{x-3}} < 1$. Решением

последнего неравенства является $(13/4; +\infty)$. Учитывая область определения членов функционального ряда, получаем, что область абсолютной сходимости является пересечение множеств $(13/4; +\infty)$ и $(3; +\infty)$, т.е. $(13/4; +\infty)$.

При $x = \frac{13}{4}$ получим числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$. Согласно признаку Лейбница, он сходится. Таким образом, область сходимости исходного ряда является $\left[\frac{13}{4}; +\infty \right)$.

Говорят, что функциональный ряд (5) сходится в области (D) равномерно к функции $S(x)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0 , что для всех $n > n_0$ и для любого $x \in (D)$ справедливо неравенство $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$ (или $|r_n(x)| < \varepsilon$).

Теорема 9 (признак Вейерштрасса равномерной сходимости). Пусть функциональный ряд (5) сходится в области (D) и пусть существует такой сходящийся числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$, что $|u_n(x)| \leq a_n$ для любого n и любого $x \in (D)$. Тогда ряд (5) сходится равномерно и абсолютно в (D).

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ в теореме 9 называется мажорирующим рядом для функционального ряда (5).

5. Степенные ряды

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$C_0 + C_1(x - x_0) + C_2(x - x_0)^2 + \dots + C_n(x - x_0)^n + \dots = \sum C_n(x - x_0)^n. \quad (6)$$

Числа C_0, C_1, C_2, \dots называются коэффициентами ряда.

Интервалом сходимости ряда (6) является интервал $(x_0 - R; x_0 + R)$. Число R , называемое радиусом сходимости, может быть найдено с помощью формулы

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|C_n|}} \quad \text{или} \quad R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{C_n}{C_{n+1}} \right|.$$

При этом R может равняться 0 или $+\infty$. Степенной ряд может сходиться, может расходиться на концах интервала сходимости. Таким образом, область сходимости степенного ряда (6) могут быть интервал, полуинтервал или замкнутый промежуток с центром в точке x_0 .

Если степенной ряд (6) в интервале $(x_0 - R; x_0 + R)$ сходится к функции $f(x)$, то будем писать

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x - x_0)^n = f(x).$$

Степенной ряд сходится в любом замкнутом промежутке, принадлежащем интервалу сходимости, абсолютно и равномерно.

В интервале сходимости степенного ряда его можно дифференцировать почленно сколько угодно раз, т.е.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x - x_0)^n \right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n C_n(x - x_0)^{n-1},$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x - x_0)^n \right)'' = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) C_n(x - x_0)^{n-2},$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x - x_0)^n \right)^{(k)} = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) C_n(x - x_0)^{n-k},$$

при этом интервал сходимости степенного ряда, получающегося из исходного путём почленного дифференцирования, остаётся тем же.

Степенной ряд допускает и почленное интегрирование в интервале сходимости, т.е. если $(x_0 - R; x_0 + R)$ — интервал сходимости степенного ряда (6) и $x_0 - R < a < b < x_0 + R$, то

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \int_a^b (x - x_0)^n dx.$$

Пример 10. Найти область сходимости степенного ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n \cdot 3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2) \cdot 3^n} x^{2n+1}$

Решение. а) Ряд является степенным (так как $(2x-1)^n = 2^n (x - \frac{1}{2})^n$), поэтому он сходится абсолютно в интервале сходимости. Обозначим $u_n = \frac{(2x-1)^n}{n \cdot 3^n}$, тогда $u_{n+1} = \frac{(2x-1)^{n+1}}{(n+1) \cdot 3^{n+1}}$.

Согласно признаку Даламбера, для абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ достаточно потребовать, чтобы $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$ (при $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > 1$ ряд будет расходиться). Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(2x-1)^{n+1} \cdot n \cdot 3^n}{(n+1)3^{n+1}(2x-1)^n} \right| = \frac{|2x-1|}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{|2x-1|}{3}.$$

Наш ряд сходится при $\frac{|2x-1|}{3} < 1$ и расходится при $\frac{|2x-1|}{3} > 1$. Решим первое неравенство: $|2x-1| < 3$; $-3 < 2x-1 < 3$; $-2 < 2x < 4$; $-1 < x < 2$. Таким образом, $(-1; 2)$ является интервалом сходимости ряда. Исследуем поведение ряда на концах интервала.

При $x = -1$ получаем числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Это знакопеременный ряд, удовлетворяющий условиям теоремы Лейбница: $a_n = \frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} = a_{n+1}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. Поэтому ряд

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ сходится, и точка $x = -1$ принадлежит области сходимости.

При $x = 2$ получаем числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n \cdot 3^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Это гармонический ряд, и он расходится. Следовательно, точка $x = 2$ не принадлежит области сходимости степенного ряда.

Итак, областью сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{n \cdot 3^n}$ является полуинтервал $[-1; 2)$.

б) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+2)3^n} x^{2n+1}$ является степенным. Обозначим

$$u_n = \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(n+2)3^n}, \text{ тогда } u_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1} x^{2(n+1)+1}}{(n+2+1)3^{n+1}} = \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+3}}{(n+3)3^{n+1}}.$$

Имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+3} (n+2)3^n}{x^{2n+1} (n+3)3^{n+1}} \right| = \frac{x^2}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+3} = \frac{x^2}{3}.$$

Ряд будет сходиться при $\frac{x^2}{3} < 1$ или $x \in (-\sqrt{3}; \sqrt{3})$. Исследуем ряд на сходимость на концах интервала, т.е. при $x = \pm\sqrt{3}$.

При $x = -\sqrt{3}$ получаем числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (-\sqrt{3})^{2n+1}}{(n+2)3^n} = \sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+2}$,

являющийся знакоперевающимся. Он сходится по признаку Лейбница, т.к. абсолютные величины его членов монотонно убывают и

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3}}{n+2} = 0$. Следовательно, точка $x = -\sqrt{3}$ принадлежит области сходимости.

При $x = \sqrt{3}$ получаем числовой ряд $\sqrt{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+2}$ и он тоже сходится по признаку Лейбница.

Таким образом, областью сходимости нашего степенного ряда является отрезок $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$.

6. Ряды Тейлора

Пусть $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке производные любого порядка (бесконечно дифференцируема). Рядом Тейлора функции $f(x)$ в окрестности точки x_0 называется степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n$$

(при этом полагаем $f^{(0)}(x) \equiv f(x)$).

Теорема 10. Если степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-x_0)^n$ в некотором интервале $(x_0-R; x_0+R)$ сходится к функции $f(x)$ (т.е.

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(x-x_0)^n$), то этот ряд является рядом Тейлора этой

функции, т.е. $C_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$. Тогда получим

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n. \quad (7)$$

Не для всякой бесконечно дифференцируемой функции $f(x)$ ряд Тейлора этой функции сходится к $f(x)$. Достаточное условие для этого даёт следующая теорема.

Теорема 11. Если $f(x)$ бесконечно дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 и существует такая постоянная величина M , что для любых $n \in \mathbb{N}$ и x из этой окрестности $|f^{(n)}(x)| < M$, то $f(x)$ разлагается в ряд Тейлора:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x-x_0)^n$$

Известны следующие разложения некоторых элементарных функций в ряд Тейлора (в скобках указана область сходимости ряда):

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!} x^3 + \dots$$

$$+ \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + \dots, \quad (|x| < 1);$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots, \quad (|x| < 1);$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots + (-1)^n x^n + \dots, \quad (|x| < 1);$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad (-\infty < x < +\infty);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots, \quad (-\infty < x < +\infty);$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots, \quad (-\infty < x < +\infty);$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + \dots, (|x| < 1);$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \dots, (|x| < 1).$$

Пример 11. Разложить функцию $f(x) = e^x \sin x$ в ряд Тейлора по степеням x .

Решение. 1 способ. Разложить функцию по степеням x означает, что её нужно разложить в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$. Для этого найдём производные заданной функции и их значения в точке $x_0 = 0$. Займёмся этим.

$$f(x) = e^x \sin x, \quad f(0) = 0;$$

$$f'(x) = e^x (\sin x + \cos x) = e^x \sqrt{2} \sin(x + \frac{\pi}{4}), \quad f'(0) = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4};$$

$$f''(x) = e^x \sqrt{2} (\sin(x + \frac{\pi}{4}) + \cos(x + \frac{\pi}{4})) = e^x (\sqrt{2})^2 \sin(x + \frac{\pi}{2}),$$

$$f''(0) = (\sqrt{2})^2 \sin \frac{2\pi}{4};$$

$$f'''(x) = e^x (\sqrt{2})^3 \sin(x + \frac{3\pi}{4}), \quad f'''(0) = (\sqrt{2})^3 \sin \frac{3\pi}{4};$$

$$f^{(n)}(x) = e^x (\sqrt{2})^n \sin(x + \frac{n\pi}{4}); \quad f^{(n)}(0) = (\sqrt{2})^n \sin \frac{n\pi}{4}.$$

Найденные значения $f^{(n)}(0)$ подставим в (7), это даст нам требуемое разложение $f(x)$ по степеням x :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{2})^n \sin \frac{n\pi}{4}}{n!} x^n.$$

2 способ. Воспользовавшись записанными выше разложениями функций e^x и $\sin x$, имеем

$$\begin{aligned} e^x \sin x &= \left[1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \right] \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \right] \\ &= x + \frac{x^2}{1!} + \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} \right) x^3 + \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{2!3!} + \frac{1}{4!} \right) x^5 + \left(\frac{1}{5!} - \frac{1}{(3!)^2} + \frac{1}{5!} \right) x^6 + \dots \end{aligned}$$

Замечание. В последнем примере мы поставили знак равенства между самой функцией $f(x) = e^x \sin x$ и её рядом Тейлора. Вообще говоря, это требует обоснования. Сформулируем ещё одно достаточное условие для сходимости ряда Тейлора функции $f(x)$ к самой функции $f(x)$ (более сильное, чем теорема 11).

Теорема 12. Пусть $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[x_0 - \delta; x_0 + \delta]$ и бесконечно дифференцируема на $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$.

Обозначим $M_n = \sup_{x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)} |f^{(n)}(x)|$. Если

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n \cdot \delta^n}{n!} = 0, \quad (8)$$

то ряд Тейлора функции $f(x)$ на промежутке $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ равномерно сходится к $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n.$$

(При этом $|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1} \cdot \delta^{n+1}}{(n+1)!}$.) (9)

Покажем, что для функции $f(x) = e^x \sin x$ из примера 11 выполняется условие (8) при любом конечном δ . Действительно, $|f^{(n)}(x)| \leq e^\delta (\sqrt{2})^n$, отсюда $M_n \leq e^\delta (\sqrt{2})^n$. Несложно доказывается, что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^\delta (\sqrt{2})^n}{n!} \cdot \delta^n = e^\delta \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\delta \sqrt{2})^n}{n!} = 0,$$

откуда и следует справедливость вышеупомянутого равенства.

Пример 12. Разложить функцию $\ln(3-4x)$ в ряд Тейлора по степеням $(x+2)$, используя разложения основных элементарных функций.

Решение. Выражение, стоящее под знаком логарифма, преобразуем таким образом, чтобы выделить выражение $(x+2)$:

$$\begin{aligned} (3-4x) &= [3-4(x+2-2)] = [3-4(x+2)+8] = [11-4(x+2)] = \\ &= 11 \left[1 - \frac{4}{11}(x+2) \right]. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \ln(3-4x) &= \ln \left[11 \left(1 - \frac{4}{11}(x+2) \right) \right] = \ln 11 + \ln \left[1 - \frac{4}{11}(x+2) \right] = \\ &= \ln 11 + \ln(1+u), \end{aligned}$$

где $u = -\frac{4}{11}(x+2)$. Теперь воспользуемся разложением в ряд Тейлора для функции $\ln(1+u)$ при $|u| < 1$:

$$\begin{aligned}\ln(3-4x) &= \ln 11 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \left(-\frac{4}{11}(x+2) \right)^n = \\ &= \ln 11 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4}{11} \right)^n \cdot \frac{(x+2)^n}{n}, \quad |x+2| < \frac{11}{4}.\end{aligned}$$

Исследуем поведение ряда на концах интервала сходимости $\left(-\frac{19}{4}; \frac{3}{4} \right)$.

При $x = -\frac{19}{4}$ получаем знакопеременный ряд $\ln 11 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, сходящийся согласно признаку Лейбница. При $x = \frac{3}{4}$ получаем гармонический ряд, который, как известно, расходится. Таким образом, полученный степенной ряд сходится на промежутке $\left[-\frac{19}{4}; \frac{3}{4} \right)$.

Пример 13. Разложить функцию $f(x) = (x - \operatorname{tg} x) \cos x$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$, используя разложение основных элементарных функций.

Решение. Заданную функцию преобразуем следующим образом:
 $(x - \operatorname{tg} x) \cos x = x \cos x - \sin x$.

Воспользовавшись известными разложениями в ряд Тейлора функций $\cos x$ и $\sin x$, получим

$$\begin{aligned}x \cos x - \sin x &= x \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \right) - \\ &- \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right) = -\frac{3x^3}{3!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{5x^5}{5!} - \frac{x^5}{5!} + \\ &+ \dots + (-1)^n \frac{2n+1}{(2n+1)!} x^{2n+1} - (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots = -\frac{2x^3}{3!} + \frac{4x^5}{5!} - \frac{6x^7}{7!} + \dots + \\ &+ (-1)^n \cdot \frac{2n}{(2n+1)!} \cdot x^{2n+1} + \dots\end{aligned}$$

Так как ряды Тейлора для $\cos x$ и $\sin x$ сходятся при любых значениях x , то и полученный ряд функции $f(x)$ будет сходиться для любых x .

Пример 14. Разложить функцию $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = -1$, используя разложение основных элементарных функций.

Решение. Заданную функцию разложим на сумму простейших дробей:

$$\frac{1}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}.$$

Полученные слагаемые можно представить в виде

$$f_1(x) = \frac{1}{x-2} = \frac{1}{x+1-3} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1-\frac{x+1}{3}} = \left[\begin{array}{l} \text{пользуемся разложением} \\ \text{функции } \frac{1}{1-x} \end{array} \right] =$$

$$= -\frac{1}{3} \left[1 + \frac{x+1}{3} + \left(\frac{x+1}{3}\right)^2 + \left(\frac{x+1}{3}\right)^3 + \dots \right] = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{3^{n+1}},$$

$$f_2(x) = -\frac{1}{x-1} = \frac{1}{1-x} = \frac{1}{2-(x+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{x+1}{2}} =$$

$$= \frac{1}{2} \left[1 + \frac{x+1}{2} + \left(\frac{x+1}{2}\right)^2 + \left(\frac{x+1}{2}\right)^3 + \dots \right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^{n+1}}.$$

Отсюда

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{3^{n+1}} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{2^{n+1}} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{1}{3^{n+1}} \right) (x+1)^n$$

Осталось выяснить интервал сходимости последнего ряда. Он является пересечением областей сходимости рядов Тейлора для функций $f_1(x)$ и

$f_2(x)$, т.е. множеств, задаваемых неравенствами $\left| \frac{x+1}{3} \right| < 1$ и $\left| \frac{x+1}{2} \right| < 1$.

Это пересечение даёт $-3 < x < 1$.

Пример 15. Вычислить $e^{0.1}$ с точностью до $\varepsilon = 0,001$.

Решение. Для вычисления приближённого значения функции $f(x) = e^x$ воспользуемся её разложением в ряд Тейлора в окрестности точки $x_0 = 0$, при этом возьмём конечное число членов ряда, а возникающую при этом погрешность оценим с помощью остаточного члена ряда. Имеем

$$e^{0,1} = 1 + 0,1 + \frac{0,1^2}{2!} + \frac{0,1^3}{3!} + \dots + \frac{0,1^n}{n!} + \dots \quad (10)$$

Определим сколько членов ряда (10) нужно взять, чтобы обеспечить требуемую точность. Для этой цели воспользуемся формулой (9):

$$|R_n(x)| \leq \frac{e^{0,1} \cdot 0,1^{n+1}}{(n+1)!}, \quad 0 < x \leq 0,1.$$

Учитывая, что $e^{0,1} < 2$, получим

$$|R_n(x)| < \frac{2 \cdot 0,1^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Потребуем, чтобы дробь в правой части была меньше $\varepsilon = 0,001$ (тогда и погрешность будет меньше ε):

$$\frac{2 \cdot 0,1^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{1}{1000},$$

или $(n+1)! > 2 \cdot 10^{2-n}$. Для выполнения последнего неравенства достаточно взять $n = 2$: $(2+1)! = 6$, $2 \cdot 10^{2-2} = 2$. Следовательно,

$$e^{0,1} \approx 1 + 0,1 + \frac{0,1^2}{2!} = 1,105.$$

Пример 16. Вычислить $\sqrt{630}$ с точностью $\varepsilon = 0,0001$.

Решение. В данном случае мы воспользуемся рядом Тейлора для функции $(1+x)^\alpha$ при $\alpha = 1/2$. Предварительно выполним следующие преобразования:

$$\sqrt{630} = \sqrt{625 + 5} = \sqrt{625 \left(1 + \frac{5}{625}\right)} = 25 \left(1 + \frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{2}} = 25(1 + 0,008)^{\frac{1}{2}}.$$

Так как

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} - \frac{5x^4}{128} + \dots,$$

то

$$25\left(1 + \frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{3}} = 25\left(1 + \frac{0,008}{2} - \frac{(0,008)^2}{8} + \frac{(0,008)^3}{16} - \dots\right) =$$
$$= 25 + 0,1 - 0,002 + 0,0000008 - \dots$$

Полученный ряд является знакочередующимся. Поэтому, ограничившись первыми тремя членами последнего ряда, мы достигнем погрешности, по абсолютной величине не превышающей четвёртого члена прогрессии, что обеспечивает требуемую точность. Итак,

$$\sqrt[3]{630} \approx 25 + 0,1 - 0,0002 = 25,0998.$$

Пример 17. Вычислить значение $\cos 10^\circ$ с точностью $\varepsilon = 0,0001$.

Решение. Переведём градусную меру в радианную и воспользуемся рядом Тейлора для $\cos x$ при $x_0 = 0$ и $x = \frac{10\pi}{180} = \frac{\pi}{18}$:

$$\cos 10^\circ = \cos \frac{\pi}{18} = 1 - \left(\frac{\pi}{18}\right)^2 \frac{1}{2!} + \left(\frac{\pi}{18}\right)^4 \frac{1}{4!} - \dots$$

Полученный числовой ряд является знакочередующимся и удовлетворяет условиям Лейбница. Поэтому для достижения нужной точности можно остановиться на том члене, который по абсолютной величине меньше ε . В данном случае это третий член:

$$\left(\frac{\pi}{18}\right)^4 \cdot \frac{1}{4!} < \left(\frac{1}{5}\right)^4 \cdot \frac{1}{4!} = \frac{1}{15000} < 0,0001.$$

Таким образом,

$$\cos 10^\circ \approx 1 - \left(\frac{\pi}{18}\right)^2 \frac{1}{2!} \approx 1 - (0,1745)^2 \frac{1}{2} \approx 0,9848.$$

Пример 18. Вычислить приближённо интеграл $\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx$,

используя известные разложения элементарных функций, с точностью до 0,001.

Решение. Имеем

$$\frac{1}{x} \ln(1+x) = \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \right), \quad |x| < 1;$$

$$\frac{1}{x} \ln(1+x) = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \dots, \quad |x| < 1.$$

Ряд сходится в интервале интегрирования $(0; 0,1) \subset (-1; 1)$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx &= \int_0^{0,1} \left(1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \dots \right) dx = \left(x - \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{9} - \frac{x^4}{16} + \dots \right) \Big|_0^{0,1} = \\ &= 0,1 - \frac{0,1^2}{4} + \frac{0,1^3}{9} - \frac{0,1^4}{16} + \dots \end{aligned}$$

Получим знакочередующийся ряд, удовлетворяющий условиям теоремы Лейбница. Поэтому заданную точность $\varepsilon = 10^{-3}$ можно обеспечить, взяв три члена полученного ряда. Следовательно,

$$\int_0^{0,1} \frac{\ln(1+x)}{x} dx \approx 0,1 - \frac{0,1^2}{4} + \frac{0,1^3}{16} \approx 0,098.$$

Пример 19. Найти первые четыре ненулевые члена разложения решения дифференциального уравнения в степенной ряд

$$y'' + 2xy' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1.$$

Решение. Будем предполагать, что неизвестная функция, являющаяся решением дифференциального уравнения, представима степенным рядом

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!} x + \frac{y''(0)}{2!} x^2 + \frac{y'''(0)}{3!} x^3 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots, \quad (11)$$

коэффициенты которого определяются путём последовательного дифференцирования исходного уравнения $y'' = -2xy' - 4y$ и подстановкой в него $x=0$, $y(0)$, $y'(0)$ и найденных позже значений $y''(0)$, $y'''(0)$, \dots . Итак, имеем: $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$,

$$y''(x) = -2xy' - 4y, \quad y''(0) = -2 \cdot 0 \cdot (-1) - 4 \cdot 0 = 0;$$

$$y'''(x) = (-2xy' - 4y)' = -2y' - 2xy'' - 4y' = -2xy'' - 6y', \quad y'''(0) = 6;$$

$$y^{IV}(x) = (-2xy'' - 6y')' = -2y'' - 2xy''' - 6y'' = -2xy''' - 8y'', \quad y^{IV}(0) = 0;$$

$$y^V(x) = (-2xy''' - 8y'')' = -2xy^{IV} - 10y''', \quad y^V(0) = -60;$$

$$y^{VI}(x) = (-2xy^{IV} - 10y''')' = -2xy^V - 12y^{IV}, \quad y^{VI}(0) = 0;$$

$$y^{VII}(x) = (-2xy^V - 12y^{IV})' = -2xy^{VI} - 14y^V, \quad y^{VII}(0) = 840.$$

Осталось подставить найденные значения в ряд (11):

$$y(x) = -x + \frac{6}{3!}x^3 - \frac{60}{5!}x^5 + \frac{840}{7!}x^7 - \dots,$$

$$y(x) = -x + x^3 - \frac{x^5}{2} + \frac{x^7}{6} - \dots.$$

7. Ряды Фурье

Система непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \dots, \varphi_n(x), \dots$ называется ортонормированной, если

$$\int_a^b \varphi_m(x) \varphi_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ 1 & \text{при } m = n. \end{cases}$$

Примером ортонормированных систем являются:

$$1) \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}}, \dots, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}, \dots$$

на отрезке $[-\pi; \pi]$;

$$2) \frac{1}{\sqrt{T}}, \frac{\cos \omega x}{\sqrt{T/2}}, \frac{\sin \omega x}{\sqrt{T/2}}, \frac{\cos 2\omega x}{\sqrt{T/2}}, \frac{\sin 2\omega x}{\sqrt{T/2}}, \dots, \frac{\cos n\omega x}{\sqrt{T/2}}, \frac{\sin n\omega x}{\sqrt{T/2}}, \dots$$

на отрезке $[a; b]$; здесь $T = b - a$, $\omega = 2\pi/T$;

3) система полиномов Лежандра

$$P_0(x) \equiv 1, \quad P_n(x) = \frac{(-1)^n}{2^n} \cdot \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (1-x^2)^n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

на отрезке $[-1; 1]$.

Имеется множество других примеров ортонормированных систем функций. Ортонормированные системы функций играют роль

ортонормированного базиса в некотором пространстве Гильберта функций, определённых на промежутке $[a, b]$. Любой функции $f(x)$ из этого пространства ставится в соответствие ряд

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} C_k \varphi_k(x), \quad (12)$$

где C_k находится по формуле

$$C_k = \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (13)$$

При этом коэффициенты C_k , вычисляемые по формулам (13), называются коэффициентами Фурье функции $f(x)$, а ряд (12) – рядом Фурье функции $f(x)$. Важную роль играют полные ортонормированные системы функций. Говорят, что функция $f(x)$, определённая на промежутке $[a; b]$, является функцией с интегрируемым квадратом, если $f(x)$ и $(f(x))^2$ интегрируемы на $[a; b]$ (интеграл может быть и несобственным).

Теорема 13. Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ – ортонормированная система функций на промежутке $[a; b]$. Следующие утверждения равносильны:

1) для любой функции $f(x)$ с интегрируемым квадратом справедливо равенство

$$\int_a^b (f(x))^2 dx = \sum_{k=0}^{\infty} C_k^2,$$

где C_k – коэффициенты Фурье по системе $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$;

2) для любой функции $f(x)$ с интегрируемым квадратом

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \left(f(x) - \sum_{k=0}^n [C_k \varphi_k(x)] \right)^2 dx = 0$$

(при выполнении этого равенства говорят, что ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ в среднем);

3) если $f(x)$ – функция с интегрируемым квадратом и для любого k

$$\int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx = 0, \quad \text{то } f(x) \equiv 0.$$

Ортонормированная система функций, обладающая любым из условий 1), 2), 3) (а следовательно, и двумя другими), называется полной.

Приведённые выше примеры ортонормированных систем функций обладают свойством полноты.

Если $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ – полная ортонормированная система функций, то для любой функции с интегрируемым квадратом на $[a, b]$ знак « \sim » в

формуле (12) можно в некотором смысле заменить на « \approx » (фразу «в некотором смысле» проясняет пункт 2) в формулировке теоремы 13).

Будем говорить, что функции $f(x)$ и $g(x)$ с интегрируемым квадратом на $[a, b]$ равны в смысле среднеквадратичного отклонения, если

$$\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx = 0,$$

и будем при этом писать $f(x) \underset{\text{с.о.}}{=} g(x)$.

Теорема 14. Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ – ортонормированная система функций на $[a; b]$ и пусть $f(x)$ и $g(x)$ – функции с интегрируемым квадратом на $[a; b]$. Тогда $f(x) \underset{\text{с.о.}}{=} g(x)$ на $[a; b]$ в том и только в том случае, если коэффициенты Фурье функций $f(x)$ и $g(x)$ совпадают. Чаще других применяют тригонометрическую ортонормированную систему

$$\frac{1}{\sqrt{T}}, \frac{\cos \omega x}{\sqrt{T/2}}, \frac{\sin \omega x}{\sqrt{T/2}}, \frac{\cos 2\omega x}{\sqrt{T/2}}, \frac{\sin 2\omega x}{\sqrt{T/2}}, \dots, \frac{\cos n\omega x}{\sqrt{T/2}}, \frac{\sin n\omega x}{\sqrt{T/2}}, \dots$$

на $[a; b]$, $T = b - a$, $\omega = 2\pi/T$. Ряд Фурье по системе этих функций обычно называют тригонометрическим рядом Фурье:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x),$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_a^b f(x) \cos n\omega x dx, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_a^b f(x) \sin n\omega x dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Функция $f(x)$ называется кусочно-монотонной на отрезке $[a; b]$, если этот отрезок можно разбить на конечное число интервалов $(a; b_1)$, $(b_1; b_2)$, $(b_2; b_3)$, \dots , $(b_n; b)$, в каждом из которых $f(x)$ монотонна. Аналогично определяется понятие кусочно-непрерывной функции при этом слово «монотонность» заменяется на «непрерывность».

Теорема 15 (Дирихле). Если функция $f(x)$, определённая на отрезке $[a; b]$, является на нём кусочно-непрерывной, кусочно-монотонной и ограниченной, то её тригонометрический ряд сходится во всех точках отрезка $[a; b]$ к некоторой функции $S(x)$. Кроме того:

1) если x – точка непрерывности функции $f(x)$, то $S(x) = f(x)$;

2) если x – точка разрыва (устраняемая или первого рода) функции $f(x)$, то

$$S(x) = \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2};$$

$$3) S(a) = S(b) = \frac{1}{2}(f(a+0) + f(b-0)).$$

Пример 20. Разложить в тригонометрический ряд Фурье функцию

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & -2 \leq x \leq 0, \\ 3, & 0 < x \leq 2. \end{cases}$$

Решение. Заданная функция кусочно-непрерывна, кусочно-монотонна и ограничена на $[-2, 2]$, следовательно, её можно разложить в тригонометрический ряд Фурье. Найдём коэффициенты Фурье. Имеем

$$T = 4, \quad \omega = 2\pi/T = \pi/2,$$

$$a_0 = \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^0 (x+2) dx + \int_0^2 3 dx \right) = 4,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \cos \frac{n\pi}{2} x dx = \frac{1}{2} \left(\int_{-2}^0 (x+2) \cos \frac{n\pi}{2} x dx + \int_0^2 3 \cos \frac{n\pi}{2} x dx \right) = \\ &= \frac{2}{(\pi n)^2} (1 - (-1)^n), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2} \int_{-2}^2 f(x) \sin \frac{n\pi}{2} x dx = \frac{1}{2} \left[\int_{-2}^0 (x+2) \sin \frac{n\pi}{2} x dx + \int_0^2 3 \sin \frac{n\pi}{2} x dx \right] = \\ &= \frac{1}{\pi n} (1 - (-1)^n). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$f(x) \sim 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{(\pi n)^2} (1 - (-1)^n) \cos \frac{n\pi}{2} x + \frac{1}{\pi n} (1 - (-1)^n) \sin \frac{n\pi}{2} x \right].$$

Причём

$$S(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \notin \{-2; 0; 2\}, \\ 5/2, & \text{если } x = 0, \\ 3/2, & \text{если } x = -2 \text{ или } x = 2. \end{cases}$$

Пример 21. Разложить в тригонометрический ряд Фурье функцию $f(x) = |x|$, $-1 < x < 2$.

Решение. Данная функция удовлетворяет условиям теоремы Дирихле. Ввиду непрерывности $f(x)$ на $(-1; 2)$

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x).$$

Имеем $T = 3$, $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3}$. Найдём коэффициенты a_n и b_n :

$$a_0 = \frac{2}{3} \int_{-1}^2 f(x) dx = \frac{2}{3} \left[\int_{-1}^0 (-x) dx + \int_0^2 x dx \right] = \frac{2}{3} \left[-\frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \frac{x^2}{2} \Big|_0^2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{5}{3}.$$

$$a_n = \frac{2}{3} \int_{-1}^2 f(x) \cos n\omega x dx = \frac{2}{3} \left[\int_{-1}^0 (-x) \cos n\omega x dx + \int_0^2 x \cos n\omega x dx \right] =$$

$$= \frac{1}{n\pi} \left[\sin \frac{2\pi}{3} n + 2 \sin \frac{4\pi}{3} n + \frac{3}{2n\pi} \cos \frac{2\pi}{3} n + \frac{3}{2n\pi} \cos \frac{4\pi}{3} n - \frac{3}{n\pi} \right],$$

$n = 1, 2, 3, \dots$,

$$b_n = \frac{2}{3} \int_{-1}^2 f(x) \sin \omega x dx = \frac{2}{3} \left[\int_{-1}^0 (-x) \sin n\omega x dx + \int_0^2 x \sin n\omega x dx \right] =$$

$$= \frac{1}{n\pi} \left[-2 \cos \frac{4\pi n}{3} + \cos \frac{2\pi n}{3} + \frac{3}{2n\pi} \left(-\sin \frac{2\pi n}{3} + \sin \frac{4\pi n}{3} \right) \right].$$

Таким образом,

$$f(x) \sim \frac{5}{6} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{2\pi n}{3} + b_n \sin \frac{2\pi n}{3} \right), \quad -1 < x < 2,$$

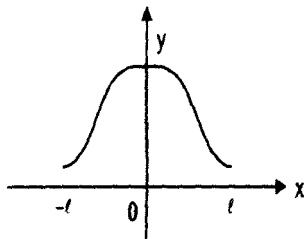
где $a_n, b_n, n \geq 1$ найдены выше.

Если функция $f(x)$, определённая на интервале $(-\ell; \ell)$ и удовлетворяющая условиям теоремы Дирихле, является чётной, то в её разложении в ряд Фурье будут участвовать лишь косинусы:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n}{\ell} x,$$

т.е. все b_k окажутся равными нулю. Если же $f(x)$ является нечётной функцией на $(-\ell; \ell)$, то её ряд Фурье будет содержать лишь синусы:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n}{\ell} x.$$



Если ставится задача разложить функцию $f(x)$, определённую на интервале $(0; \ell)$ в ряд по косинусам, то её доопределяют на интервале $(-\ell; 0)$ чётным

образом и разлагают новую функцию $f_1(x)$ в тригонометрический ряд Фурье на интервале $(-\ell; \ell)$; этот ряд Фурье будет содержать лишь косинусы. Ввиду того, что $f(x)$ и $f_1(x)$ совпадают на $(0; \ell)$, при этом получается разложение функции $f(x)$ в ряд по косинусам

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{\pi n}{\ell} x,$$

где

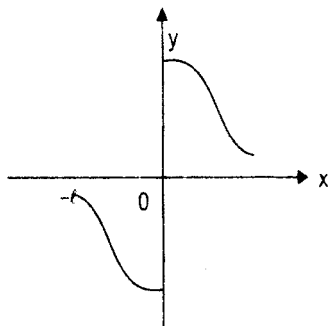
$$a_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \cos \frac{\pi n}{\ell} x dx.$$

Аналогично, если требуется разложить функцию $f(x)$, определённую на $(0; \ell)$ в ряд по синусам, то $f(x)$ продолжают на $(-\ell; 0)$ нечётным образом и разлагают новую (нечётную) функцию $f_2(x)$ в тригонометрический ряд Фурье на интервале $(-\ell; \ell)$; этот ряд будет содержать лишь синусы. В результате получим разложение $f(x)$ в ряд по синусам:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n}{\ell} x,$$

где

$$b_n = \frac{2}{\ell} \int_0^{\ell} f(x) \sin \frac{\pi n}{\ell} x dx.$$



Пример 22. Разложить функцию $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$, определённую на интервале $(0; \pi)$, в ряд Фурье: а) по косинусам; б) по синусам.

Решение. а) $a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) dx = 0,$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) \cos nx dx = \frac{1 - (-1)^n}{\pi n^2}.$$

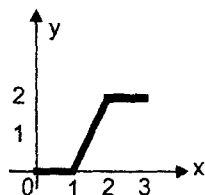
Запишем разложение $f(x)$ в ряд по косинусам:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - (-1)^n}{\pi n^2} \cos nx = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{\pi(2n+1)^2}, \quad 0 < x < \pi.$$

$$б) b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi - x}{4} - \frac{x}{2} \right) \sin nx dx = \frac{(-1)^n + 1}{2n}.$$

Отсюда получаем разложение $f(x)$ в ряд Фурье по синусам:

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n + 1}{2n} \sin nx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin 2nx}{2n}, \quad 0 < x < \pi.$$



Пример 23. Разложить на интервале $(0; 3)$ в тригонометрический ряд Фурье только по косинусам и только по синусам функцию $f(x)$, заданную графиком.

Решение. Найдём аналитическое выражение заданной функции, а затем поступим так же, как в предыдущем примере.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x \leq 1, \\ 2(x-1), & 1 < x \leq 2, \\ 2, & 2 < x < 3. \end{cases}$$

Находим коэффициенты a_n и b_n :

$$a_0 = \frac{2}{3} \int_0^3 f(x) dx = \frac{2}{3} \left(\int_1^2 2(x-1) dx + \int_2^3 2 dx \right) = 2,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{3} \int_0^3 f(x) \cos \frac{\pi n}{3} x dx = \frac{2}{3} \left[\int_1^2 2(x-1) \cos \frac{\pi n}{3} x dx + \int_2^3 2 \cos \frac{\pi n}{3} x dx \right] = \\ &= \frac{6}{\pi^2 n^2} \left(\cos \frac{2\pi n}{3} - \cos \frac{\pi n}{3} \right), \quad n = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{3} \int_0^3 f(x) \sin \frac{\pi n}{3} x dx = \frac{2}{3} \left[\int_1^2 2(x-1) \sin \frac{\pi n}{3} x dx + \int_2^3 2 \sin \frac{\pi n}{3} x dx \right] = \\ &= \frac{4}{3} \left[\left(\frac{3}{\pi n} \right)^2 \left(\sin \frac{2\pi n}{3} - \sin \frac{\pi n}{3} \right) + 3 \frac{(-1)^{n+1}}{\pi n} \right]. \end{aligned}$$

Отсюда получаем разложение $f(x)$ в ряд Фурье только по косинусам

$$f(x) \sim 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6}{\pi^2 n^2} \left(\cos \frac{2\pi n}{3} - \cos \frac{\pi n}{3} \right) \cos \frac{\pi n}{3} x, \quad 0 < x < 3$$

и разложение $f(x)$ в ряд Фурье только по синусам

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{3} \left[\left(\frac{3}{\pi n} \right)^2 \left(\sin \frac{2\pi n}{3} - \sin \frac{\pi n}{3} \right) + (-1)^{n+1} \right] \sin \frac{\pi n}{3} x, \quad 0 < x < 3.$$

Ещё одним важным примером ортонормированной системы функций является

$$\dots, \frac{e^{-2i\omega x}}{\sqrt{T}}, \frac{e^{-i\omega x}}{\sqrt{T}}, \frac{1}{\sqrt{T}}, \frac{e^{i\omega x}}{\sqrt{T}}, \frac{e^{2i\omega x}}{\sqrt{T}}, \dots$$

на отрезке $[a; b]$; здесь, как и прежде $T = b - a$, $\omega = 2\pi/T$. Любую функцию, удовлетворяющую условиям теореме Дирихле, можно разложить в ряд Фурье по этой системе (при этом справедлива теорема Дирихле):

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{in\omega x}. \quad (14)$$

Коэффициенты Фурье находятся по формуле

$$C_n = \frac{1}{T} \int_a^b f(x) e^{-in\omega x} dx.$$

Ряд (14) называется рядом Фурье в комплексной форме. При этом между C_n и коэффициентами Фурье a_n , b_n функции $f(x)$ ортонормированной системы $\{\cos n\omega x, \sin n\omega x\}_{n=0}^{\infty}$ существует следующая связь:

$$C_0 = \frac{a_0}{2}, \quad C_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, \quad C_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}.$$

Пример 24. Разложить функцию $f(x) = x$ на интервале $(0; \pi)$ в ряд Фурье в комплексной форме.

Решение. В нашем случае $T = \pi$, $\omega = 2$. Имеем

$$C_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi/2,$$

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) e^{-i2nx} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} x e^{-i2nx} dx = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{-2ni} \times \int_0^{\pi} x d(e^{-i2nx}) = \\ &= \frac{i}{2n\pi} \left[x e^{-i2nx} \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^{-i2nx} dx \right] = \frac{i}{2n\pi} \left[\pi e^{-i2n\pi} - 0 - \frac{1}{-2in} e^{-i2nx} \Big|_0^{\pi} \right] = \\ &= \frac{i}{2n\pi} \left[\pi - \frac{i}{2n} (e^{-2in\pi} - e^0) \right] = \frac{i}{2n\pi} \left[\pi - \frac{i}{2n} (1 - 1) \right] = -\frac{i}{2n}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$f(x) \sim \frac{\pi}{2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq 0}}^{\infty} \frac{-i}{2n} e^{2inx}$$

Задание 11.1

Для заданного ряда: а) найдите сумму первых 4-х членов ряда; б) докажите сходимость ряда, пользуясь непосредственно определением сходимости; в) найдите сумму ряда.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)},$$

$$13) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)},$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+3)},$$

$$14) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+3)},$$

$$3) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)n},$$

$$15) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)},$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+4)},$$

$$16) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)(n+5)},$$

$$5) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2)(n-1)},$$

$$17) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2)n},$$

$$6) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(n-2)(n+1)},$$

$$18) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n+1)},$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)},$$

$$19) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+4)},$$

$$8) \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n(n-3)},$$

$$20) \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{(n-2)(n-3)},$$

$$9) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n+2)},$$

$$21) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(n-1)(n+3)},$$

$$10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+3)},$$

$$22) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)},$$

$$11) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n},$$

$$23) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)(n-2)},$$

$$12) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n+3^n}{4^n},$$

$$24) \sum_{n=4}^{\infty} \frac{2}{(n-1)(n-2)(n-3)},$$

$$25) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3-n}{n(n+1)(n+3)},$$

$$26) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n-1}{n^2(n-1)^2},$$

$$27) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{(3n-1)(3n+2)},$$

$$28) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(n-1)n(n+1)},$$

$$29) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+3^n}{5^n},$$

$$30) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8n}{(2n-1)^2(2n+2)^2}.$$

Задание 11.2

Установите расходимость ряда, используя критерий Коши или необходимый признак сходимости ряда.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}},$$

$$12) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+3},$$

$$2) \sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{\pi n}{3},$$

$$13) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n},$$

$$3) \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-2)}},$$

$$14) \sum_{n=0}^{\infty} \sin \frac{\pi n}{7},$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}},$$

$$15) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+n+1},$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^2+1},$$

$$16) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{n(n+1)}},$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n+1},$$

$$17) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3n-1},$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\sqrt{(n+1)(n+2)}},$$

$$18) \sum_{n=0}^{\infty} (1-(-1)^n),$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n+1)^2},$$

$$19) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{3^{n+1}},$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{100n+1},$$

$$20) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1} \right)^2,$$

$$10) \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{n+1}},$$

$$21) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{(n+1)^2},$$

$$11) \sum_{n=12}^{\infty} n^2 \cos \frac{\pi}{n},$$

$$22) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2n+1}{2n-1} \right)^n,$$

23) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{n^2+2}$,

24) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$,

25) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n!}{3^n}\right)^2$,

26) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{n}{(n-12)(n-2)}$,

27) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+\sqrt{n}}$,

28) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+2}\right)^n$,

29) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^2+5n+2}$,

30) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+100}{n(n+10)}$.

Задание 11.3а

Исследуйте сходимость ряда с помощью признаков сравнения.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi/3^n)}{4n^2}$,

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\frac{n^2}{n^2+9}\right)$,

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(\pi n/3)}{\sqrt{n^4+2}}$,

4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln((n+1)/n)}{n^2+4}$,

5) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\sin n}}{\sqrt[3]{n+1}}$,

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+\sqrt{n}}{2\sqrt[3]{n^2+5\sqrt{n^4}}}$,

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \sin \frac{1}{n}$,

8) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{n(n-1)(n+2)}}$,

9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4 \ln\left(1+\frac{1}{n^3+2}\right)}$,

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+2^n}{3^n+2}$,

11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} n}{n^3+5}$,

12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} \sqrt{2n-1}}{\sqrt[3]{n^2}}$,

13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4+\sqrt[3]{2n+1}}{\sqrt[8]{n^{15}+2}}$,

14) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi+\cos n}{\sqrt[7]{n^5}}$,

15) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 \cos^2(n+1)}{n^4+7}$,

16) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+\sin^2 \pi n}{\sqrt[3]{n^6+1}}$,

17) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{\cos(\pi/4)}}{5\sqrt{n-1}}$,

18) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg} \frac{3\pi}{\sqrt[3]{n^2+1}}$,

19) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^{\cos^2 n}}{\sqrt{3n+2}}$,

20) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{\sin(3/n^7)}$,

$$21) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3 + \sqrt[3]{3n+1}}}{4\sqrt[4]{n^8}},$$

$$22) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2} \sin \left[(3 + (-1)^n) \frac{\pi}{4} \right],$$

$$23) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt[3]{3+n^7}},$$

$$24) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln((n+1)/(n+3))}{\arctg n},$$

$$25) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(\pi n/4)}{\sqrt[3]{n} + \sqrt{n}},$$

$$26) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg(\pi n^3/3)}{\sqrt{2n^3+3}},$$

$$27) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^4(2+\cos(\pi n/3))},$$

$$28) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2 \arctg \sqrt[3]{n^2}},$$

$$29) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n} + \sqrt{n}}{\sqrt[7]{n^2+3n+5}},$$

$$30) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \arctg \sqrt{n}}.$$

Задание 11.36

Исследуйте сходимость ряда с помощью признаков сравнения.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{n+2},$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n+4}}{n^3-2n+5},$$

$$3) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n+8}}{4n+5},$$

$$4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt[3]{n+2}}{n^2+n-1},$$

$$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{n^2\sqrt{n} + \sqrt[3]{n+1}},$$

$$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+3n-1}{n^3\sqrt{n+4}},$$

$$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+3}}{n^2+2n+3},$$

$$8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+n+5}{2n^4+n^2\sqrt{n}-2},$$

$$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-n+9}{n^2\sqrt[3]{n+n+5}},$$

$$10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{n^3-\sqrt{n+2}},$$

$$11) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+4}}{n^2-7},$$

$$12) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n^2}}{n\sqrt{n+6}},$$

$$13) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\sqrt{n+1}}{n^4+5n-1},$$

$$14) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-1}{n\sqrt[3]{n+5n+2}},$$

$$15) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-n\sqrt{n+2}}{n^3+3n+4},$$

$$16) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-2}{n\sqrt{n+5n-1}},$$

$$17) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt[4]{n+n-1}}{n^2-3n+7},$$

$$18) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-3\sqrt{n}}{n^2+6},$$

- 19) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt{n} + n + 4}{n^3 - n^2 + 7}$,
 20) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n} + 3}{2n + 7}$,
 21) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n - 3}{n\sqrt[3]{n^2} + \sqrt{n} + 1}$,
 22) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n + \sqrt{n} + 4}{2n^2 + 3n - 1}$,
 23) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n + 1}{n^3 + n\sqrt{n} - 1}$,
 24) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2 - n + 2}{6n^3\sqrt{n} + n^2 + 1}$,
 25) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2 + \sqrt{n} - 1}{n^3 + 3n^2 - 4n + 2}$,
 26) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\sqrt[4]{n} + 3n + 1}{n^2\sqrt{n} + 5}$,
 27) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^2 - n - 1}{3n^3\sqrt{n} - 2}$,
 28) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{n} - 2}{n\sqrt[4]{n} + n - 1}$,
 29) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n\sqrt{n} + 1}{n^3 - n + 3}$,
 30) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2\sqrt{n} - n + 2}{n^3\sqrt[3]{n^2} + n + 1}$.

Задание 11.4

Исследуйте сходимость ряда с помощью признака Даламбера.

- 1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{3^{n^2}}$,
 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{2^n \cdot (n!)^2}$,
 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[5]{n^3}}{(2n+1)!}$,
 4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{(2^n+1)(n!)^2}$,
 5) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{n^{n-2}}$,
 6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{2n}}{(2n)!}$,
 7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^{2n}}{n! \cdot 3^n}$,
 8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2-1) \cdot 3^{2n}}{((n+1)!)^2}$,
 9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n \cdot n!}{(n-1)!}$,
 10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot n!}{n^n}$,
 11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n^{n+1}}$,
 12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$,
 13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(5^n+1)(n!)^2}$,
 14) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^n}{(n-1)!}$,
 15) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)!}{(n!)^2 \cdot 2^n}$,
 16) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{5^n(n-1)!}$.

17)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^{2n} (n+1)!}{(2n)^n},$$

18)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n (n!)^2}{(3n)!},$$

19)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{3^{n^2} \cdot n^n},$$

20)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{2n}}{(2n-1)!},$$

21)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n+1} \cdot n^n}{n^2 \cdot n!},$$

22)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{4^n (2n)!},$$

23)
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 \cdot n^n}{(n-1)!},$$

24)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n+4) \cdot n^n}{(n+2)!},$$

25)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n)^n}{(n-1)!},$$

26)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1} \cdot (n^2+1)}{(n+2)!},$$

27)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n \cdot n!}{(2n+1)!},$$

28)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{2^n \cdot n!},$$

29)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^{3n}}{((2n)!)^2},$$

30)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(n+1)^n (2n-1)!},$$

Задание 11.5

Исследуйте сходимость ряда с помощью радикального признака Коши (в некоторых случаях следует воспользоваться тем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$).

1)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n}{n+3} \right)^{-n^2},$$

2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} \right)^{2n+1},$$

3)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2n+5} \right)^{n^3},$$

4)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(2n)^n},$$

5)
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\operatorname{arctg} \frac{\pi}{3n} \right)^n,$$

6)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{3n+1} \right)^{n^2+1},$$

7)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n^3} \right)^{n^4} \frac{1}{2^n},$$

8)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \left(\frac{3n+1}{2n-1} \right)^n,$$

9)
$$\sum_{n=1}^{\infty} n \sin^n \frac{\pi}{2n},$$

10)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(\log_3 2)^n},$$

11)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{(3n+1)^n},$$

12)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n-1}{n} \right)^n \frac{n}{2^n},$$

13)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sin(\pi/2n))^n}{n},$$

14)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+2}}{n^{2n}},$$

15)
$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \left(\frac{n^2-1}{n^2+5} \right)^{n^2+2n},$$

16)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{n} \right)^{n^2} \frac{2n}{3^n},$$

17)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{n^{n+2}},$$

18)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{e} \right) \left(\frac{n+2}{n} \right)^{3n^2},$$

19)
$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\frac{2n}{3n+1} \right)^n,$$

20)
$$\sum_{n=2}^{\infty} e^n \left(\frac{n+2}{n-1} \right)^{n^2},$$

21)
$$\sum_{n=1}^{\infty} n (\log_5 2)^n,$$

22)
$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\frac{2}{n} + 2 \right)^n,$$

23)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n}{3n+2} \right)^{n+2},$$

24)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (n+1)^2 \left(\frac{n+1}{2n+3} \right)^n,$$

25)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{2n+1} \right)^{2n^2+1},$$

26)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2}{n^2-1} \right)^{n^3+1},$$

27)
$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{n-1} \cdot 2^{-n},$$

28)
$$\sum_{n=1}^{\infty} n \left(\arctg \frac{\pi}{3n} \right)^n,$$

29)
$$\sum_{n=1}^{\infty} 5^{n+2} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2},$$

30)
$$\sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{n+3}{n-2} \right)^{n^2+1}$$

Задание 11.6

Исследуйте сходимость ряда с помощью интегрального признака Коши.

1)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \ln(n+2)},$$

2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2n \cdot \ln(\ln 2n)},$$

3)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2)^2 + 1},$$

4)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{4n^2},$$

5)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \ln^2(n+1)},$$

6)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 \sin^2 \frac{1}{n}},$$

7) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}}$,

8) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctg n}{1+n^2}$,

9) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$,

10) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 4n + 13}$,

11) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 2n + 3}$,

12) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^3}{9+n^8}$,

13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{(n^2+5n-2)^2}$,

14) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-1/n}$,

15) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{n^3+3n+3}$,

16) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{4+n^2}$,

17) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+8n+7}$,

18) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3)\ln(n+3)}$,

19) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3 \cos^2 \frac{1}{n^2}}$,

20) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$,

21) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+6n+10}$,

22) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$,

23) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{5+n^4}$,

24) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{\sqrt{n^2+2}}$,

25) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+2n+5}$,

26) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+6n+7}$,

27) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln^3 n}$,

28) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2+4}{\cos^2(n^3+4n+3)}$,

29) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2+4n+8}$,

30) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}$.

Задание 11.7

Исследуйте ряд на абсолютную и условную сходимость.

1) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^n}{(5n+2)^n}$,

4) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2}{3^n+2}$,

2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{5^n-2}$,

5) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n-1}{n^2+1}$,

3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2+1}}$,

6) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^3}{8^n}$,

7)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{n^2 + n + 1}{2n^2 + n + 1} \right)^n,$$

8)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sqrt{n}}{3n+1},$$

9)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2n-1}{n^2+1},$$

10)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n - 1}{3^n + 1},$$

11)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\ln n}{\sqrt{n^3}},$$

12)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\sqrt{2n-1}},$$

13)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \ln \left(1 + \frac{2}{n^2} \right),$$

14)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{n+1}}{n^n},$$

15)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{(-3)^n},$$

16)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-n)^n}{(n+1)^n \sqrt{2n+1}},$$

17)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{(n+1)^{n-1}},$$

18)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^{n-1}}{(n+1)!},$$

19)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (n+2)}{4^n},$$

20)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (n^2 - 1)}{n^3},$$

21)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(n+1)!}{3^n \cdot n!},$$

22)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin \frac{\pi}{\sqrt{n^3}},$$

23)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^n},$$

24)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 3^n},$$

25)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3n+1}{n^2(n+1)^2},$$

26)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}},$$

27)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-2},$$

28)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2},$$

29)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{3n-2},$$

30)
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{3^{n^2}}{n!}.$$

Задание 11.8

Найдите область сходимости степенного ряда

1)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(3n-1)^2 \cdot 3^n},$$

2)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{2n^2+1},$$

3)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-2)^n}{(2n+1) \cdot 4^n},$$

4)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^{n+3}}{n^2+3},$$

- $$5) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2x-1)^n}{5^n},$$
- $$6) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-1)(x-3)^n}{(n+1)^2 \cdot 2^{n+3}},$$
- $$7) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2(x+3)^n}{n^3+1},$$
- $$8) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(2x+5)^n}{(n^2+2) \cdot 3^n},$$
- $$9) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^{2n}}{(n+3) \cdot 2^n},$$
- $$10) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{(2n+1) \cdot 3^n},$$
- $$11) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(x+1)^{2n}}{n},$$
- $$12) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(x-5)^n}{(3n+2) \cdot 2^n},$$
- $$13) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n-2)(x-3)^n}{(n+1)^2 \cdot 2^{n+1}},$$
- $$14) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} \cdot \frac{x^n}{3^n},$$
- $$15) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$
- $$16) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{3n^2 \cdot 2^n},$$
- $$17) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^n}{3^{n-1} \cdot (n+2)},$$
- $$18) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(x-2)^{2n}}{9^n},$$
- $$19) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+5)^{2n-1}}{2^n(n^2-1)},$$
- $$20) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x+1)^n}{(n^2+1) \cdot 2^n},$$
- $$21) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{5^n \cdot \sqrt{n+4}},$$
- $$22) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
- $$23) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-5)^{2n+1}}{3n+8},$$
- $$24) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x-1)^n}{2^n \cdot n},$$
- $$25) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{(3n+1) \cdot 2^n},$$
- $$26) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{(n^2+3n+2) \cdot 3^n},$$
- $$27) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+8)^{3n}}{n^2},$$
- $$28) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{3^{n-1} \sqrt{n}},$$
- $$29) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-1)^n}{(2n^2+1) \cdot 5^n},$$
- $$30) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^n}{n \cdot 6^n}.$$

Задание 11.9

Запишите три первых ненулевых члена разложения функции $f(x)$ в окрестности указанной точки x_0 в ряд Тейлора.

1) $f(x) = \sin x^2, x_0 = \pi/2;$

2) $f(x) = xe^{\sin x}, x_0 = \pi;$

- 3) $f(x) = \ln(2 - 2x + x^2), x_0 = 1;$
- 4) $f(x) = \operatorname{tg} x, x_0 = \pi/4;$
- 5) $f(x) = \cos^2 x, x_0 = \pi/2;$
- 6) $f(x) = (\ln(1 - x + x^2)), x_0 = 1;$
- 7) $f(x) = 1/\sin x, x_0 = \pi/2;$
- 8) $f(x) = \ln \frac{1+x}{2-x}, x_0 = 1;$
- 9) $f(x) = 1/\cos x, x_0 = 0;$
- 10) $f(x) = x \ln(2 - x^2), x_0 = 1;$
- 11) $f(x) = e^{-x^2+x}, x_0 = 1;$
- 12) $f(x) = \arcsin x, x_0 = 1/2;$
- 13) $f(x) = xe, x_0 = \pi/2;$
- 14) $f(x) = \arccos x, x_0 = 1/2;$
- 15) $f(x) = \sqrt{3+x^2}, x_0 = 1;$
- 16) $f(x) = x \ln x, x_0 = 1;$
- 17) $f(x) = \sqrt[3]{7+x}, x_0 = 1;$
- 18) $f(x) = \sin 2x \cos 3x, x_0 = 0;$
- 19) $f(x) = (1-x^2)e^{x-1}, x_0 = 1;$
- 20) $f(x) = 1/\sqrt{10-x}, x_0 = 1;$
- 21) $f(x) = \sqrt{x} \sin x, x_0 = \pi/6;$
- 22) $f(x) = \sin x/x, x_0 = \pi/2;$
- 23) $f(x) = \ln(4-x-2x^2), x_0 = 1;$
- 24) $f(x) = \sin x - \cos 2x, x_0 = 0;$
- 25) $f(x) = (x-1)/\cos x, x_0 = 0;$
- 26) $f(x) = \sqrt[3]{3-2x}, x_0 = 1;$
- 27) $f(x) = 1/\sqrt{12-3x}, x_0 = 1;$
- 28) $f(x) = \lg(14-x^2), x_0 = 2;$
- 29) $f(x) = (1-\sqrt{x}) \sin 2x, x_0 = 0;$
- 30) $f(x) = (1-x^2)/\sqrt{x}, x_0 = 1;$

Задание 11.10

Разложите функцию $f(x)$ в окрестности указанной точки x_0 в ряд Тейлора, пользуясь разложениями основных элементарных функций.

1) $f(x) = x \ln x, x_0 = 2;$

2) $f(x) = \frac{x}{9+x^2}, x_0 = 0;$

3) $f(x) = \sqrt{9-x}, x_0 = 0;$

4) $f(x) = \frac{x}{4+x}, x_0 = 3;$

5) $f(x) = \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}, x_0 = 0;$

6) $f(x) = \frac{3}{1+x-2x^2}, x_0 = 0;$

7) $f(x) = \frac{x}{4+8x}, x_0 = -1;$

8) $f(x) = \frac{\arcsin x}{x} - 1, x_0 = 0;$

9) $f(x) = x \ln(10+x), x_0 = 9;$

10) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{2-x}}, x_0 = 1;$

11) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{5-2x}}, x_0 = 0;$

12) $f(x) = \sqrt[3]{8-x^3}, x_0 = 0;$

13) $f(x) = \sin(5+x), x_0 = 0;$

14) $f(x) = x \sin^2 x^2, x_0 = 0;$

15) $f(x) = (1-x^2) \arctg x, x_0 = 0;$

16) $f(x) = \sin x, x_0 = \pi/6;$

17) $f(x) = \cos x, x_0 = \pi/3;$

18) $f(x) = \ln(2-2x+x^2), x_0 = 1;$

19) $f(x) = x \arctg x - \ln \sqrt{1-x^2}, x_0 = 0;$

20) $f(x) = (x+1) \sin x, x_0 = -1;$

21) $f(x) = \ln(3-2x-x^2), x_0 = -1;$

22) $f(x) = \ln(1-x-6x^2), x_0 = 0;$

$$23) f(x) = \frac{x+3}{(x+1)^2}, x_0 = 2;$$

$$24) f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}, x_0 = 0;$$

$$25) f(x) = \ln(1-x-2x^2), x_0 = 0;$$

$$26) f(x) = (1+x)\ln(2+x), x_0 = -1;$$

$$27) f(x) = (x+2)\cos x, x_0 = -2;$$

$$28) f(x) = 2x \cos \frac{x}{2} - x, x_0 = 2;$$

$$29) f(x) = \ln \frac{1-2x}{1+2x}, x_0 = 1;$$

$$30) f(x) = (e^{3x} + e^{-3x} - 1)/x^2, x_0 = 0.$$

Задание 11.11

Используя соответствующие разложения в степенной вычислите указанные интегралы с точностью до 0,0001.

$$1) \int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx,$$

$$10) \int_0^1 \cos \sqrt{x} dx,$$

$$2) \int_0^{0.5} \sqrt[3]{1+x^3} dx,$$

$$11) \int_0^{1.5} \frac{1}{x} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} dx,$$

$$3) \int_0^{0.5} \frac{dx}{1+x^2},$$

$$12) \int_0^{0.2} \sqrt[3]{1+x^2} dx,$$

$$4) \int_0^1 x \ln(1+x) dx,$$

$$13) \int_0^{0.5} e^{x^2} dx,$$

$$5) \int_0^{0.5} \ln(1+\sqrt{x}) dx,$$

$$14) \int_0^1 \sin x^2 dx,$$

$$6) \int_0^{0.5} \sqrt[3]{x^2} \cos x dx,$$

$$15) \int_0^1 \frac{1}{x} (\cos x - 1) dx,$$

$$7) \int_0^{0.5} x^2 \operatorname{arctg} x dx,$$

$$16) \int_0^{0.5} \cos x^2 dx,$$

$$8) \int_0^1 \frac{dx}{1+x^4},$$

$$17) \int_0^{0.5} \sqrt[3]{4-3x^2} dx,$$

$$9) \int_0^1 x e^{x^3} dx,$$

$$18) \int_0^{0.5} \ln(1+x^3) dx,$$

19) $\int_0^{0,5} \sqrt{x} e^{-x} dx,$

20) $\int_{-0,5}^{0,5} x^2 \ln(1+x^2) dx,$

21) $\int_1^2 \frac{1}{x} (e^{-x} - 1) dx,$

22) $\int_0^{0,5} \arctg x^2 dx,$

23) $\int_0^{0,5} \sqrt{x} \cos x dx,$

24) $\int_0^{0,4} \ln(1+x^3) dx,$

25) $\int_1^2 e^{1/x} dx,$

26) $\int_0^{0,5} \sqrt{x} \ln(1+\sqrt{x}) dx,$

27) $\int_0^1 e^{-x^2} dx,$

28) $\int_0^1 \sqrt{x} \sin \sqrt{x} dx,$

29) $\int_0^{0,5} x^2 \cos \sqrt{x} dx,$

30) $\int_0^{0,5} \sin x^2 dx.$

Задание 11.12

Найдите первые четыре ненулевых члена разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения с начальными условиями.

1) $y'' - (1+x^2)y = 0,$

$y(0) = -2, \quad y'(0) = 2;$

2) $y'' = xy y',$

$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1;$

3) $xy'' + y = 0,$

$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$

4) $y'' = xy' + y,$

$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$

5) $y'' + xy = 0,$

$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$

6) $y'' = (y')^2 + y,$

$y(0) = 0, \quad y'(0) = -1;$

7) $y'' = y^2 + xy',$

$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$

8) $y'' = \cos y + 2x,$

$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$

9) $y'' - xy' + y^2 = 0,$

$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$

10) $y'' = x^2 y' - y,$

$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$

11) $y'' - xy' = +y + e^x,$

$y(0) = 1, \quad y'(0) = -1;$

12) $y'' = y \cos y' + x,$

$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1;$

13) $y'' - xy' - y = 0,$

$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$

14) $y'' - yy' = x^2,$

$y(0) = -1, \quad y'(0) = 1;$

$$15) y'' + y' + \frac{x}{y} = 0,$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$$

$$16) y'' + xy' + y^3 = 0,$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1;$$

$$17) y'' = y' - xe^y,$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$$

$$18) y'' - x^2y + y' = 0,$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0;$$

$$19) y'' = y'x^2 - y^2,$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$$

$$20) y'' = y'e^y + xy',$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = -1;$$

$$21) y'' = 2xy' + 4y,$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$$

$$22) 4xy'' + 2xy' + y = 0,$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 0;$$

$$23) y'' = (y')^2 - xy,$$

$$y(0) = 4, \quad y'(0) = 2;$$

$$24) y'' = (2x - 1)y' - 1,$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$$

$$25) y'' - (x^2 + 1)y = 0,$$

$$y(0) = 2, \quad y'(0) = 2;$$

$$26) y'' + xy' + y = 0,$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = -1;$$

$$27) y'' - (y')^2 = 2,$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = -1;$$

$$28) y'' - xy' = x^2e^x,$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = -1;$$

$$29) y'' = 2xy^2 + 2x^2yy',$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 1;$$

$$30) y'' = 2x - 2yy',$$

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$$

Задание 11.13

Выполните следующие действия:

а) разложите заданную функцию $f(x)$ на указанном промежутке тригонометрический ряд Фурье; б) постройте графики функций $S(x)$; в) найдите разложение $f(x)$ в ряд Фурье в комплексной форме.

$$1) f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & -2 < x \leq 0, \\ -2, & 0 < x \leq 1; \end{cases}$$

$$2) f(x) = \begin{cases} 2, & -1 < x \leq 0, \\ 2 - \frac{1}{3}x, & 0 < x \leq 2; \end{cases}$$

$$3) f(x) = \begin{cases} 3, & -3 < x \leq 0, \\ -2 + 3, & 0 < x \leq 1; \end{cases}$$

$$4) f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{4}x, & -4 < x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq 2; \end{cases}$$

$$5) f(x) = \begin{cases} -9, & -5 < x \leq 0, \\ x - 6, & 0 < x \leq 1; \end{cases}$$

$$6) f(x) = \begin{cases} -2x + 2, & -3 < x \leq 0, \\ 5, & 0 < x \leq 1; \end{cases}$$

$$7) f(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x + 1, & -1 < x \leq 0, \\ 2, & 0 < x \leq 3; \end{cases}$$

$$8) f(x) = \begin{cases} -8, & -4 < x \leq 0, \\ 3x + 2, & 0 < x \leq 1; \end{cases}$$

$$9) f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & -2 < x \leq 0, \\ 5, & 0 < x \leq 1; \end{cases}$$

$$10) f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{3}x, & -2 < x \leq 0, \\ 7, & 0 < x \leq 4; \end{cases}$$

$$11) f(x) = \begin{cases} 2, & -3 < x \leq 0, \\ \frac{x}{2} + 1, & 0 < x \leq 1; \end{cases}$$

$$12) f(x) = \begin{cases} 3x - 2, & -4 < x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq 2; \end{cases}$$

$$13) f(x) = \begin{cases} -2, & -1 < x \leq 0, \\ 3x - 5, & 0 < x \leq 2; \end{cases}$$

$$14) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}x - 2, & -3 < x \leq 0, \\ 4, & 0 < x \leq 1; \end{cases}$$

$$15) f(x) = \begin{cases} -2, & -1 < x \leq 0, \\ 3x + 4, & 0 < x \leq 2; \end{cases}$$

$$16) f(x) = \begin{cases} -3, & -3 < x \leq 0, \\ 2x - 4, & 0 < x \leq 1; \end{cases}$$

$$17) f(x) = \begin{cases} \frac{5}{2}x + 1, & -1 < x \leq 0, \\ 4, & 0 < x \leq 2; \end{cases}$$

$$18) f(x) = \begin{cases} 4 + x, & -2 < x \leq 0, \\ 3, & 0 < x \leq 1; \end{cases}$$

$$19) f(x) = \begin{cases} 2x + \frac{1}{2}, & -3 < x \leq 0, \\ 4, & 0 < x \leq 3; \end{cases}$$

$$20) f(x) = \begin{cases} 4x - 1, & -1 < x \leq 0, \\ 2, & 0 < x \leq 4; \end{cases}$$

$$21) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x - 1, & -1 < x \leq 0, \\ 3, & 0 < x \leq 5; \end{cases}$$

$$22) f(x) = \begin{cases} -2x + 3, & -1 < x \leq 0, \\ 3, & 0 < x \leq 5; \end{cases}$$

$$23) f(x) = \begin{cases} 4, & -2 < x \leq 0, \\ \frac{2}{3}x - 1, & 0 < x \leq 2; \end{cases}$$

$$24) f(x) = \begin{cases} -1, & -2 < x \leq 0, \\ 2x + 3, & 0 < x \leq 1; \end{cases}$$

$$25) f(x) = \begin{cases} -2x + 1, & -4 < x \leq 0, \\ 3, & 0 < x \leq 1; \end{cases}$$

$$26) f(x) = \begin{cases} 5, & -2 < x \leq 0, \\ 4x - 1, & 0 < x \leq 3; \end{cases}$$

$$27) f(x) = \begin{cases} 6x - 1, & -2 < x \leq 0, \\ 1, & 0 < x \leq 2; \end{cases}$$

$$28) f(x) = \begin{cases} 4, & -1 < x \leq 0, \\ \frac{1}{2}x + 2, & 0 < x \leq 2; \end{cases}$$

$$29) f(x) = \begin{cases} 3, & -4 < x \leq 0, \\ 2x - 3, & 0 < x \leq 2; \end{cases}$$

$$30) f(x) = \begin{cases} 2, & -2 < x \leq 0, \\ 3x - 1, & 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Задание 11.14

Разложите заданную функцию $f(x)$ на указанном интервале тригонометрический ряд Фурье.

$$1) f(x) = \frac{x^2}{2}, \quad (-1; 1);$$

$$2) f(x) = \sin 2x, \quad \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right);$$

$$3) f(x) = |x| - 1, \quad (-1; 1);$$

$$4) f(x) = |\sin x|, \quad \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right);$$

$$5) f(x) = \cos \frac{x}{2}, \quad \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right);$$

$$6) f(x) = x^2/3, \quad (-1; 1);$$

$$7) f(x) = \frac{x^2}{4} - \frac{\pi^2}{12}, \quad \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right);$$

$$8) f(x) = \sin \frac{3x}{4}, \quad (-\pi; \pi);$$

$$9) f(x) = x \sin x, \quad \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right);$$

$$10) f(x) = 1 - x^2/4, \quad (-4; 4);$$

$$11) f(x) = 2 - |x|, \quad (-2; 2);$$

$$12) f(x) = 1 - x^2/2, \quad (-2; 2);$$

$$13) f(x) = 2 \sin \frac{x}{2}, \quad \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right);$$

$$14) f(x) = \frac{\cos x}{2} + 1, \quad \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right);$$

$$15) f(x) = 3x^2, \quad (-2; 2);$$

$$16) f(x) = \frac{4}{3}x^2, \quad (-3; 3);$$

$$17) f(x) = 2 \sin \frac{x}{3}, \quad (-\pi; \pi);$$

18) $f(x) = 2 - 3x^2, \quad \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right);$

19) $f(x) = 3 \cos \frac{x}{2}, \quad \left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right);$

20) $f(x) = \frac{x^2}{2} + 1, \quad (-6; 6);$

21) $f(x) = \frac{|x|}{2} + 1, \quad (-2; 2);$

22) $f(x) = 2 \cos 2x, \quad \left(-\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8}\right);$

23) $f(x) = x^2 + |x|, \quad (-1; 1);$

24) $f(x) = 1 - 2|x|, \quad \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right);$

25) $f(x) = \sin|x|, \quad \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right);$

26) $f(x) = \cos 3x, \quad \left(-\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{12}\right);$

27) $f(x) = x|x| + x, \quad (-1; 1);$

28) $f(x) = |x| \sin x, \quad \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right);$

29) $f(x) = x \cos x, \quad \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right);$

30) $f(x) = |\cos x|, \quad \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right).$

Задание 11.15

Разложите заданную функцию $f(x)$ на указанном интервале в тригонометрический ряд: а) только по косинусам, б) только по синусам.

1) $f(x) = x + 2, \quad (0; 1);$

4) $f(x) = \frac{4}{3}x^2, \quad (-3; 3);$

2) $f(x) = 3 - x, \quad (0; 3);$

5) $f(x) = 2 - \frac{x}{3}, \quad (0; 3);$

3) $f(x) = \frac{\pi}{2} - x, \quad \left(0; \frac{\pi}{2}\right);$

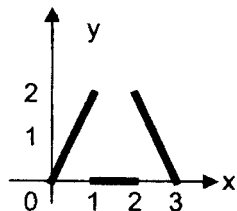
6) $f(x) = \cos 2x, \quad \left(0; \frac{\pi}{8}\right);$

- 7) $f(x) = 2x, \quad (0; \frac{\pi}{4});$
- 8) $f(x) = 1 - \frac{x}{2}, \quad (0; 2);$
- 9) $f(x) = 2x - 1, \quad (0; \frac{1}{2});$
- 10) $f(x) = (x - 1)/2, \quad (0; 1);$
- 11) $f(x) = \frac{1}{4} - x, \quad (0; 1);$
- 12) $f(x) = \frac{x}{4} + 1, \quad (0; 2);$
- 13) $f(x) = \pi + x/2, \quad (0; \pi);$
- 14) $f(x) = 2x - 3, \quad (0; \frac{3}{2});$
- 15) $f(x) = 2x, \quad (0; \frac{1}{2});$
- 16) $f(x) = 3x + 1, \quad (0; 1);$
- 17) $f(x) = \frac{x}{2} - 3, \quad (0; 2);$
- 18) $f(x) = 2 - 3x, \quad (0; 2);$
- 19) $f(x) = 2x + 3, \quad (0; 1);$
- 20) $f(x) = \frac{x}{3} - 1, \quad (0; 3);$
- 21) $f(x) = 3 - x, \quad (0; 3);$
- 22) $f(x) = 2 - \frac{x}{3}, \quad (0; 1);$
- 23) $f(x) = \sin 3x, \quad (0; \frac{\pi}{6});$
- 24) $f(x) = \cos \frac{x}{4}, \quad (0; \frac{\pi}{2});$
- 25) $f(x) = \frac{x}{4} - 2, \quad (0; 4);$
- 26) $f(x) = 4 - x, \quad (0; 4);$
- 27) $f(x) = \frac{3}{2}x, \quad (0; 1);$
- 28) $f(x) = 3 - x, \quad (0; 3);$
- 29) $f(x) = 2x + 1, \quad (0; 6);$
- 30) $f(x) = 2 - \frac{x}{2}, \quad (0; 4).$

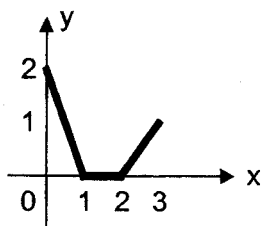
Задание 11.16

Разложите функцию $f(x)$, заданную на интервале $(0; 3)$ графически, в тригонометрический ряд Фурье: а) только по косинусам; б) только по синусам.

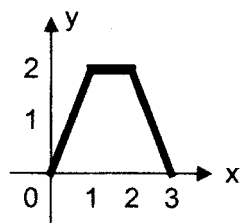
1



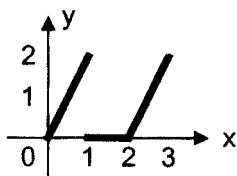
4



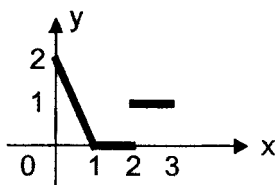
7



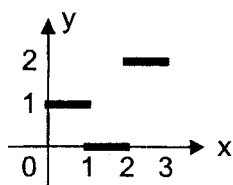
2



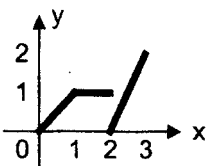
5



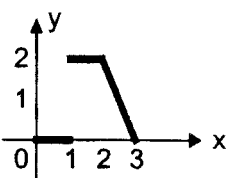
8



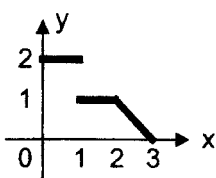
3



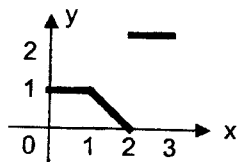
6



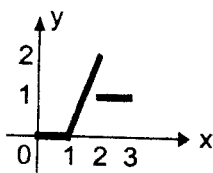
9



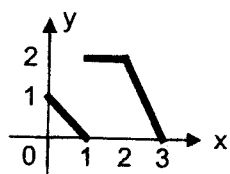
10



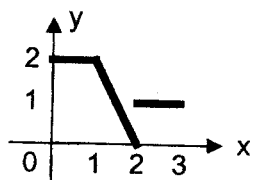
14



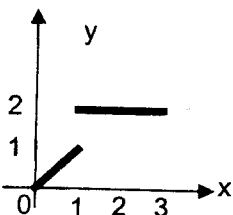
18



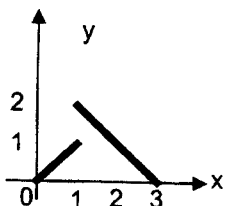
11



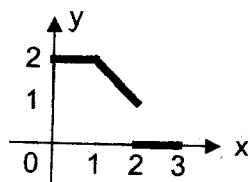
15



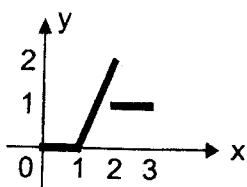
19



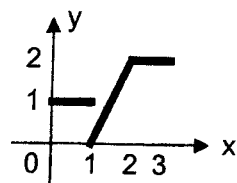
12



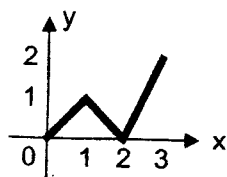
16



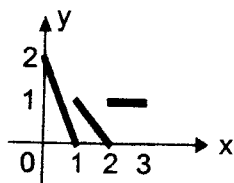
20



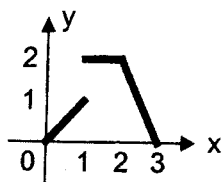
13



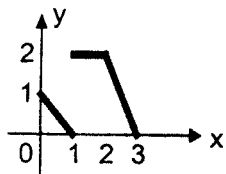
17



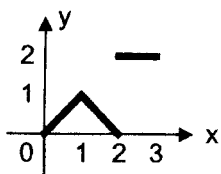
21



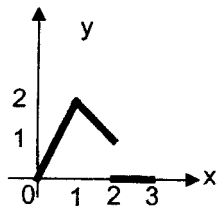
22



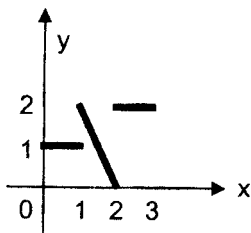
25



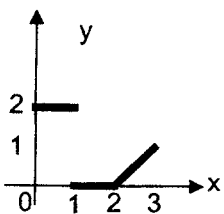
28



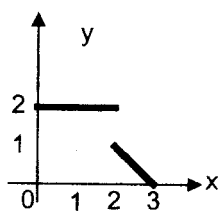
23



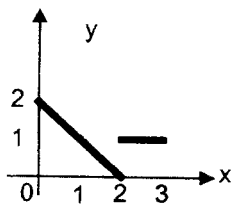
26



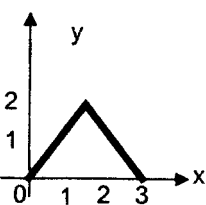
29



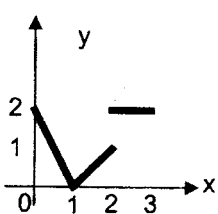
24



27



30



ХИ. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ

УРАВНЕНИЯ

1. Определение дифференциального уравнения. Задача Коши

Обыкновенным дифференциальным уравнением называется функциональное уравнение

$$F(x; y; y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (1)$$

связывающее независимое переменное x , искомую функцию $y = y(x)$ и ее производные $y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)$.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок наивысшей производной, входящей в уравнение.

Функция $y = g(x)$ называется (частным) решением

дифференциального уравнения (1), если $F(x; g(x); g'(x), g''(x), \dots, g^{(n)}(x)) \equiv 0$.

Уравнение (1) имеет, как правило, бесчисленное множество решений.

Общим решением уравнения (1) называется семейство функций $y = \varphi(x; C_1; C_2; \dots; C_n)$, зависящих от n не связанных между собой

параметров $C_1; C_2; \dots; C_n$, таких, что для любого допустимого набора

$C_1 = C_1^0; C_2 = C_2^0; \dots; C_n = C_n^0$ получается частное решение

$y = \varphi(x; C_1^0; C_2^0; \dots; C_n^0)$ уравнения (1).

Равенство $\Phi(x; C_1; C_2; \dots; C_n) = 0$, неявно задающее общее решение уравнения (1), называется общим интегралом уравнения (1).

При решении практических задач приходится искать не общее решение уравнения (1), а некоторое его частное решение, удовлетворяющее некоторым определенным условиям. Примером такой задачи является так называемая задача Коши, состоящая в нахождении решения уравнения (1), удовлетворяющего начальным условиям

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, y''(x_0) = y''_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (2)$$

При некоторых не очень жестких ограничениях на функцию F задача Коши (1), (2) имеет единственное решение.

2. Уравнение с разделяющимися переменными

Уравнение вида $y' = f(x)g(y)$ называется уравнением с разделяющимися переменными. Для решения такого уравнения

достаточно представить y' в виде отношения дифференциалов $y' = \frac{dy}{dx}$,

разделить переменные и проинтегрировать обе части уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y); \quad \frac{dy}{g(y)} = f(x) dx; \quad \int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) dx.$$

Пример 1. Решить уравнение $y' = -y/x$.

Решение. Так как $y' = dy/dx$, то $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}$.

Разделяя переменные, получим

$$\frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}; \quad \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{dx}{x}; \quad \ln|y| = -\ln|x| + C_1; \quad \ln|y| = \ln\left|\frac{C}{x}\right|;$$

$y = \frac{C}{x}$ – это и есть общее решение нашего уравнения. (Мы положили

$C = \ln|C_1|$; равенство $|y| = \left|\frac{C}{x}\right|$ можно заменить на $y = \frac{C}{x}$, так как неопределенность знака поглощается константой C .)

Уравнения с разделяющимися переменными часто пишут в другой форме:

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0.$$

Пример 2. Решить задачу Коши

$$y \cos x dx - \sin x dy = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Решение. Разделим переменные в уравнении:

$$\frac{dy}{y} = \frac{\cos x dx}{\sin x}; \quad \int \frac{dy}{y} = -\int \frac{\cos x dx}{\sin x};$$

$$\ln|y| = \ln|\sin x| + C_1; \quad \ln|y| = \ln|C \sin x|.$$

Отсюда находим общее решение $y = C \sin x$. Для определения константы C воспользуемся начальным условием $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$:

$$1 = C \sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow C = 1. \text{ Таким образом, решением задачи Коши является } y = \sin x.$$

Дифференциальное уравнение вида

$$y' = f(ax + by + d) = 0, \quad b \neq 0$$

с помощью подстановки $u(x) = ax + by + d$ приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример 3. Решить уравнение $y' = y + 2x - 3$.

Решение. Введем новую неизвестную функцию $u(x) = y + 2x - 3$. Тогда $y = u - 2x + 3$, $y' = u' - 2$, и наше уравнение примет вид

$$u' - 2 = u.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$du = (u + 2)dx; \quad \frac{du}{u + 2} = dx; \quad \int \frac{du}{u + 2} = \int dx;$$

$$\ln|u + 2| = x + C_1; \quad u = Ce^x - 2.$$

Отсюда находим $y + 2x - 3 = Ce^x - 2$; $y = Ce^x - 2x + 1$ – общее решение исходного уравнения.

3. Однородные дифференциальные уравнения

Функция двух переменных называется однородной функцией n -го измерения, если $f(\lambda x; \lambda y) = \lambda^n f(x; y)$ для всех допустимых значений λ .

Дифференциальное уравнение

$$y' = f(x; y) \tag{3}$$

называется однородным, если $f(x; y)$ является однородной функцией нулевого измерения, т.е. если $f(\lambda x; \lambda y) = f(x; y)$. Однородная функция нулевого измерения фактически является функцией частного $\frac{y}{x}$:

$$f(x; y) = f\left(x \cdot \frac{1}{x}; \frac{y}{x}\right) = f\left(1; \frac{y}{x}\right).$$

Поэтому введением нового переменного (новой неизвестной функции)

$u(x) = \frac{y}{x}$ уравнение (3) приводится к уравнению с разделяющимися переменными: $y = xu$; $y' = u + xu'$; $u + xu' = f(1; u)$; $\frac{du}{f(1; u) - u} = dx$.

Пример 4. Решить уравнение $y' = \frac{xy}{x^2 - y^2}$.

Решение. Проверим функцию $f(x; y) = \frac{x \cdot y}{x^2 - y^2}$ на однородность:

$$f(\lambda x; \lambda y) = \frac{\lambda x \cdot \lambda y}{(\lambda x)^2 - (\lambda y)^2} = \frac{x \cdot y}{x^2 - y^2} = f(x; y).$$

Следовательно, наше уравнение является однородным. Делаем подстановку $u = \frac{y}{x}$, тогда $y = xu$; $y' = u + xu'$ и уравнение принимает

$$\text{вид } u + xu' = \frac{x \cdot xu}{x^2 - (xu)^2}; \quad u + xu' = \frac{u}{1 - u^2}.$$

Получим дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными:

$$\begin{aligned} xu' &= \frac{u}{1 - u^2} - u; & xu' &= \frac{u - u + u^3}{1 - u^2}; & xu' &= \frac{u^3}{1 - u^2}; \\ \frac{(1 - u^2) du}{u^3} &= \frac{dx}{x}; & \int \frac{(1 - u^2) du}{u^3} &= \int \frac{dx}{x}; & \int \frac{du}{u^3} - \int \frac{du}{u} &= \ln|x|; \\ -\frac{1}{2u^2} - \ln|u| &= \ln|x| + C; & -\frac{1}{2u^2} &= \ln|uxC_2|. \end{aligned}$$

Подставив $u = \frac{y}{x}$, получим $-\frac{x^2}{2y^2} = \ln|yC|$, что приводит к общему интегралу исходного уравнения: $x^2 + 2y^2(\ln|y| + C) = 0$.

Дифференциальное уравнение вида

$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0$ будет однородным, если $M(x; y)$, $N(x; y)$ являются однородными функциями одного измерения.

$$\text{Уравнение вида } y' = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \quad (4)$$

приводится к однородному уравнению. Если $\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{b_2}{b_1}$, то уравнение

приводится к однородному с помощью замены переменных

$$\begin{cases} x = u + m, \\ y = v + n, \end{cases}$$

где m и n являются решением системы

$$\begin{cases} a_1m + b_1n + c_1 = 0, \\ a_2m + b_2n + c_2 = 0. \end{cases}$$

Пример 5. Решить уравнение $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y-2}{x-y-4}$.

Решение. В этом случае $\frac{a_2}{a_1} \neq \frac{b_2}{b_1}$. Сделаем замену переменных

$$\begin{cases} x = u + m, \\ y = v + n, \end{cases}$$

$dx = du$, $dy = dv$. Уравнение примет вид

$$\frac{dv}{du} = \frac{u+m+v+n-2}{u+m-v-n-4}.$$

Подберем m и n так, чтобы выполнялись равенства

$$\begin{cases} m+n-2=0, \\ m-n-4=0; \end{cases} \quad \begin{cases} m=3, \\ n=-1; \end{cases}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{u+v}{u-v}.$$

Положим $z = \frac{v}{u}$, тогда $v = zu$, $v' = z + uz'$. Уравнение примет вид

$$z + uz' = \frac{u+zu}{u-zu}; \quad z + uz' = \frac{1+z}{1-z}; \quad u \frac{dz}{du} = \frac{1+z}{1-z} - z; \quad u \frac{dz}{du} = \frac{1+z^2}{1-z}.$$

Разделяя переменные, решим это уравнение:

$$\frac{1-z}{1+z^2} dz = \frac{du}{u}; \quad \int \frac{dz}{1+z^2} - \frac{1}{2} \int \frac{d(1+z^2)}{1+z^2} = \int \frac{du}{u};$$

$$\operatorname{arctg} z - \frac{1}{2} \ln(1+z^2) = \ln|u| + C_1;$$

$$\operatorname{arctg} z - \ln\sqrt{1+z^2} = \ln|Cu|.$$

Вспомним, что $z = \frac{v}{u}$:

$$\operatorname{arctg} \frac{v}{u} = \ln \left| \sqrt{1 + \frac{v^2}{u^2}} \cdot Cu \right|.$$

Учтем, что $u = x-3$, $v = y+1$;

$$\operatorname{arctg} \frac{y+1}{x-3} = \ln \left| C \sqrt{(x-3)^2 + (y+1)^2} \right|.$$

Это и есть общий интеграл исходного уравнения.

Если в уравнении (4) $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = \lambda$, т.е. $a_2x + b_2y = \lambda(a_1x + b_1y)$, то это уравнение принимает вид

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{(a_1x + b_1y) + c_2}\right). \quad (5)$$

Подстановкой $z = a_1x + b_1y$ последнее уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример 6. Решить уравнение $y' = \frac{2x + y - 1}{4x + 2y + 5}$.

Решение. В этом случае $\frac{a_2}{a_1} = \frac{b_2}{b_1} = 2$. Введем новую неизвестную функцию $z = 2x + y$. Тогда $y = z - 2x$, $y' = z' - 2$. Наше уравнение

$$\text{примет вид } z' - 2 = \frac{z - 1}{2z + 5}; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{z - 1}{2z + 5} + 2; \quad \frac{dz}{dx} = \frac{5z + 9}{2z + 5};$$

$$\frac{2z + 5}{5z + 9} dz = dx; \quad \int \frac{(2z + 5) dz}{5z + 9} = \int dx;$$

$$\frac{2}{5}z + \frac{7}{25} \ln|5z + 9| = x + C.$$

Подставив $z = 2x + y$, получим

$$\frac{2}{5}(2x + y) + \frac{7}{25} \ln|10x + 5y + 9| = x + C.$$

Это и есть общий интеграл нашего уравнения.

4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Линейное дифференциальное уравнение первого порядка имеет вид

$$y' - p(x)y = g(x). \quad (6)$$

Для решения уравнения (6) пользуются двумя методами: вариации постоянной и методом подстановки.

А. Метод вариации постоянной. Рассмотрим сначала линейное однородное уравнение (при котором правая часть $= 0$)

$$y' - p(x)y = 0. \quad (7)$$

Это уравнение с разделяющимися переменными; его общим решением является

$$y = Ce^{\int p(x) dx}$$

Будем искать решение уравнения (6) в виде $y = C(x)e^{\int p(x)dx}$, где $C(x)$ – неизвестная функция. Имеем

$$y' = C'(x)e^{\int p(x)dx} + C(x)e^{\int p(x)dx} \cdot p(x).$$

Подставляя $y = C(x)e^{\int p(x)dx}$ в уравнение (6), получим

$$C'(x)e^{\int p(x)dx} + C(x)p(x)e^{\int p(x)dx} - p(x)C(x)e^{\int p(x)dx} = g(x),$$

или

$$C'(x)e^{\int p(x)dx} = g(x).$$

Последнее уравнение является уравнением с разделяющимися переменными, в котором неизвестной функцией выступает $C(x)$:

$$dC(x) = g(x)e^{-\int p(x)dx} dx; \quad C(x) = \int g(x)e^{-\int p(x)dx} dx.$$

Таким образом, решением уравнения (6) является

$$y = \left(\int g(x)e^{-\int p(x)dx} dx + C \right) e^{\int p(x)dx}$$

Б. Метод подстановки. Будем искать решение уравнения (6) в виде $y(x) = u(x)v(x)$. Тогда $y' = u'v + uv'$ и уравнение (6) примет вид

$$u'v + uv' - p(x)uv = g(x),$$

или

$$(u' - p(x)u)v + uv' - g(x) = 0. \quad (8)$$

Потребуем, чтобы выражение в скобках было равно нулю:

$$u' - p(x)u = 0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными; найдем некоторое частное решение $u_1(x)$ этого уравнения:

$$\frac{du}{u} = p(x)dx; \quad u = e^{\int p(x)dx}$$

Подставим $u_1(x)$ в формулу (8): $u_1v' - g(x) = 0$.

Это дифференциальное уравнение также является уравнением с разделяющимися переменными. Пусть $V(x; C)$ – общее решение последнего уравнения. Тогда общим решением уравнения (6) является $y(x) = u_1(x)V(x; C)$.

Пример 7. Решить уравнение $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$

Решение. А. Метод вариации постоянной. Решим сначала соответствующее однородное уравнение $y' + 2xy = 0$. Это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dy}{dx} = -2xy; \quad \frac{dy}{y} = -2xdx; \quad \ln|y| = -x^2 + C_1;$$

$y = Ce^{-x^2}$ – общее решение однородного уравнения. Общее решение неоднородного уравнения будем искать в виде $y = C(x)e^{-x^2}$, где $C(x)$ – неизвестная функция. Имеем

$$y' = C'(x)e^{-x^2} + C(x)e^{-x^2}(-2x).$$

Исходное уравнение примет вид

$$C'(x)e^{-x^2} - 2xC(x)e^{-x^2} + 2xC(x)e^{-x^2} = 2xe^{-x^2};$$

$$C'(x)e^{-x^2} = 2xe^{-x^2}; \quad C'(x) = 2x; \quad C(x) = x^2 + C.$$

Таким образом, общим решением исходного уравнения является

$$y = (x^2 + C)e^{-x^2}.$$

Б. Метод подстановки. Будем искать решение линейного уравнения $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$ в виде $y(x) = u(x)v(x)$. Тогда $y' = u'v + uv'$ и уравнение принимает вид

$$u'v + uv' + 2xuv = 2xe^{-x^2},$$

или

$$(u' + 2xu)v + uv' - 2xe^{-x^2} = 0. \quad (*)$$

Потребуем, чтобы выражение в скобках было равно нулю:

$u' + 2xu = 0$; решим это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{du}{dx} = -2xu; \quad \frac{du}{u} = -2xdx; \quad \int \frac{du}{u} = -\int 2xdx;$$

$$\ln|u| = -x^2 + C_1; \quad u = e^{-x^2 + C_1}.$$

Положив $C_1 = 0$, найдем частное решение этого уравнения:

$$u_1(x) = e^{-x^2}.$$

Подставим $u_1(x) = e^{-x^2}$ в (*) (при этом первое слагаемое обратится в 0):

$$e^{-x^2}v' - 2xe^{-x^2} = 0;$$

$$v' = 2x; \quad v = x^2 + C.$$

Итак, общим решением исходного уравнения является

$$y = e^{-x^2} (x^2 + C).$$

5. Уравнение Бернулли

Уравнением Бернулли называется дифференциальное уравнение вида $y' + p(x)y = g(x)y^m$, где $m \neq 0$, $m \neq 1$.

Как и линейное уравнение, уравнение Бернулли можно решить с помощью подстановки $y = u(x)v(x)$.

Пример 8. Решить уравнение $y' + 4xy = 2xe^{-x^2}\sqrt{y}$.

Решение. Будем искать решение этого уравнения в виде $y(x) = u(x)v(x)$. Имеем $y' = u'v + uv'$; уравнение примет вид

$$\begin{aligned} u'v + uv' + 4xuv - 2xe^{-x^2}\sqrt{uv} &= 0; \\ (u' + 4xu)v + uv' - 2xe^{-x^2}\sqrt{uv} &= 0. \end{aligned} \quad (**)$$

Выберем $u(x)$ так, чтобы $u' + 4xu = 0$:

$$\frac{du}{u} = -4xdx; \quad \ln|u| = -2x^2 + C_1; \quad u = e^{-2x^2 + C_1}.$$

Положив $C_1 = 0$, получаем частное решение $u_1 = e^{-2x^2}$

Подставим $u(x) = e^{-2x^2}$ в уравнение (**):

$$v'e^{-2x^2} - 2xe^{-x^2}\sqrt{e^{-2x^2}v} = 0;$$

$$v'e^{-2x^2} - 2xe^{-x^2} \cdot e^{-x^2}v = 0;$$

$$v' = 2x\sqrt{v}.$$

Решим это уравнение с разделяющимися переменными:

$$\frac{dv}{\sqrt{v}} = 2x dx; \quad \int \frac{dv}{\sqrt{v}} = \int 2x dx; \quad 2\sqrt{v} = x^2 + C; \quad v = \left(\frac{x^2 + C}{2}\right)^2.$$

Таким образом, общим решением исходного уравнения является

$$y = e^{-2x^2} \left(\frac{x^2 + C}{2}\right)^2.$$

6. Уравнение в полных дифференциалах

Дифференциальное уравнение вида

$$P(x; y)dx + Q(x; y)dy = 0 \quad (9)$$

называется *уравнением в полных дифференциалах*, если существует такая дифференцируемая функция $U(x; y)$, что

$$dU = P(x; y)dx + Q(x; y)dy.$$

Общим интегралом уравнения (9) является $U(x; y) = C$.

Для того чтобы уравнение (9) было уравнением в полных дифференциалах, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

во всех допустимых точках.

Функцию $U(x; y)$ можно найти из равенства

$$U(x; y) = \int_{(x_0; y_0)}^{(x; y)} P(x; y)d(x) + Q(x; y)dy,$$

или

$$U(x; y) = \int_{x_0}^x P(t; y_0)dt + \int_{y_0}^y Q(x; s)ds.$$

Пример 9. Решить уравнение $(x^2 + 2xy)dx + (x^2 - y)dy = 0$.

Решение. $P(x; y) = x^2 + 2xy$, $Q(x; y) = x^2 - y$, $\frac{\partial P}{\partial y} = 2x$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$.

Так как $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, то это уравнение в полных дифференциалах. Найдем функцию $U(x; y)$:

$$U(x; y) = \int_0^x P(t; 0)dt + \int_0^y Q(x; s)ds = \int_0^x t^2 dt + \int_0^y (x^2 - s)ds = \frac{x^3}{3} + x^2y - \frac{y^2}{2}.$$

Таким образом, общим интегралом исходного уравнения является

$$\frac{x^3}{3} + x^2y - \frac{y^2}{2} = C.$$

7. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка

А. Дифференциальные уравнения, не содержащие явно искомую функцию $u(x)$ и ее производные до порядка $(k - 1)$ включительно:

$$F(x; y^{(k)}; y^{(k+1)}; \dots; y^{(n)}) = 0.$$

Порядок такого уравнения можно понизить на k единиц путем замены $y^{(k)}(x) = p(x)$, при этом исходное уравнение сведется к уравнению

$$F(x; p; p'; \dots; p^{(n-k)}) = 0.$$

Пусть $p(x) = \varphi(x; C_1; C_2; \dots; C_{n-k})$ – общее решение последнего уравнения. Тогда общее решение исходного уравнения находится путем k -кратного интегрирования функции $\varphi(x; C_1; C_2; \dots; C_{n-k})$.

Пример 10. Решить задачу Коши

$$(1+x^2)y'' = 2xy',$$

$$\begin{cases} y(0) = 1, \\ y'(0) = 3. \end{cases}$$

Решение. Сначала найдем общее решение дифференциального уравнения $(1+x^2)y'' = 2xy'$. В это уравнение не входит явно неизвестная функция $y(x)$. Сделаем замену $y' = p$. Уравнение примет вид

$$(1+x^2)p' = 2xp.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dp}{p} = \frac{2xdx}{1+x^2}; \quad \ln|p| = \ln(1+x^2) + C; \quad p = C_2(1+x^2).$$

$$p = y'. \text{ Следовательно, } y(x) = \int C_2(1+x^2)dx = C_2 \left(x + \frac{x^3}{3} \right) + C_3.$$

Для нахождения C_2 и C_3 воспользуемся начальными условиями:

$$\begin{cases} y(0) = C_3 = 1, \\ y'(0) = C_2 = 3. \end{cases}$$

Таким образом, решением нашей задачи является

$$y = 3 \left(x + \frac{x^3}{3} \right) + 1 \quad \text{или} \quad y = 3x + x^3 + 1.$$

Б. Дифференциальное уравнение, не содержащее явно независимое временное: $F(y; y'; y''; \dots; y^{(n)}) = 0$.

Порядок такого уравнения можно понизить на единицу путем подстановки $y' = p(y)$. При этом уравнение примет вид

$$F(y; p; p'; \dots; p^{(n-1)}) = 0.$$

Пример 11. Решить уравнение $yy'' - 2y'y^2 = (y')^2$.

Решение. Введем новое переменное $p(y) = y'$. Тогда

$$y'' = p'_y \cdot y'(x) = p' \cdot p.$$

Наше уравнение примет вид

$$y'p - 2py^2 = p^2; \quad p(p'y - p - 2y^2) = 0.$$

$$1) p = 0; \quad y' = 0; \quad y = c.$$

$$2) p' - \frac{p}{y} - 2y = 0. \text{ Это линейное уравнение. Сделаем подстановку}$$

$p = u \cdot v$, тогда $p' = u' \cdot v + u \cdot v'$. Имеем

$$u'v + uv' - \frac{uv}{y} - 2y = 0;$$

$$\left(u' - \frac{u}{y}\right)v + uv' - 2y = 0.$$

Решим систему

$$\begin{cases} u' - \frac{u}{y} = 0, \\ uv' - 2y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{du}{u} = \frac{dy}{y}, \\ uv' - 2y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} u_1 = y, \\ yv' - 2y = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} u_1 = y, \\ v = 2y + C_1. \end{cases}$$

$p = u_1 v = y(2y + C_1)$. Вспомним, что $p(y) = y'(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = y(2y + C_1); \quad \frac{dy}{y(2y + C_1)} = dx; \quad \int \frac{dy}{y(2y + C_1)} = \int dx.$$

Представим функцию $\frac{1}{y(2y + C_1)}$ в виде суммы простых дробей:

$$\frac{1}{y(2y + C_1)} = \frac{A}{y} + \frac{B}{2y + C_1}; \quad 2Ay + AC_1 + By = 1.$$

$$\begin{cases} 2A + B = 0, \\ AC_1 = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} A = \frac{1}{C_1}, \\ B = -\frac{2}{C_1}. \end{cases}$$

Отсюда находим

$$x = \frac{1}{C_1} \int \frac{dy}{y} - \frac{2}{C_1} \int \frac{dy}{2y + C_1}; \quad x = \frac{1}{C_1} \ln|y| - \frac{1}{C_2} \ln|2y + C_1| + C_2.$$

Это и есть общее решение исходного уравнения.

8. Линейное однородное дифференциальное уравнение n -го порядка с постоянными коэффициентами

Линейным однородным дифференциальным уравнением (ЛОДУ) n -го порядка называется дифференциальное уравнение вида

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \quad (10)$$

где $a_j(x)$ – известные функции, $y(x)$ – искомая функция.

Система функций $f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x)$ называется линейно-зависимой, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, не все равные нулю и такие что $\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \dots + \lambda_m f_m(x) \equiv 0$. Если же последнее равенство возможно лишь при $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$, то система функций $f_1(x); f_2(x); \dots; f_m(x)$ называется линейно независимой.

Теорема 1. Пусть $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ – линейно независимая система решений уравнения (10). Тогда общее решение уравнения (10) имеет вид

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x),$$

где C_1, C_2, \dots, C_n – произвольный набор чисел.

Система линейно независимых решений $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ уравнения (10) называется фундаментальной системой решений (ФСР) уравнения (10).

В общем случае найти фундаментальную систему решений уравнения (10), а значит и его общее решение, очень сложно; в большинстве случаев эта задача неразрешима. Однако задача заметно облегчается, если $a_j(x)$ являются постоянными величинами.

Для решения ЛОДУ с действительными постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + a_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0 \quad (11)$$

составляется характеристическое уравнение

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + a_{n-2}\lambda^{n-2} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0. \quad (12)$$

Зная корни уравнения (12), можно составить ФСР уравнения (11).

А. Каждому действительному простому корню λ ставится в соответствие функция $e^{\lambda x}$ – частное решение уравнения (11).

Б. Каждому действительному корню λ кратности k ставится в соответствие следующий набор из k частных решений (11):

$$e^{\lambda x}; x e^{\lambda x}; x^2 e^{\lambda x}; \dots; x^{k-1} e^{\lambda x}.$$

В. Каждой паре комплексно-сопряженных простых корней $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ уравнения (12) ставится в соответствие следующая пара частных решений уравнения (11): $e^{\alpha x} \cos \beta x$, $e^{\alpha x} \sin \beta x$.

Г. Каждой паре комплексно-сопряженных корней $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ кратности k ставится в соответствие следующий набор из 2-х частных решений уравнений (11):

$$e^{\alpha x} \cos \beta x; x e^{\alpha x} \cos \beta x; x^2 e^{\alpha x} \cos \beta x; \dots; x^{k-1} e^{\alpha x} \cos \beta x;$$

$$e^{\alpha x} \sin \beta x; x e^{\alpha x} \sin \beta x; x^2 e^{\alpha x} \sin \beta x; \dots; x^{k-1} e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Следуя указанному правилу, строится ФСР уравнения (11) и находится общее решение этого уравнения как линейная комбинация элементов фундаментальной системы решений.

Пример 12. Решить уравнение $y'' - 5y' + 6y = 0$.

Решение. Составим и решим характеристическое уравнение $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$; $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 3$ – простые корни. Значит, функции $y_1 = e^{2x}$; $y_2 = e^{3x}$ образуют ФСР дифференциального уравнения. Следовательно, общее решение уравнения имеет вид $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x}$, где C_1, C_2 – произвольные числа.

Пример 13. Решить уравнение $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ имеет один двукратный корень $\lambda = 3$. Ему соответствует пара функций $y_1 = e^{3x}$, $y_2 = x e^{3x}$, образующая ФСР дифференциального уравнения. Общим решением ЛОДУ является $y = C_1 e^{3x} + C_2 x e^{3x}$.

Пример 14. Решить уравнение $y'' + 4y' + 13y = 0$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 4\lambda + 13 = 0$ имеет пару простых попарно-сопряженных корней $\lambda_1 = -2 - 3i$, $\lambda_2 = -2 + 3i$.

Им соответствует пара функций $y_1 = e^{-2x} \cos 3x$, $y_2 = e^{-2x} \sin 3x$, образующих ФСР дифференциального уравнения. Общим решением уравнения является

$$y = C_1 e^{-2x} \cos 3x + C_2 e^{-2x} \sin 3x,$$

$$y = e^{-2x} (C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$$

Пример 15. Решить уравнение $y^{(6)} - y'' = 0$.

Решение. Решим характеристическое уравнение

$$\lambda^6 - \lambda^2 = 0; \lambda^2(\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda^2 + 1) = 0.$$

Корнями уравнения являются: $\lambda_1 = 0$ – корень кратностью 2; $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 1$ – простые корни; $\lambda_4 = -i$, $\lambda_5 = i$ – простые корни. Им соответствует следующий набор функций:

$$\lambda = 0 \rightarrow y_1 = 1; y_2 = x;$$

$$\lambda = -1 \rightarrow y_3 = e^{-x};$$

$$\tilde{\lambda} = 1 \rightarrow y_4 = e^x;$$

$$\lambda = -i \rightarrow y_5 = \cos x;$$

$$\lambda = i \rightarrow y_6 = \sin x.$$

Эти функции образуют ФСР ЛОДУ. Общим решением уравнения является

$$y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x} + C_4 e^x + C_5 \cos x + C_6 \sin x.$$

9. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейным неоднородным дифференциальным уравнением (ЛНДУ) n -го порядка называется уравнение вида

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f(x), \quad (13)$$

где $a_j(x)$, $f(x)$ – известные функции, $y(x)$ – искомая функция.

Теорема 2. Пусть $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ – ФСР однородного уравнения (10) и пусть $\tilde{y}(x)$ – некоторое частное решение уравнения (13). Тогда общее решение уравнения (13) имеет вид

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x) + \tilde{y}(x),$$

где $C_1; C_2; \dots; C_n$ – произвольные постоянные; другими словами, общим решением уравнения (13) является $y = y_{00} + \tilde{y}$, где y_{00} – общее решение соответствующего однородного уравнения, а \tilde{y} – некоторое частное решение уравнения (13).

Если в уравнении (13) $a_j(x)$ являются постоянными величинами, а $f(x)$ имеет специальный вид

$$f(x) = (b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0) e^{\alpha x} \quad (14)$$

или

$$f(x) = \left((b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0) \cos \beta x + (c_k x^k + c_{k-1} x^{k-1} + \dots + c_1 x + c_0) \sin \beta x \right) e^{\alpha x}, \quad (15)$$

то удастся найти частное решение $\tilde{y}(x)$ уравнения (13).

А. Пусть $f(x)$ имеет вид (14) и число α не является корнем характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения. Тогда частное решение $\tilde{y}(x)$ уравнения (13) ищется в виде

$$\tilde{y}(x) = (A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots + A_1 x + A_0) e^{\alpha x},$$

где коэффициенты A_j находятся путем подстановки $\tilde{y}(x)$ в уравнение (13).

Б. Пусть $f(x)$ имеет вид (14) и число α является корнем кратностью r характеристического уравнения соответствующего однородного уравнения. В этом случае частное решение $\tilde{y}(x)$ ищется в виде

$$\tilde{y}(x) = x^r (A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \dots + A_1 x + A_0) e^{\alpha x}.$$

В. Пусть $f(x)$ имеет вид (15) и число $\alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения. Тогда частное решение $\tilde{y}(x)$ ищется в виде

$$\tilde{y} = \left((A_p x^p + A_{p-1} x^{p-1} + \dots + A_1 x + A_0) \cos \beta x + (B_p x^p + B_{p-1} x^{p-1} + \dots + B_1 x + B_0) \sin \beta x \right) e^{\alpha x},$$

где $p = \max \{ m; k \}$.

Г. Пусть $f(x)$ имеет вид (15) и число $\alpha + i\beta$ является корнем кратности r характеристического уравнения. Тогда частное решение

$$\tilde{y} = x^r \left((A_p x^p + A_{p-1} x^{p-1} + \dots + A_1 x + A_0) \cos \beta x + (B_p x^p + B_{p-1} x^{p-1} + \dots + B_1 x + B_0) \sin \beta x \right) e^{\alpha x},$$

где, как и прежде, $p = \max \{ m; k \}$.

Пример 16. Решить уравнение $y'' - 7y' + 6y = (x - 2)e^x$.

Решение. Общее решение этого уравнения имеет вид $y = y_{00} + \tilde{y}$, где y_{00} – общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y'' - 7y' + 6y = 0, \tag{16}$$

а \tilde{y} – некоторое частное решение нашего неоднородного уравнения. Характеристическое уравнение однородного уравнения (16) имеет вид $\lambda^2 - 7\lambda + 6 = 0$, отсюда находим $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 6$.

Таким образом, $y_{00} = C_1 e^x + C_2 e^{6x}$. Найдем $\tilde{y}(x)$.

Число $\alpha = 1$ является простым корнем характеристического уравнения, следовательно, $\tilde{y}(x)$ имеет вид

$$\tilde{y}(x) = x(Ax + B)e^x \text{ или } \tilde{y} = (Ax^2 + Bx)e^x.$$

Для определения коэффициентов A и B подставим \tilde{y} в исходное неоднородное уравнение. Имеем

$$\tilde{y}' = (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x = (Ax^2 + (2A + B)x + B)e^x;$$

$$\begin{aligned} \tilde{y}'' &= (2Ax + 2A + B)e^x + (Ax^2 + (2A + B)x + B)e^x = \\ &= (Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B)e^x. \end{aligned}$$

Подставим \tilde{y} в первоначальное уравнение:

$$\begin{aligned} (Ax^2 + (4A + B)x + 2A + 2B)e^x - 7(Ax^2 + (2A + B)x + B)e^x + \\ + 6(Ax^2 + Bx)e^x = (x - 2)e^x; \end{aligned}$$

$$(-10Ax + 2A - 5B)e^x = (x - 2)e^x;$$

$$-10Ax + 2A - 5B = x - 2.$$

Последнее равенство приводит к системе

$$\begin{cases} -10A = 1, & \begin{cases} A = -1/10, \\ B = 9/25. \end{cases} \\ 2A - 5B = -2; \end{cases}$$

Таким образом,

$$\tilde{y} = \left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x \right) e^x,$$

и общим решением нашего неоднородного уравнения является

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{6x} + \left(-\frac{1}{10}x^2 + \frac{9}{25}x \right) e^x.$$

Пример 17. Решить уравнение $y'' + y = 4x \cos x$.

Решение. Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 1 = 0$ имеет простые корни $\lambda_1 = -i$, $\lambda_2 = i$. Общим решением соответствующего однородного уравнения является

$$y_{\infty} = C_1 \cos x + C_2 \sin x.$$

Правая часть неоднородного уравнения имеет специальный вид (15).

Число $\lambda = i$ является простым корнем характеристического уравнения, поэтому частное решение \tilde{y} нашего уравнения ищем в виде

$$\tilde{y} = x \left((Ax + B) \cos x + (Cx + D) \sin x \right) = (Ax^2 + Bx) \cos x + (Cx^2 + Dx) \sin x.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{y}' &= (2Ax + B) \cos x - (Ax^2 + Bx) \sin x + (2Cx + D) \sin x + \\ &+ (Cx^2 + Dx) \cos x = (Cx^2 + (2A + D)x + B) \cos x + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+(-Ax^2 + (2C - B)x + D) \sin x; \\
 \tilde{y}'' &= (2Cx + 2A + D) \cos x - (Cx^2 + (2A + D)x + B) \sin x + \\
 &+ (-2Ax - B + 2C) \sin x + (-Ax^2 + (2C - B)x + D) \cos x = \\
 &= (-Ax^2 + (4C - B)x + 2D) \cos x + \\
 &+ (-Cx^2 + (-4A - D)x - 2B + 2C) \sin x.
 \end{aligned}$$

Подставим \tilde{y} в исходное уравнение:

$$\begin{aligned}
 &(-Ax^2 + (4C - B)x + 2D) \cos x + (-Cx^2 + (-4A - D)x - 2B + 2C) \sin x + \\
 &+ (Ax^2 + Bx) \cos x + (Cx^2 + Dx) \sin x = 4x \cos x; \\
 &(4Cx + 2D) \cos x + (-4Ax - 2B + 2C) \sin x = 4x \cos x.
 \end{aligned}$$

Приравняв соответствующие коэффициенты, получим систему

$$\begin{cases} 4C = 4, \\ 2D = 0, \\ -4A = 0, \\ -2B + 2C = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} A = 0, \\ B = 1, \\ C = 1, \\ D = 0. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\tilde{y} = x \cos x + x^2 \sin x,$$

и общим решением исходного неоднородного уравнения является

$$y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x \cos x + x^2 \sin x.$$

Пример 18. Записать вид частного решения линейного неоднородного дифференциального уравнения (без нахождения коэффициентов):

а) $y'' - 4y' + 4y = (x + 3)e^{2x}$;

б) $y'' + 2y' + 5y = ((x + 1)\cos 2x + (x^2 + 4)\sin 2x)e^{-x}$;

в) $y'' - y' - 2y = (x^2 + x - 1)\sin 2x$.

Решение. а) Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ имеет один корень $\lambda = 2$ кратностью 2. Число $\alpha = 2$ совпадает с этим корнем, поэтому частное решение \tilde{y} неоднородного уравнения имеет вид

$$\tilde{y} = x^2(Ax + B)e^{2x} \text{ или } \tilde{y} = (Ax^3 + Bx^2)e^{2x}.$$

б) Характеристическое уравнение $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ имеет два простых комплексных взаимно сопряженных корня: $\lambda_1 = -1 - 2i$ и $\lambda_2 = -1 + 2i$. Число $\alpha + i\beta = -1 + 2i$ совпадает с одним из этих корней,

поэтому частное решение \tilde{y} неоднородного уравнения следует искать в виде

$$\tilde{y} = x \left((Ax^2 + Bx + C) \cos 2x + (Dx^2 + Ex + F) \sin 2x \right) e^{-x}$$

в) Характеристическое уравнение $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ имеет два простых корня: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 2$. Число $\alpha + \beta i = 2i$ не является корнем характеристического уравнения, следовательно, частное решение \tilde{y} имеет вид

$$\tilde{y} = (Ax^2 + Bx + C) \cos 2x + (Dx^2 + Ex + F) \sin 2x.$$

Теорема 3. Пусть даны два ЛНДУ

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f_1(x),$$

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f_2(x),$$

имеющие частными решениями $\tilde{y}_1(x)$ и $\tilde{y}_2(x)$ соответственно.

Тогда функция $\tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x)$ является частным решением уравнения

$$y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + a_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \dots + a_1(x)y' + a_0(x)y = f_1(x) + f_2(x).$$

Пример 19. Найти общее решение уравнения

$$y'' - 3y' + 2y = (x^2 + 1)e^x + x \sin x.$$

Решение. Общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y = y_{00} + \tilde{y}, \text{ где } y_{00} - \text{общее решение однородного уравнения}$$

$y'' - 3y' + 2y = 0$, а $\tilde{y}(x)$ – некоторое частное решение исходного неоднородного уравнения.

Начнем с нахождения y_{00} . Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ имеет два простых корня: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$. Таким образом, $y_{00} = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

Правая часть исходного уравнения является суммой двух слагаемых $f_1(x) = (x^2 + 1)e^x$ и $f_2(x) = x \sin x$, поэтому $\tilde{y}(x)$ можно представить в виде суммы функций: $\tilde{y} = \tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x)$, где $\tilde{y}_1(x)$, $\tilde{y}_2(x)$ – частные решения неоднородных уравнений

$$y'' - 3y' + 2y = (x^2 + 1)e^x, \quad (17)$$

$$y'' - 3y' + 2y = x \sin x \quad (18)$$

соответственно.

Найдем $\tilde{y}_1(x)$. Число $\alpha = 1$ является простым корнем характеристического уравнения, поэтому $\tilde{y}_1(x) = x (Ax^2 + Bx + C) e^x$

или $\tilde{y}_1(x) = (Ax^3 + Bx^2 + Cx) e^x$. Для нахождения коэффициентов A, B, C подставим \tilde{y}_1 в уравнение (17)

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1' &= (3Ax^2 + 2Bx + C) e^x + (Ax^3 + Bx^2 + Cx) e^x = \\ &= (Ax^3 + (3A + B)x^2 + (2B + C)x + C) e^x; \\ \tilde{y}_1'' &= (3Ax^2 + 2(3A + B)x + 2B + C) e^x + \\ &+ (Ax^3 + (3A + B)x^2 + (2B + C)x + C) e^x = \\ &= (Ax^3 + (6A + B)x^2 + (6A + 4B + C)x + (2B + 2C)) e^x; \\ &(Ax^3 + (6A + B)x^2 + (6A + 4B + C)x + (2B + 2C)) e^x - \\ &- 3(Ax^3 + (3A + B)x^2 + (2B + C)x + C) e^x + 2(Ax^3 + Bx^2 + Cx) e^x = \\ &= (x^2 + 1) e^x - 3Ax^2 + (6A - 2B)x + (2B - C) = x^2 + 1. \end{aligned}$$

Приходим к системе

$$\begin{cases} -3A = 1, \\ 6A - 2B = 0, \\ 2B - C = 1; \end{cases} \quad \begin{cases} A = -1/3, \\ B = -1, \\ C = -3. \end{cases}$$

Получим

$$\tilde{y}_1 = \left(-\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x\right) e^x.$$

Перейдём к нахождению $\tilde{y}_2(x)$. Число $\alpha + \beta i = i$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому $\tilde{y}_2(x)$ будем искать в виде

$$\tilde{y}_2 = (Dx + E)\cos x + (Fx + H)\sin x.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{y}_2 &= D\cos x - (Dx + E)\sin x + F\sin x + (Fx + H)\cos x = \\ &= (Fx + (D + H))\cos x + (-Dx + (F - E))\sin x. \\ \tilde{y}_2'' &= F\cos x - (Fx + (D + H))\sin x - D\sin x + (-Dx + (F - E))\cos x = \\ &= (-Dx + (2F - E))\cos x + (-Fx + (-2D - H))\sin x. \end{aligned}$$

Подставим $\tilde{y}_2(x)$ в (18):

$$\begin{aligned} &(-Dx + (2F - E))\cos x + (-Fx + (-2D - H))\sin x - \\ &- 3(Fx + (D + H)\cos x + (-Dx + (F - E))\sin x) + \\ &+ 2((Dx + E)\cos x + (Fx + H)\sin x) = x \sin x. \end{aligned}$$

Это равенство приводит к системе

$$\begin{cases} D - 3F = 0, \\ -3D + E + 2F - 3H = 0, \\ 3D + F = 1, \\ -2D + 3E - 3F + H = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} D = 3/10, \\ E = 17/50, \\ F = 1/10, \\ H = -3/25. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\tilde{y}_2 = \left(\frac{3}{10}x + \frac{17}{50} \right) \cos x + \left(\frac{1}{10}x - \frac{3}{25} \right) \sin x$$

и

$$\tilde{y}(x) = \left(-\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x \right) e^x + \left(\frac{3}{10}x + \frac{17}{50} \right) \cos x + \left(\frac{1}{10}x - \frac{3}{25} \right) \sin x.$$

Общим решением нашего уравнения является

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \left(-\frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x \right) e^x + \left(\frac{3}{10}x + \frac{17}{50} \right) \cos x + \left(\frac{1}{10}x - \frac{3}{25} \right) \sin x,$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Пример 20. Решить задачу Коши

$$y'' - 4y' + 3y = x + 2,$$

$$\begin{cases} y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

Решение. Сначала найдем общее решение дифференциального уравнения. Характеристическое уравнение $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ имеет два простых вещественных корня $\lambda = 1, \lambda = 3$, поэтому общим решением соответствующего однородного уравнения $y'' - 4y' + 3y = 0$ является

$$y_{00} = C_1 e^x + C_2 e^{3x}.$$

Найдем частное решение $\tilde{y}(x)$ неоднородного уравнения. Число $\lambda = 0$ не является корнем характеристического уравнения, поэтому \tilde{y} будем искать в виде $\tilde{y} = Ax + B$. Имеем $\tilde{y}' = A, \tilde{y}'' = 0$.

Подставим $\tilde{y} = Ax + B$ в исходное дифференциальное уравнение:

$$0 - 4A + 3(Ax + B) = x + 2;$$

$$3Ax + (-4A + 3B) = x + 2;$$

$$\begin{cases} 3A = 1, \\ -4A + 3B = 2; \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1/3, \\ B = 10/9, \end{cases}$$

откуда находим $\tilde{y} = \frac{1}{9}(3x + 10)$.

Таким образом, общим решением дифференциального уравнения является $y = C_1 e^x + C_2 e^{3x} + \frac{1}{9}(3x + 10)$.

Для нахождения коэффициентов C_1, C_2 воспользуемся начальными условиями

$$y(0) = C_1 + C_2 + 10/9.$$

$$y'(x) = C_1 e^x + 3C_2 e^{3x} + \frac{1}{3}; \quad y'(0) = C_1 + 3C_2 + \frac{1}{3}.$$

Составим и решим систему уравнений

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + \frac{10}{9} = 1, \\ C_1 + 3C_2 + \frac{1}{3} = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = -\frac{1}{9}. \end{cases}$$

Итак, решением задачи Коши является функция

$$y = -\frac{1}{9}e^{3x} + \frac{1}{9}(3x + 10).$$

10. Метод вариации постоянных

Если известно общее решение однородного уравнения (10), то общее решение неоднородного уравнения (13) (с теми же коэффициентами $a_j(x)$) можно найти, используя метод вариации постоянных. Пусть $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ – ФСР однородного уравнения (10) и $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \dots + C_n y_n(x)$ – общее решение (10). Общее решение неоднородного уравнения (13) ищется в виде

$$y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) + \dots + C_n(x) y_n(x), \quad (19)$$

где коэффициенты $C_1(x), C_2(x), \dots, C_n(x)$ рассматриваются как неизвестные функции, получающиеся путем вариации постоянных C_1, C_2, \dots, C_n . Подстановка функции (19) в уравнение (13) приводит к следующей системе уравнений относительно $C_1'(x), C_2'(x), \dots, C_n'(x)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1' y_1 + C_2' y_2 + \dots + C_n' y_n = 0, \\ C_1' y_1' + C_2' y_2' + \dots + C_n' y_n' = 0, \\ C_1' y_1'' + C_2' y_2'' + \dots + C_n' y_n'' = 0, \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ C_1' y_1^{(n-2)} + C_2' y_2^{(n-2)} + \dots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0, \\ C_1' y_1^{(n-1)} + C_2' y_2^{(n-1)} + \dots + C_n' y_n^{(n-1)} = f(x). \end{array} \right.$$

Решив эту систему и подставив найденные функции $C_i(x)$ в (19), получим общее решение неоднородного уравнения (13).

Пример 21. Решить уравнение $y'' + y = \operatorname{tg} x$.

Решение. Общим решением однородного уравнения $y'' + y = 0$ является $y_{00} = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Будем искать общее решение неоднородного уравнения в виде

$$y = C_1(x) \cos x + C_2(x) \sin x,$$

где $C_1(x)$, $C_2(x)$ – функции, удовлетворяющие системе

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1' \cos x + C_2' \sin x = 0, \\ -C_1' \sin x + C_2' \cos x = \operatorname{tg} x. \end{array} \right.$$

Решим эту систему методом Крамера:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} = 1, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin x \\ \operatorname{tg} x & \cos x \end{vmatrix} = -\frac{\sin^2 x}{\cos x},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\sin x & \operatorname{tg} x \end{vmatrix} = \sin x.$$

Отсюда находим

$$C_1' = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}, \quad C_2' = \sin x;$$

$$C_1(x) = -\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} dx = \int \frac{\cos^2 x - 1}{\cos x} dx = \int \cos x dx - \int \frac{dx}{\cos x} =$$

$$= \sin x - \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + A_1,$$

$$C_2(x) = \int \sin x dx = -\cos x + A_2.$$

Таким образом, общим решением неоднородного уравнения является

$$y = \left(\sin x - \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + A_1 \right) \cos x + (-\cos x + A_2) \sin x,$$

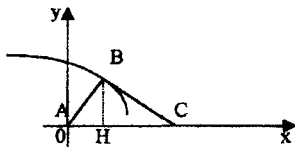
или

$$y = A_1 \cos x + A_2 \sin x - \cos x \cdot \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right|,$$

где A_1, A_2 – произвольные постоянные.

11. Задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Пример 22. Найти кривую, проходящую через точку (1;2) и обладающую тем свойством, что площадь треугольника, образованного касательной, осью абсцисс и радиус-вектором, проведенным к точке касания, есть величина постоянная, равная 5.



Решение. Пусть $B(x; y)$ – точка касания, BC – отрезок касательной, AB – радиус-вектор, BH – высота треугольника ABC , площадь которого равна 5. Если $\angle BCH = \varphi$, то $\operatorname{tg} \varphi = -y'$ и длина основания AC равна

$x - \frac{y}{y'}$. Так как $BH = y$, то $2S_{ABC} = 10 = y \left(x - \frac{y}{y'} \right)$. С учетом того, что

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$, это уравнение сводится к линейному относительно $x(y)$

дифференциальному уравнению $\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} - \frac{10}{y^2}$ с начальным условием

$x(2) = 1$. Решением этого линейного дифференциального уравнения является $x = \frac{5}{y} + Cy$. Из дополнительного условия $x(2) = 1$ следует, что

$C = -3/4$. Таким образом, искомая кривая задается уравнением

$$x = \frac{5}{y} - \frac{3}{4}y.$$

Пример 23. Рыболовецкий бот движется по заливу со скоростью 25 км/ч. Через 1 минуту после остановки двигателя его скорость составила 15 км/ч. Считая, что сопротивление воды пропорционально квадрату скорости лодки, найти скорость лодки через 3 минуты после остановки двигателя.

Решение. Пусть $v(t)$ – скорость лодки в момент времени t . Из второго закона Ньютона и условия задачи следует, что $m \frac{dv}{dt} = -kv^2$.

Отсюда $-\frac{dv}{v^2} = \frac{k}{m} dt$ и, следовательно, $v = \frac{m}{kt + cm} = \frac{1}{\frac{k}{m}t + C}$.

Учитывая начальные условия $v(0) = 25$, находим $C = 0,04$, а из условия

$v\left(\frac{1}{60}\right) = 15$ следует, что $\frac{k}{m} = \frac{8}{5}$. Наконец,

$$v\left(\frac{3}{60}\right) = \frac{1}{\frac{8}{5} \cdot \frac{3}{60} + \frac{1}{25}} = \frac{25}{3}.$$

12. Системы дифференциальных уравнений. Линейные системы

Система уравнений вида

$$\begin{cases} x_1' = f_1(t; x_1; x_2; \dots; x_n), \\ x_2' = f_2(t; x_1; x_2; \dots; x_n), \\ \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_n' = f_n(t; x_1; x_2; \dots; x_n), \end{cases} \quad (20)$$

где t – независимое переменное, x_1, x_2, \dots, x_n – искомые функции, называется нормальной системой дифференциальных уравнений n -го порядка. Решением этой системы на интервале $(a; b)$ называется совокупность функций $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, которые при подстановке их в систему (20) обращают уравнения системы в тождества на $(a; b)$.

Как правило, система (20) имеет бесконечное множество решений $x_1 = x_1(t; C_1; C_2; \dots; C_n), x_2 = x_2(t; C_1; C_2; \dots; C_n)$,

$$\det(A - \lambda E) = 0. \quad (24)$$

Набору из n корней (с учетом кратности) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ уравнения (24) ставят в соответствие определенный набор частных решений $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$, составляющих ФСР системы.

А. Если λ – простой корень уравнения (24), то ему ставится в соответствие вектор-функция (частное решение однородной системы)

$$X(t) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} e^{\lambda t},$$

где $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ – собственный вектор матрицы A , соответствующий

собственному значению λ .

Б. Если $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ – простые попарно сопряженные комплексные корни уравнения (24), то этой паре ставится в соответствие пара функций

$$X_1 = \operatorname{Re} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} e^{(\alpha+i\beta)t}, \quad X_2 = \operatorname{Im} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} e^{(\alpha+i\beta)t},$$

где, как и прежде, $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}$ – собственный вектор матрицы A ,

соответствующий собственному значению $\lambda = \alpha + i\beta$.

В. Если λ – корень кратностью $\gamma > 1$, то общее решение системы (22) ищется в виде

$$X(t) = \begin{pmatrix} \xi_{11} + \xi_{12}t + \dots + \xi_{1r}t^{r-1} \\ \xi_{21} + \xi_{22}t + \dots + \xi_{2r}t^{r-1} \\ \dots \dots \dots \dots \\ \xi_{n1} + \xi_{n2}t + \dots + \xi_{nr}t^{r-1} \end{pmatrix} e^{\lambda t},$$

при этом ξ_{ij} находят путем подстановки этой функции в систему (22).

Пример 24. Решить задачу Коши

$$\begin{cases} x' = x + 3y, & x(0)=3, & y(0)=1. \\ y' = -x + 5y; \end{cases}$$

Решение. Матрица системы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 3 \\ -1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0; \quad \lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0; \quad \lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 4 - \text{простые корни.}$$

Найдем собственные векторы матрицы A , соответствующие этим собственным значениям.

1) $\lambda=2$. Найдем собственный вектор, соответствующий $\lambda = 2$.

$$\begin{cases} (1-2)\xi_1 + 3\xi_2 = 0, \\ -\xi_1 + (5-2)\xi_2 = 0; \end{cases} \quad \xi_1 = 3\xi_2.$$

В качестве собственного вектора можно взять $Y = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, следовательно,

$X = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$ будет частным решением однородной системы.

2) $\lambda = 4$. Это собственное значение приводит к системе

$$\begin{cases} (1-4)\xi_1 + 3\xi_2 = 0, \\ -\xi_1 + (5-4)\xi_2 = 0; \end{cases} \quad \xi_1 = \xi_2.$$

Вектор $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ является собственным вектором, отвечающим собственному значению $\lambda = 4$. В качестве второго элемента ФСР

однородной системы можно взять $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t}$.

Общее решение однородной системы имеет вид

$$X = C_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + C_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{4t},$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные, иначе говоря, общим решением однородной системы является

$$\begin{cases} x = 3C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t}, \\ y = C_1 e^{2t} + C_2 e^{4t}. \end{cases}$$

Для нахождения коэффициентов C_1, C_2 воспользуемся начальными условиями:

$$\begin{cases} 3C_1 + C_2 = 3, \\ C_1 + C_2 = 1, \end{cases}$$

отсюда находим $C_1 = 1, C_2 = 0$. Таким образом, решением задачи Коши является

$$\begin{cases} x = 3e^{2t}, \\ y = e^{2t} \end{cases}$$

Пример 25. Решить систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = x - 4y, \\ y' = x - 3y. \end{cases}$$

Решение. Матрица этой линейной однородной системы с постоянными коэффициентами имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Найдем собственные значения этой матрицы:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -4 \\ 1 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = 0; \quad \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$$

$\lambda = -1$ – двукратный корень этого характеристического уравнения.

Общее решение системы уравнений будем искать в виде вектор-функции

$$X = \begin{pmatrix} \xi_{11} + \xi_{12} t \\ \xi_{21} + \xi_{22} t \end{pmatrix} e^{-t},$$

или

$$\begin{cases} x = (\xi_{11} + \xi_{12} t) e^{-t}, \\ y = (\xi_{21} + \xi_{22} t) e^{-t}. \end{cases} \quad (25)$$

Тогда

$$x' = \xi_{12} e^{-t} - (\xi_{11} + \xi_{12} t) e^{-t} = (\xi_{12} - \xi_{11} - \xi_{12} t) e^{-t},$$

$$y' = \xi_{22} e^{-t} - (\xi_{21} + \xi_{22} t) e^{-t} = (\xi_{22} - \xi_{21} - \xi_{22} t) e^{-t}.$$

Подставим эти функции $x(t)$, $y(t)$ в исходную систему дифференциальных уравнений; после сокращения на e^{-t} получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \xi_{12} - \xi_{11} - \xi_{12} t = \xi_{11} + \xi_{12} t - 4\xi_{21} - 4\xi_{22} t, \\ \xi_{22} - \xi_{21} - \xi_{22} t = \xi_{11} + \xi_{12} t - 3\xi_{21} - 3\xi_{22} t, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (2\xi_{12} - 4\xi_{22})t + (2\xi_{11} - \xi_{12} - 4\xi_{21}) = 0, \\ (\xi_{12} - 2\xi_{22})t + (\xi_{11} - 2\xi_{21} - \xi_{22}) = 0. \end{cases}$$

Приравняв выражения в скобках к нулю, придем к системе линейных однородных уравнений с неизвестными ξ_{11} , ξ_{12} , ξ_{21} , ξ_{22} .

$$\begin{cases} 2\xi_{12} - 4\xi_{22} = 0, \\ 2\xi_{11} - \xi_{12} - 4\xi_{21} = 0, \\ \xi_{12} - 2\xi_{22} = 0, \\ \xi_{11} - 2\xi_{21} - \xi_{22} = 0. \end{cases} \quad (26)$$

Решим эту систему методом Гаусса, расположив неизвестные ξ_{ij} по порядку $(\xi_{11}; \xi_{12}; \xi_{21}; \xi_{22})$:

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 0 & -4 & 0 \\ 2 & -1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \end{array} \right) & \sim & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) & \begin{array}{l} I_2 - 2I_1 \\ \\ \\ \end{array} \\ \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) & \begin{array}{l} I_3 + I_2 \\ I_4 + I_2 \\ \end{array} & \sim & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Получим, что система (26) равносильна следующей системе из двух уравнений:

$$\begin{cases} \xi_{11} - 2\xi_{21} - \xi_{22} = 0, \\ -\xi_{12} + 2\xi_{22} = 0. \end{cases}$$

Объявим неизвестные ξ_{21} и ξ_{22} свободными и положим $\xi_{21} = C_1$; $\xi_{22} = C_2$. Тогда решение системы (25) запишем в виде

$$\begin{cases} \xi_{11} = 2C_1 + C_2, \\ \xi_{12} = 2C_2, \\ \xi_{21} = C_1, \\ \xi_{22} = C_2. \end{cases}$$

Подставим эти значения ξ_{ij} в (25), получим решение исходной системы дифференциальных уравнений в виде

$$\begin{cases} x(t) = (2C_1 + C_2 + 2C_2 t)e^{-t}, \\ y(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-t}. \end{cases}$$

Пример 26. Решить задачу Коши для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = 4x + 7y; \end{cases} \quad x(0)=1, \quad y(0)=0.$$

Решение. Сначала найдем общее решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений. Матрицей системы является

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 4 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0; \quad \lambda^2 - 10\lambda + 29 = 0.$$

Корнями этого уравнения являются $\lambda_1 = 5 - 2i$, $\lambda_2 = 5 + 2i$. Найдем собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda = 5 + 2i$:

$$\begin{cases} (3 - (15 + 2i))\xi_1 - 2\xi_2 = 0, & \{ (-2 - 2i)\xi_1 - 2\xi_2 = 0, \\ 4\xi_1 + (7 - (5 + 2i))\xi_2 = 0; & \{ 4\xi_1 + (2 - 2i)\xi_2 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы этой системы равен единице, и она равносильна уравнению

$$(-1 - i)\xi_1 - \xi_2 = 0.$$

Положим $\xi_1 = 1$, тогда $\xi_2 = -1 - i$. Вектор $Y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 - i \end{pmatrix}$ является

собственным вектором матрицы A , отвечающим собственному значению $\lambda = 5 + 2i$. Имеем

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix} e^{(5+2i)t} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1-i \end{pmatrix} e^{5t} (\cos 2t + i \sin 2t) = \\ &= \begin{pmatrix} \cos 2t + i \sin 2t \\ (-1-i)(\cos 2t + i \sin 2t) \end{pmatrix} e^{5t} = \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix} e^{5t} + \\ &+ i \begin{pmatrix} \sin 2t \\ -\cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix} e^{5t}. \end{aligned}$$

Отсюда находим пару вещественных решений системы дифференциальных уравнений, образующих ФСР:

$$X_1 = \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix} e^{5t}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} \sin 2t \\ -\cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix} e^{5t}.$$

Общее решение нашей системы имеет вид

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} \cos 2t \\ -\cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix} e^{5t} + C_2 \begin{pmatrix} \sin 2t \\ -\cos 2t - \sin 2t \end{pmatrix} e^{5t},$$

или

$$\begin{cases} x(t) = (C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) e^{5t}, \\ y(t) = ((-C_1 - C_2) \cos 2t + (C_1 - C_2) \sin 2t) e^{5t}. \end{cases}$$

Перейдем к решению задачи Коши. Для нахождения коэффициентов C_1 и C_2 воспользуемся начальными условиями:

$$\begin{cases} C_1 = 1, \\ -C_1 - C_2 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} C_1 = 1, \\ C_2 = -1. \end{cases}$$

Поэтому решением нашей задачи является система

$$\begin{cases} x(t) = (\cos 2t - \sin 2t) e^{5t}, \\ y(t) = 2 \sin 2t \cdot e^{5t}. \end{cases}$$

14. Линейные неоднородные системы дифференциальных уравнений

Линейной неоднородной системой дифференциальных уравнений называется система вида

$$\begin{cases} x_1' = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \dots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t), \\ x_2' = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \dots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t), \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ x_n' = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \dots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t). \end{cases} \quad (27)$$

Здесь $a_{ij}(t)$, $f_i(t)$ – известные функции, $x_j(t)$ – искомые функции.

Система (27) может быть записана в матричной форме

$$X'(t) = A(t)X(t) + F(t),$$

где $F(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \dots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$.

Теорема 6. Пусть $X_0(t)$ – общее решение линейной однородной системы дифференциальных уравнений

$$X'(t) = A(t)X(t), \quad (28)$$

соответствующей неоднородной системе (27) (т.е. имеющей те же коэффициенты $a_{ij}(t)$). Пусть $\tilde{X}(t)$ – некоторое частное решение неоднородной системы (27). Тогда общее решение неоднородной системы (27) имеет вид

$$X(t) = X_0(t) + \tilde{X}(t).$$

Другими словами, если $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$ – ФСР однородной системы (28), а $\tilde{X}(t)$ – некоторое частное решение неоднородной системы (27), то общим решением системы (27) будет $X(t) = C_1X_1(t) + C_2X_2(t) + \dots + C_nX_n(t) + \tilde{X}(t)$, где C_1, C_2, \dots, C_n – произвольные постоянные.

Если известна фундаментальная система решений $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$ однородной системы (28), то общее решение неоднородной системы (27) может быть найдено методом вариации постоянных. Это означает, что общее решение системы (27) ищется в виде

$$X(t) = C_1(t)X_1(t) + C_2(t)X_2(t) + \dots + C_n(t)X_n(t),$$

где $C_1(t), C_2(t), \dots, C_n(t)$ – неизвестные функции. Подстановка такой вектор-функции $X(t)$ в (27) приводит к системе

$$C_1'(t)X_1(t) + C_2'(t)X_2(t) + \dots + C_n'(t)X_n(t) = F(t).$$

Решив эту систему относительно функций $C_j'(t)$, найдем

$$C_j(t) = \int C_j'(t) dt.$$

В случае, если в системе (27) функции $a_{ij}(t)$ являются постоянными величинами, а функции $f_i(t)$ имеют вид $(P_i(t)\cos\beta t + Q_i(t)\sin\beta t)e^{\alpha t}$, где $P_i(t)$, $Q_i(t)$ – многочлены степени меньше либо равные k , и $\lambda = \alpha + i\beta$ – корень кратностью r характеристического уравнения, $1 \leq r \leq k$, то частное решение системы (27) следует искать в виде

$$\tilde{X}(t) = \operatorname{Re} t^{r-1} \begin{pmatrix} \gamma_{1,k+1} t^{k+1} + \gamma_{1,k} t^k + \dots + \gamma_{11} t + \gamma_{10} \\ \gamma_{2,k+1} t^{k+1} + \gamma_{2,k} t^k + \dots + \gamma_{21} t + \gamma_{20} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \gamma_{n,k+1} t^{k+1} + \gamma_{n,k} t^k + \dots + \gamma_{n1} t + \gamma_{n0} \end{pmatrix} e^{\lambda t},$$

где k – наибольшая степень многочленов $P_i(t)$, $Q_i(t)$. Если же $\lambda = \alpha + i\beta$ не является корнем характеристического уравнения, т.е. $r = 0$, то частное решение $\tilde{X}(t)$ ищется в виде

$$\tilde{X}(t) = \operatorname{Re} \begin{pmatrix} \gamma_{1k} t^k + \gamma_{1,k-1} t^{k-1} + \dots + \gamma_{11} t + \gamma_{10} \\ \gamma_{2k} t^k + \gamma_{2,k-1} t^{k-1} + \dots + \gamma_{21} t + \gamma_{20} \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ \gamma_{nk} t^k + \gamma_{n,k-1} t^{k-1} + \dots + \gamma_{n1} t + \gamma_{n0} \end{pmatrix} e^{\lambda t}.$$

Если $\tilde{X}_1(t)$ – частное решение системы $X'(t) = A(t)X(t) + F_1(t)$,

$\tilde{X}_2(t)$ – частное решение системы $X'(t) = A(t)X(t) + F_2(t)$,

то вектор-функция $\tilde{X}_1(t) + \tilde{X}_2(t)$ является частным решением системы $X'(t) = A(t)X(t) + F_1(t) + F_2(t)$.

Аналогичное утверждение справедливо и для большего числалагаемых.

Пример 27. Решить систему

$$x' = 3x - 2y + t,$$

$$y' = 3x - 4y$$

а) методом вариации постоянных;

б) методом подбора специального частного решения.

Решение. а) Найдем общее решение однородной системы

$$x' = 3x - 2y,$$

$$y' = 3x - 4y,$$

соответствующей нашей неоднородной системе. Характеристическое уравнение имеет вид

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 3 & -4-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0; \quad \lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = 2.$$

Найдем собственные векторы, отвечающие собственным значениям

$$\lambda_1 = -3, \quad \lambda_2 = 2.$$

$\lambda = -3$. Получаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 6\xi - 2\eta = 0, \\ 3\xi - \eta = 0, \end{cases}$$

которая равносильна уравнению $3\xi - \eta = 0$. В качестве собственного

вектора можно взять $Y_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$. Ему соответствует вектор-функция

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-3t}.$$

$\lambda = 2$ приводит к системе

$$\begin{cases} \xi - 2\eta = 0, \\ 3\xi - 6\eta = 0, \end{cases}$$

которая равносильна уравнению $\xi - 2\eta = 0$. В качестве собственного

вектора возьмем $Y_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, которому отвечает вектор-функция

$$X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Вектор-функции $X_1(t), X_2(t)$ образуют фундаментальную систему решений однородной системы дифференциальных уравнений, поэтому общее решение этой однородной системы имеет вид

$$X(t) = C_1 X_1(t) + C_2 X_2(t),$$

или

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-3t} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Будем искать решение нашей неоднородной системы дифференциальных уравнений в виде

$$X(t) = C_1(t) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-3t} + C_2(t) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Это приводит к системе уравнений относительно $C_1'(t)$ и $C_2'(t)$

$$\begin{cases} C_1' e^{-3t} + 2C_2' e^{2t} = t, \\ 3C_1' e^{-3t} + 2C_2' e^{2t} = 0. \end{cases}$$

Решим эту линейную относительно $C_1'(t)$ и $C_2'(t)$ систему методом Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-3t} & 2e^{2t} \\ 3e^{-3t} & e^{2t} \end{vmatrix} = e^{-t} - 6e^{-t} = -5e^{-t},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} t & 2e^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{vmatrix} = te^{2t}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{-3t} & t \\ 3e^{-3t} & 0 \end{vmatrix} = -3te^{-3t}.$$

Отсюда находим

$$C_1'(t) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{1}{5}te^{3t}, \quad C_2'(t) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{3}{5}te^{-2t}.$$

Интегрированием этих функций найдем $C_1(t)$ и $C_2(t)$:

$$\begin{aligned} C_1(t) &= \int C_1'(t) dt = -\frac{1}{5} \int te^{3t} dt = -\frac{1}{15} \int t d(e^{3t}) = -\frac{1}{15} (te^{3t} - \int e^{3t} dt) = \\ &= \frac{1}{45} e^{3t} - \frac{1}{15} te^{3t} + C_1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_2(t) &= \int C_2'(t) dt = \frac{3}{5} \int te^{-2t} dt = -\frac{3}{10} \int t d(e^{-2t}) = -\frac{3}{10} (te^{-2t} - \int e^{-2t} dt) = \\ &= -\frac{3}{20} e^{-2t} - \frac{3}{10} te^{-2t} + C_2. \end{aligned}$$

Значит, общим решением неоднородной системы является

$$\begin{aligned} X(t) &= \left(\frac{1}{45} (-3t+1) e^{3t} + C_1 \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \left(\frac{3}{20} (-2t-1) e^{-2t} + C_2 \right) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} = \\ &= \left(-\frac{1}{15} t + \frac{1}{45} \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-3t} + \left(-\frac{3}{10} t - \frac{3}{20} \right) \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} \end{aligned}$$

или

$$\begin{cases} x(t) = -\frac{2}{3}t - \frac{5}{18} + C_1 e^{-3t} + 2C_2 e^{2t}, \\ y(t) = -\frac{t}{2} - \frac{1}{12} + 3C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t}. \end{cases}$$

б) Как мы видели выше, общее решение соответствующей однородной системы имеет вид

$$X_0 = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-3t} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}.$$

Найдем частное решение $\tilde{X}(t)$ неоднородной системы. В нашем случае

$$F(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Число $\lambda = 0$ не является корнем характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & -2 \\ 3 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

поэтому $\tilde{X}(t)$ ищем в виде

$$\tilde{X}(t) = \begin{pmatrix} at^2 + bt + c \\ dt^2 + gt + h \end{pmatrix},$$

т.е. $x(t) = at^2 + bt + c$, $y(t) = dt^2 + gt + h$.

Имеем $x'(t) = 2at + b$, $y'(t) = 2dt + g$.

Подставим $x(t)$, $y(t)$ в нашу неоднородную систему, получим систему

$$\begin{cases} 2at + b = 3(at^2 + bt + c) - 2(dt^2 + gt + h) + t, \\ 2dt + g = 3(at^2 + bt + c) - 4(dt^2 + gt + h). \end{cases}$$

Приравняв коэффициенты при соответствующих степенях t , приходим к системе

$$\begin{cases} 3a - 2d = 0, \\ 2a - 3b + 2g = 1, \\ b - 3c + 2h = 0, \\ 3a - 4d = 0, \\ 3b - 4g - 2d = 0, \\ 3c - 4h - g = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 0, \\ b = -2/3, \\ c = -5/18, \\ d = 0, \\ g = -1/2, \\ h = -1/12. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\tilde{X}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}t - \frac{5}{18} \\ -\frac{1}{2}t - \frac{1}{12} \end{pmatrix},$$

и общим решением неоднородной системы является

$$X(t) = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-3t} + C_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} -\frac{2}{3}t - \frac{5}{18} \\ -\frac{1}{2}t - \frac{1}{12} \end{pmatrix},$$

или

$$\begin{cases} x(t) = C_1 e^{-3t} + 2C_2 e^{2t} - \frac{2}{3}t - \frac{5}{18}, \\ y(t) = 3C_1 e^{-3t} + C_2 e^{2t} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{12}. \end{cases}$$

Пример 28. Решить неоднородную систему линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} x' = 2x + y + te^{3t}, \\ y' = -x + 4y + e^{3t}. \end{cases}$$

Решение. Путем исключения одной из неизвестных функций систему можно свести к уравнению второго порядка с одной неизвестной функцией.

Например, путем исключения функции $y(t)$ систему сведем к уравнению второго порядка относительно функции $x(t)$.

Найдем $y(t)$ из 1-го уравнения системы: $y = x' - 2x - te^{3t}$. Отсюда имеем $y' = x'' - 2x' - e^{3t} - 3te^{3t}$. Подставив значения y и y' во второе уравнение системы, получим неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка относительно неизвестной функции $x(t)$:

$$x'' - 6x' + 9x = (2-t)e^{3t}.$$

Найдем его общее решение по формуле $x(t) = x_0(t) + x_1(t)$.

Характеристическое уравнение соответствующего однородного дифференциального уравнения $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$ имеет корень $\lambda_{1,2} = 3$ кратностью 2, следовательно, общее решение однородного дифференциального уравнения имеет вид

$$x_0(t) = e^{3t}(C_1 + C_2 t).$$

Частное решение $x_r(t)$ неоднородного дифференциального уравнения найдем методом неопределенных коэффициентов.

Правая часть неоднородного дифференциального уравнения имеет вид

$f(x) = (2-t)e^{3t} = P_1(t)e^{3t}$ – произведение многочлена первой степени на показательную функцию e^{3t} .

По правой части находим число $\alpha = 3$, которое совпадает с корнем характеристического уравнения кратностью 2, поэтому

$$x_r(t) = t^2(At + B)e^{3t}.$$

Найдем x_r' и x_r'' :

$$x_r' = 3e^{3t}(At^3 + Bt^2) + e^{3t}(3At^2 + 2Bt) = e^{3t}(3At^3 + 3Bt^2 + 3At^2 + 2Bt);$$

$$x_r'' = 3e^{3t}(3At^3 + 3Bt^2 + 3At^2 + 2Bt) + e^{3t}(9At^2 + 6Bt + 6At + 2B) = e^{3t}(9At^3 + 9Bt^2 + 18At^2 + 12Bt + 6At + 2B).$$

Подставив x_r, x_r', x_r'' в заданное неоднородное дифференциальное уравнение, приведем подобные члены, и после сокращения на e^{3t} получим:

$$6Bt + 6At + 2B = 2 - t,$$

$$(6A + 6B)t + 2B = -t + 2.$$

Сравнивая коэффициенты при соответствующих степенях t обеих частей этого тождества, получим СЛАУ для определения неизвестных A, B

$$\begin{cases} t^1 & \left\{ \begin{array}{l} 6A + 6B = -1, \\ 2B = 2, \quad B = 1, \quad A = -\frac{7}{6}. \end{array} \right. \\ t^0 & \end{cases}$$

$$\text{Итак, } x_r(t) = e^{3t}\left(t^2 - \frac{7}{6}t^3\right).$$

Следовательно, общее решение имеет вид

$$x(t) = e^{3t}\left(C_1 + C_2 t + t^2 - \frac{7}{6}t^3\right).$$

Функцию $y(t)$ определим, воспользовавшись соотношением

$$y(t) = x' - 2x - te^{3t} = 3e^{3t}\left(C_1 + C_2 t + t^2 - \frac{7}{6}t^3\right) + e^{3t}\left(C_2 + 2t - \frac{21}{6}t^2\right) -$$

$$-2e^{3t} \left(C_1 + C_2 t + t^2 - \frac{7}{6} t^3 \right) - te^{3t} = e^{3t} \left[C_1 + C_2(t+1) + t - 2\frac{7}{2}t^2 \right].$$

Таким образом, общее решение данной системы дифференциальных уравнений имеет вид

$$\begin{cases} x(t) = e^{3t} \left(C_1 + C_2 t + t^2 - \frac{1}{6} t^3 \right), \\ y(t) = e^{3t} \left[C_1 + C_2(t+1) + t - 2\frac{7}{2}t^2 \right]. \end{cases}$$

Задание 12.1

Решите дифференциальные уравнения.

1) $y' = (1 + y^2)x^2;$

2) $y' + xy = x;$

3) $y'tgx = y \ln x;$

4) $\frac{y'}{\cos x} = \frac{y}{\ln y + 1};$

5) $y' = \frac{1}{\cos(y - x - 1)};$

6) $y'(1 + e^{2x}) = e^{2x};$

7) $\frac{y'}{e^{2x}} - \frac{y}{1 + e^x} = 0;$

8) $\frac{xdx}{1 - y} - \frac{ydy}{1 + x} = 0;$

9) $x(1 + y)dx + y(1 - x)dx = 0;$

10) $y' = \sin^2(y - x + 2);$

11) $dy + (xy - xy^2)dx = 0;$

12) $(x^2 - x)dy - ydx = 0;$

13) $x\sqrt{1 - y^2}dx - \frac{y}{\sqrt{1 - x^2}}dy = 0;$

14) $(1 - 4x^2)dy + 2xydx = 0;$

15) $y' = \cos(y - x + 1);$

- 16) $(1 + 2x^2)dy + x(y - 1)dx = 0;$
 17) $\sqrt{4 + y^2}dx + (x^2y + y)dy = 0;$
 18) $x dx - y dy = 2x^2y dy - 3y^2x dx;$
 19) $2y dy - xy^2 dx = x^2y dy - 5x dx;$
 20) $(x + 2y + 1)y' = 1;$
 21) $3e^{3y}(5 + x^2) dy = -2x(1 + e^{3y}) dx;$
 22) $(1 + e^y)(\operatorname{tg}x + 5)dx - e^y \cos^2 x dy = 0;$
 23) $xy dx - x^2 dy = (2x + 5)dy - y dx;$
 24) $(\operatorname{ctg}x + 3)dx - e^y \sin^2 x dx = 0;$
 25) $y' = \sqrt{2x + 2y - 1};$
 26) $y(\cos^2 x + 2)dx = \frac{dy}{\sin 2x};$
 27) $y \sin 2x dx - 2dy = \sin^2 x dy - 2 \sin 2x dx;$
 28) $(2x + 1)(y^2 + 2y + 2) dx - (2y + 2)(x^2 + 1) dy = 0;$
 29) $\sqrt{1 - 4x^2} dy = \sqrt{y}(4x + 1) dx;$
 30) $y' = \sin(y - x).$

Задание 12.2

Решите дифференциальные уравнения.

- 1) $y' = \frac{x + y}{x - 2y};$
 2) $y' = \frac{x + 4y}{x - 4y};$
 3) $y' = \frac{3y - 8x}{2y - 3x};$
 4) $y'(x + y) + y - 5x = 0;$
 5) $y'(2y + x) + y - 3x = 0;$
 6) $y' = \frac{2y^2}{x^2} + 3\frac{y}{x} + 5;$

$$7) y' = \frac{y^2}{x^2} + 5\frac{x}{y} + 6;$$

$$8) y' = \frac{y^2}{x^2} + 7\frac{y}{x} + 13;$$

$$9) x^2 y' = y^2 + 2xy + 7x^2;$$

$$10) (y^2 - 2xy)dx + x^2 dy = 0;$$

$$11) (2x^2 + xy + y^2)dx - x^2 dy = 0;$$

$$12) (4x^2 + 4xy)dy = (5x^2 + 2xy + 3y^2)dx;$$

$$13) (4x^2 + 6xy + 3y^2)dx = (2x^2 + 3xy)dy;$$

$$14) (2xy - 3x^2)y' = 4y^2 - 9xy + 4x^2;$$

$$15) x \left(1 + e^{\frac{y}{x}} \right) y' = x e^{\frac{y}{x}} + y \left(1 + e^{\frac{y}{x}} \right);$$

$$16) \left(1 + e^{\frac{y}{x}} + \frac{y}{x} e^{\frac{y}{x}} \right) dx - e^{\frac{y}{x}} dy = 0;$$

$$17) y \left(\ln \frac{y}{x} + 2 \right) dx = x dy;$$

$$18) xy' - y = (x + 2y) \ln \left(\frac{x + 2y}{x} \right);$$

$$19) y \left(1 + \ln \frac{y}{x} \right) + xy' = 0;$$

$$20) x dy - \left(y + y \ln \frac{y}{x} \right) dx = 0;$$

$$21) x \ln \left(\frac{y}{x} + 1 \right) dy = \left(2y + 2x + y \ln \left(\frac{y}{x} + 1 \right) \right) dx;$$

$$22) \left[(y + 3x) \ln \left(\frac{y}{x} + 3 \right) + y \right] dx = x dy;$$

$$23) y' = \frac{y}{x} + \frac{y + 5x}{x \ln \left(\frac{y}{x} + 5 \right)};$$

$$24) xy' (\ln y - \ln x) = y;$$

$$25) x \left[\ln(y + 2x) - \ln x \right] dy = \left[y \ln \left(\frac{y}{x} + 2 \right) + y + 2x \right] dx;$$

$$26) x dy = \left(y + \sqrt{xy + x^2} \right) dx;$$

$$27) x dy = \left(\sqrt{x^2 + y^2} + y \right) dx;$$

$$28) \sqrt{yx^2 + 3x^3} dy = \left(\sqrt{y^3 + 3xy^2} + x\sqrt{x} \right) dx;$$

$$29) (2xy + 2x^2) dy = \left(\sqrt{y^2 x^2 + 2x^3 y} + 2y^2 + 2xy \right) dx;$$

$$30) y' = \frac{y}{x} + \frac{x^2}{2(y+x)\sqrt{y^2 + 2xy}}.$$

Задание 12.3

Решите дифференциальные уравнения.

$$1) (y^2 - 3x)y' = -y;$$

$$2) y' - \frac{y}{2x} = x;$$

$$3) (x+1)y' - y = (x+1)^2;$$

$$4) y' = \frac{y}{x-2} + x^2 - 2x;$$

$$5) (x+2)dy - [2y + (x+2)^3]dx = 0;$$

$$6) y' - \frac{2xy}{1+x^2} = (1+x^2)^2;$$

$$7) y' = -2xy + 2x;$$

$$8) y' + y = e^x;$$

$$9) y' - \frac{2y}{x} = x^2 e^x;$$

$$10) y' - 2xy = x^4 e^{x^2};$$

$$11) y' - \frac{y}{x-2} = e^x (x-2);$$

$$12) y' - 2y = 2xe^{2x-x^2};$$

$$13) \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x \cos y + \cos y \cdot e^{\sin y}};$$

- 14) $y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x$;
- 15) $y' = \frac{y}{x} + x \sin x$;
- 16) $y' \sin x + y \cos x = \sin x \cos x$;
- 17) $y' = y \operatorname{ctg} x + 2 \cos x$;
- 18) $y' = y \operatorname{ctg} x + x \sin x$;
- 19) $y' = \frac{y}{x} + x \ln x$;
- 20) $y' x \ln x = y + x^3 \ln^2 x$;
- 21) $y' = \frac{y}{y \ln y + 5y + x}$;
- 22) $y' = \frac{y \ln y}{x - \ln y}$;
- 23) $\frac{xy'}{y} + \frac{2x \ln x}{y} - 1 = 0$;
- 24) $xy' = \frac{y}{1 + \ln x} + (1 + \ln x)^3$;
- 25) $y' + y \operatorname{ctg} x = \frac{5}{\sin x}$;
- 26) $y' + y \operatorname{tg} x = \frac{10}{\cos x}$;
- 27) $y' + y \operatorname{tg} x = \operatorname{ctg} x$;
- 28) $y' \operatorname{tg} x = y + 2 \sin^2 x \operatorname{tg} x$;
- 29) $(1 + x^2) dy = (e^{-\operatorname{arctg} x} - y) dx$;
- 30) $y' = \frac{y}{(1 + x^2) \operatorname{arctg} x} + \frac{1}{1 + x^2}$.

Задание 12.4

Решите дифференциальные уравнения.

- 1) $\left(\frac{x}{y} + x^2 y^2 \right) y' = 1$;
- 2) $x(x+1)y' = y(x+1) + xy^2$;

$$3) y' - \frac{2y}{x+5} = y^2(x+5)^2;$$

$$4) y' - \frac{2xy}{1+x^2} = y^2(1+x^2);$$

$$5) (1+y^2)dx - 2xydy = 2x^2dy;$$

$$6) y' + \frac{2xy}{1-x^2} = \frac{y^2}{1-x^2};$$

$$7) y' + y = \frac{1}{ye^x};$$

$$8) y' + 2xy = 2y^2xe^{2x};$$

$$9) (x^2+1)y' = 2xy + y^2(x^2+1);$$

$$10) y' = y + 2y^2xe^{-x^2-x};$$

$$11) y^2dx = \left(-x + x^2e^{\frac{1}{y}}\right)dy;$$

$$12) y' - \frac{y}{x} = \frac{y^2e^x}{x};$$

$$13) y' - y \operatorname{ctg} x = \frac{y^3}{\sin^2 x};$$

$$14) y' \cos x + y \sin x = y^2(x+1);$$

$$15) yy' + x \sin^2 x = y^2 \operatorname{ctg} x;$$

$$16) (1+y^2) \operatorname{arctg} y dx = -x dy + x^2 \operatorname{arctg} y dy;$$

$$17) y^2y' + x \cos^3 x = -y^3 \operatorname{tg} x;$$

$$18) \left(x \cos y + \frac{e^{2 \sin y}}{x}\right) y' = 1;$$

$$19) xy' - y = \frac{y^2}{x} \ln x;$$

$$20) y' = \frac{y}{x \ln x} - \frac{1}{xy};$$

$$21) y' \left(x + \frac{x^2 \ln y}{y^2}\right) = \frac{y}{x};$$

$$22) x' = \frac{3x}{y} + \frac{x^2 \ln^2 y}{y^4};$$

$$23) (x^2 e^y + 3xy^2) y' = y^3;$$

$$24) y' = \frac{y}{x \ln x} - \frac{2}{xy};$$

$$25) x(y+1) \ln(y+1) dx = (x^2 + \ln(y+1)) dy;$$

$$26) 2x^4 y dx + (2y^5 \ln y - 2x^5) dy = 0;$$

$$27) y' - y \operatorname{tg} x = y^5 \sin x;$$

$$28) y' = -3y \cos x + e^{2x} (2 - 3 \cos x) y^2;$$

$$29) y^2 y' + x^2 \sin^3 x = y^3 \operatorname{ctg} x;$$

$$30) x' \operatorname{tgy} = 2x - 4x^3 \sin y.$$

Задание 12.5

Решить задачу Коши.

$$1. y^2 dx + (x + e^{2y}) dy = 0, \quad y|_{x=e} = 2.$$

$$2. (y^4 e^y + 2x) y' = y, \quad y|_{x=0} = 1.$$

$$3. y^2 dx + (xy - 1) dy = 0, \quad y|_{x=1} = e.$$

$$4. 2(4y^2 + 4y - x) y' = 1, \quad y|_{x=0} = 0$$

$$5. (\cos 2y \cos^2 y - x) y' = \sin y \cos y, \quad y|_{x=\pi/4} = \pi/3.$$

$$6. (x \cos^2 y - y^2) y' = y \cos^2 y, \quad y|_{x=\pi} = \pi/4.$$

$$7. e^{y^2} (dx - 2xy dy) = y dy, \quad y|_{x=0} = 0.$$

$$8. (104y^3 - x) y' = 4y, \quad y|_{x=8} = 1.$$

$$9. dx + (xy - y^3) dy = 0, \quad y|_{x=-1} = 0.$$

$$10. (3y \cos 2y - 2y^2 \sin 2y - 2x) y' = y, \quad y|_{x=16} = \pi/4.$$

$$11. 8(4y^3 + xy - y) y' = 1, \quad y|_{x=0} = 0.$$

$$12. (2 \ln y - \ln^2 y) dy = y dx - x dy, \quad y|_{x=4} = e^2.$$

$$13. 2(x + y^4) y' = y, \quad y|_{x=-2} = -1.$$

$$14. y^3(y-1) dx + 3xy^2(y-1) dy = (y+2) dy, \quad y|_{x=\pi/4} = 2.$$

15. $2y^2 dx + (x + e^{1/y}) dy = 0, \quad y|_{x=e} = 1.$
16. $(xy + \sqrt{y}) dy + y^2 dx = 0, \quad y|_{x=-1/2} = 4.$
17. $\sin 2y dx = (\sin^2 2y - 2\sin^2 y + 2x) dy, \quad y|_{x=-1/2} = \pi/4.$
18. $(y^2 + 2y - x) y' = 1, \quad y|_{x=2} = 0.$
19. $2y\sqrt{y} dx - (6x\sqrt{y} + 7) dy = 0, \quad y|_{x=4} = 1.$
20. $dx = (\sin y + 3\cos y + 3x) dy, \quad y|_{x=e^{\pi/2}} = \pi/2.$
21. $2(\cos^2 y \cdot \cos 2y - x) y' = \sin 2y, \quad y|_{x=3/2} = 5\pi/4.$
22. $chy dx = (1 + xchy) dy, \quad y|_{x=1} = \ln 2.$
23. $(13y^3 - x) y' = 4y, \quad y|_{x=5} = 1.$
24. $y^2(y^2 + 4) dx + 2xy(y^2 + 4) dy, \quad y|_{x=\pi^2/8} = 2.$
25. $(x + \ln^2 y - \ln y) y' = y/2, \quad y|_{x=2} = 1.$
26. $(2xy + \sqrt{y}) dy + 2y^2 dx = 0, \quad y|_{x=-1/2} = 1.$
27. $y dx + (2x - 2\sin^2 y - y \sin 2y) dy = 0, \quad y|_{x=3/2} = \pi/4.$
28. $2(y^3 - y + xy) dy = dx, \quad y|_{x=-2} = 0.$
29. $(2y + x \operatorname{tg} y - y^2 \operatorname{tg} y) dy = dx, \quad y|_{x=0} = \pi.$
30. $4y^2 dx + (e^{1/(2y)} + x) dy = 0, \quad y|_{x=e} = 1/2.$

Задание 12.6

Найти общий интеграл дифференциального уравнения.

1. $3x^2 e^y dx + (x^3 e^y - 1) dy = 0.$
2. $\left(3x^2 + \frac{2}{y} \cos \frac{2x}{y} \right) dx - \frac{2x}{y^2} \cos \frac{2x}{y} dy = 0.$
3. $(3x^2 + 4y^2) dx + (8xy + e^y) dy = 0.$
4. $\left(2x - 1 - \frac{y}{x^2} \right) dx - \left(2y - \frac{1}{x} \right) dy = 0.$
5. $(y^2 + y \sec^2 x) dx + (2xy + \operatorname{tg} x) dy = 0.$
6. $(3x^2 y + 2y + 3) dx + (x^3 + 2x + 3y^2) dy = 0.$

$$7. \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right) dx + \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} \right) dy = 0.$$

$$8. [\sin 2x - 2 \cos(x + y)] dx - 2 \cos(x + y) dy = 0.$$

$$9. (xy^2 + x/y^2) dx + (x^2 y - x^2/y^3) dy = 0.$$

$$10. \left(\frac{1}{x^2} + \frac{3y^2}{x^4} \right) dx - \frac{2y}{x^3} dy = 0.$$

$$11. \frac{y}{x^2} \cos \frac{y}{x} dx - \left(\frac{1}{x} \cos \frac{y}{x} + 2y \right) dy = 0.$$

$$12. \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + y \right) dx + \left(x + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) dy = 0.$$

$$13. \frac{1 + xy}{x^2 y} dx + \frac{1 - xy}{xy^2} dy = 0.$$

$$14. \frac{dx}{y} - \frac{x + y^2}{y^2} dy = 0.$$

$$15. \frac{y}{x^2} dx - \frac{xy + 1}{x} dy = 0.$$

$$16. \left(xe^x + \frac{y}{x^2} \right) dx - \frac{1}{x} dy = 0.$$

$$17. \left(10xy - \frac{1}{\sin y} \right) dx + \left(5x^2 + \frac{x \cos y}{\sin^2 y} - y^2 \sin y^3 \right) dy = 0.$$

$$18. \left(\frac{y}{x^2 + y^2} + e^x \right) dx - \frac{xdy}{x^2 + y^2} = 0.$$

$$19. e^y dx + (\cos y + xe^y) dy = 0.$$

$$20. (y^3 + \cos x) dx + (3xy^2 + e^y) dy = 0.$$

$$21. xe^{y^2} dx + (x^2 ye^{y^2} + tg^2 y) dy = 0.$$

$$22. (5xy^2 - x^3) dx + (5x^2 y - y) dy = 0.$$

$$23. [\cos(x + y^2) + \sin x] dx + 2y \cos(x + y^2) dy = 0.$$

$$24. (x^2 - 4xy - 2y^2) dx + (y^2 - 4xy - 2x^2) dy = 0.$$

$$25. \left(\sin y + y \sin x + \frac{1}{x} \right) dx + \left(x \cos y - \cos x + \frac{1}{y} \right) dy = 0.$$

$$26. \left(1 + \frac{1}{y} e^{x/y} \right) dx + \left(1 - \frac{x}{y^2} e^{x/y} \right) dy = 0.$$

$$27. \frac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2 + y^2} = 0.$$

$$28. 2(3xy^2 + 2x^3)dx + 3(2x^2y + y^2)dy = 0.$$

$$29. (3x^3 + 6x^2y + 3xy^2)dx + (2x^3 + 3x^2y)dy = 0.$$

$$30. xy^2dx + y(x^2 + y^2)dy = 0.$$

Задание 12.7

Решите дифференциальные уравнения.

$$1) y'' + 2xy'^2 = 0;$$

$$16) (1-x^2)y'' - xy' = 2;$$

$$2) xy'' - y' - x \sin \frac{y'}{x} = 0;$$

$$17) y''(e^{2x} + 2) - 2y'e^{2x} = 0;$$

$$3) xy'' = y' \ln \frac{y'}{x};$$

$$18) y'' + y' \operatorname{tg} x = \frac{1}{2} \sin 2x;$$

$$4) x^2 y''' = y''^2;$$

$$19) y''(1 + \ln x) = \frac{1}{x} y';$$

$$5) y''' = y''^2;$$

$$20) (1+x)y'' + y' + 1 = 0;$$

$$6) (2y + y')y'' = y'^2;$$

$$21) yy'' - y'^2 = 1;$$

$$7) y'' = 1/\sqrt{y};$$

$$22) y''y^3 = 1;$$

$$8) (y-1)y'' = 2y'^2;$$

$$23) yy'' - y'^2 = 1;$$

$$9) y'' \operatorname{tgy} = 2y'^2;$$

$$24) y'' + y'^2 = e^{-y};$$

$$10) y'' = e^y;$$

$$25) y'' \operatorname{ctgy} = 2y'^2;$$

$$11) (1+x)y'' + y' + 1 = 0;$$

$$26) yy'' + y'^2 = 1;$$

$$12) xy'' = 2y' \ln \frac{y'}{x};$$

$$27) y'' \sin y + y'^2 \cos y = y' \sin y;$$

$$13) \sqrt{1-4x} y'' + \sqrt{1-y'} = 0;$$

$$28) yy'' = y'^2 \ln y';$$

$$14) (x+1)y'' + 2y' = (x+1)^2;$$

$$29) y'' = e^y y';$$

$$15) y'' x \ln 2x = y';$$

$$30) y'' = y'^2 \operatorname{tgy}.$$

Задание 12.8

Найдите общее решение дифференциального уравнения, понизив его порядок.

$$1) y'' + \frac{2x}{x^2+1}y' = 2x;$$

$$16) x^2y'' + xy' = 1;$$

$$2) y'' \sin^4 x = \sin 2x;$$

$$17) x(y'' + 1) + y' = 0;$$

$$3) xy'' = y' + x \sin \frac{y'}{x};$$

$$18) y'' = x^{-1} + \ln x;$$

$$4) (1-x^2)y'' - xy' = 2;$$

$$19) 2xy'y'' = y'^2 - 1;$$

$$5) y'' + y'tgx = \frac{1}{2} \sin 2x;$$

$$20) y''(e^x + 1) + y' = 0;$$

$$6) y'' = \frac{1}{1+x^2};$$

$$21) xy'' = y' \ln \left(\frac{y'}{x} \right);$$

$$7) (1+x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0;$$

$$22) y''x \ln x = y';$$

$$8) xy'' - y' = x^2 e^x;$$

$$23) y'' - \frac{1}{x-1}y' = x(x-1);$$

$$9) y''tgx = y' + 1;$$

$$24) x^3y'' + x^2y' = 1;$$

$$10) x(y'' + 1) + y' = 0;$$

$$25) y'' = \frac{y'}{x} + \sin \frac{y'}{x};$$

$$11) x^2y'' = y'^2;$$

$$26) y'' + y'tgx = \cos x;$$

$$12) y''' = 2(y'' - 1) \operatorname{ctgx};$$

$$27) xy'' - y' = x \operatorname{tg} \frac{y'}{x};$$

$$13) xy'' = y'^2 + y';$$

$$28) y'''x \ln x = y'';$$

$$14) xy'' - 2y' = 2x^4;$$

$$29) \operatorname{tg} x \cdot y'' - y' + \frac{1}{\sin x} = 0;$$

$$15) xy'' = \ln x + 1;$$

$$30) \operatorname{tg} x \cdot y''' = 2y''.$$

Задание 12.9

Найдите общее решение дифференциального уравнения второго порядка, понизив его порядок.

$$1) y'' + y'^2 = 2e^{-y};$$

$$3) 2yy'' = y^2 + y'^2;$$

$$2) y'' \operatorname{tgy} = 2y'^2;$$

$$4) y'^2 + yy'' = yy';$$

- 5) $yy'' = y^2y' + y'^2$; 18) $y'' + \frac{2}{1-y}y'^2 = 0$;
- 6) $1 + y'^2 = 2yy''$; 19) $(y' + 2y)y'' = y'^2$;
- 7) $yy'' = (y')^2 - (y')^3$; 20) $yy'' - 2y \ln y \cdot y' = y'^2$;
- 8) $2yy'' - 3y'^2 = 4y^2$; 21) $y'' = 2 - y'$;
- 9) $yy'' - y'(1 + y') = 0$; 22) $y'' = \frac{y'}{\sqrt{y}}$;
- 10) $y'' = ae^y$; 23) $y^3y'' = 1$;
- 11) $y''(2y + 3) - 2y'^2 = 0$; 24) $y'^2 + 2yy'' = 0$;
- 12) $4y^2 = 2yy'' - 3y'^2$; 25) $yy'' + 1 = y'^2$;
- 13) $y'' = a^2y$; 26) $y'' = 2yy'$;
- 14) $y'' = (1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}$; 27) $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$;
- 15) $yy'' - y'^2 = y^2 \ln y$; 28) $3y'' = y^{\frac{5}{3}}$;
- 16) $y''(1 + y) = y'^2 + y'$; 29) $y(y'')^2 = 1$;
- 17) $4y'' - y'^2 = 0$; 30) $y(1 - \ln y)y'' + (1 + \ln y)y'^2 = 0$.

Задание 12.10

Найти решение задачи Коши.

1. $4y^3y'' = y^4 - 1$, $y(0) = \sqrt{2}$, $y'(0) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.
2. $y'' = 128y^3$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 8$.
3. $y''y^3 + 64 = 0$, $y(0) = 4$, $y'(0) = 2$.
4. $y'' + 2 \sin y \cos^3 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.
5. $y'' = 32 \sin^3 y \cos y$, $y(1) = \pi/2$, $y'(1) = 4$.
6. $y'' = 98y^3$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 7$.
7. $y''y^3 + 49 = 0$, $y(3) = -7$, $y'(3) = -1$.
8. $4y^3y'' = 16y^4 - 1$, $y(0) = \sqrt{2}/2$, $y'(0) = 1/\sqrt{2}$.
9. $y'' + 8 \sin y \cos^3 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$.

10. $y'' = 72y^3$, $y(2) = 1$, $y'(2) = 6$.
11. $y''y^3 + 36 = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$.
12. $y'' = 18\sin^3 y \cos y$, $y(1) = \pi/2$, $y'(1) = 3$.
13. $4y^3y'' = y^4 - 16$, $y(0) = 2\sqrt{2}$, $y'(0) = 1/\sqrt{2}$.
14. $y'' = 50y^3$, $y(3) = 1$, $y'(3) = 5$.
15. $y''y^3 + 25 = 0$, $y(2) = -5$, $y'(2) = -1$.
16. $y'' + 18\sin y \cos^3 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$.
17. $y'' = 8\sin^3 y \cos y$, $y(1) = \pi/2$, $y'(1) = 2$.
18. $y'' = 32y^3$, $y(4) = 1$, $y'(4) = 4$.
19. $y''y^3 + 16 = 0$, $y(1) = 2$, $y'(1) = 2$.
20. $y'' + 32\sin y \cos^3 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$.
21. $y'' = 50\sin^3 y \cos y$, $y(1) = \pi/2$, $y'(1) = 5$.
22. $y'' = 18y^3$, $y(1) = 1$, $y'(1) = 3$.
23. $y''y^3 + 9 = 0$, $y(1) = 1$, $y' = 3$.
24. $y^3y'' = 4(y^4 - 1)$, $y(0) = \sqrt{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}$.
25. $y'' + 50\sin y \cos^3 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$.
26. $y'' = 8y^3$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
27. $y''y^3 + 4 = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = -2$.
28. $y'' = 2\sin^3 y \cos y$, $y(1) = \pi/2$, $y'(1) = 1$.
29. $y^3y'' = y^4 - 16$, $y(0) = 2\sqrt{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}$.
30. $y'' = 2y^3$, $y(-1) = 1$, $y'(-1) = 1$.

Задание 12.11

Решите линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами.

1. а) $y'' + 6y' + 8y = 0$,

б) $y'' + 12y' + 36 = 0$,

2. а) $y'' - y' - 12y = 0$,

б) $y'' - 16y' + 64y = 0$,

3. а) $y'' - 3y' - 4y = 0$,

б) $y'' - 8y' + 16y = 0$,

4. а) $y'' + 5y' + 4y = 0$,

б) $y'' + 22y' + 121y = 0$,

5. а) $y'' + 2y' = 0$,

б) $y'' + 2y' + y = 0$,

6. а) $y'' + y' - 12y = 0$,

б) $y'' - 26y' + 169y = 0$,

7. а) $y'' - y = 0$,

б) $y'' + 6y' + 9y = 0$,

8. а) $y'' - 3y' = 0$,

б) $y'' - 12y' + 36 = 0$,

9. а) $y'' - 8y' + 15y = 0$,

б) $y'' + 18y' + 81y = 0$,

10. а) $y'' + y' - 6y = 0$,

б) $y'' - 4y' + 4y = 0$,

11. а) $y'' - 4y' = 0$,

б) $y'' + 28y' + 196y = 0$,

12. а) $y'' - 4y' + 3y = 0$,

б) $y'' - 22y' + 121y = 0$,

13. а) $y'' - 4y = 0$,

б) $y'' + 8y' + 16y = 0$,

14. а) $y'' - 3y' + 2y = 0$,

в) $y'' + 4y' + 13y = 0$,

г) $y^{IV} - y = 0$;

в) $y'' - 10y' + 29y' = 0$,

г) $y^V - 5y''' + 4y' = 0$;

в) $y'' + 2y' + 2y = 0$,

г) $y^{IV} - 81 = 0$;

в) $y'' + 2y' + 26y = 0$,

г) $y''' - y = 0$;

в) $y'' - 2y' + 10y = 0$,

г) $y^V + 6y''' + 9y' = 0$;

в) $y'' + 10y' + 41y = 0$,

г) $y^{IV} + 4y'' + 3y = 0$;

в) $y'' + 4y' + 20y = 0$,

г) $y''' + 3y'' - y' - 3y = 0$;

в) $y'' + 6y' + 10y = 0$,

г) $y^{VI} + 4y^V + 4y^{IV} = 0$;

в) $y'' - 4y' + 5y = 0$,

г) $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$;

в) $y'' - 6y' + 34y = 0$,

г) $y^{IV} + 2y''' + 2y'' + 4y' = 0$;

в) $y'' - 8y' + 65y = 0$,

г) $y^{IV} - 16y = 0$;

в) $y'' - 4y' + 13y = 0$,

г) $y''' - 3y' - 2 = 0$;

в) $y'' + 8y' + 32y = 0$,

г) $y''' - 3y'' + 2y' = 0$;

в) $y'' + 4y' + 5y = 0$,

- 6) $y'' + 24y' + 144y = 0$,
15. a) $y'' - 7y' + 12y = 0$,
 б) $y'' + 20y' + 100y = 0$,
16. a) $y'' + 5y' + 6y = 0$,
 б) $y'' - 10y' + 25y = 0$,
17. a) $y'' + 3y' - 4y = 0$,
 б) $y'' - 30y' + 225y = 0$,
18. a) $y'' - y' = 0$,
 б) $y'' + 14y' + 49y = 0$,
19. a) $y'' - y' - 2y = 0$,
 б) $y'' - 20y' + 100y = 0$,
20. a) $y'' + y = 0$,
 б) $y'' + 22y' + 121y = 0$,
21. a) $y'' - 7y' + 10y = 0$,
 б) $y'' + 16y' + 64y = 0$,
22. a) $y'' - 5y' + 6y = 0$,
 б) $y'' - 14y' + 49y = 0$,
23. a) $y'' + 2y' - 3y = 0$,
 б) $y'' + 26y' + 169y = 0$,
24. a) $y'' + 4y' + 3y = 0$,
 б) $y'' - 6y' + 9y = 0$,
25. a) $y'' - 2y' - 3y = 0$,
 б) $y'' + 30y' + 225y = 0$,
26. a) $y'' - 6y' + 5y = 0$,
 б) $y'' - 2y' + y = 0$,
27. a) $y'' + 3y' - 10y = 0$,
 б) $y'' - 32y' + 256y = 0$,
28. a) $y'' + 3y' + 2y = 0$,
 б) $y'' + 10y' + 25y = 0$,
29. a) $y'' + 2y' - 8y = 0$,

- г) $y^V - y^{IV} + y' - y = 0$;
- в) $y'' - 2y' + 2y = 0$,
 г) $y^{IV} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = 0$;
- в) $y'' + 2y' + 5y = 0$,
 г) $y^{IV} + 5y'' + 4y = 0$;
- в) $y'' - 4y' + 8y = 0$,
 г) $y^{IV} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = 0$;
- в) $y'' + 6y' + 18y = 0$,
 г) $y''' - 6y'' + 5y' = 0$;
- в) $y'' + 8y' + 20y = 0$,
 г) $y^V + 4y''' = 0$;
- в) $y'' - 6y' + 13y = 0$,
 г) $y^{IV} + 2y''' + y'' = 0$;
- в) $y'' + 10y' + 34y = 0$,
 г) $y''' + 4y'' + 5y' + 2y = 0$;
- в) $y'' - 2y' + 17y = 0$,
 г) $y''' - y'' - 9y' + 9y = 0$;
- в) $y'' + 8y' + 25y = 0$,
 г) $y''' - 7y'' + 15y' - 9y = 0$;
- в) $y'' - 2y' + 5y = 0$,
 г) $y''' + y'' - 6y' = 0$;
- в) $y'' - 4y' + 20y = 0$,
 г) $y^V + 4y''' = 0$;
- в) $y'' + 4y' + 29y = 0$,
 г) $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$;
- в) $y'' - 10y' + 26y = 0$,
 г) $y^{IV} + 3y'' + 2y = 0$;
- в) $y'' + 4y' + 8y = 0$,
 г) $y'' + 4y' + 4y = 0$;
- в) $y'' + 2y' + 10y = 0$,

$$\begin{array}{ll} \text{б) } y'' - 24y' + 144y = 0, & \text{г) } y^{IV} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = 0; \\ 30. \text{ а) } y'' - 6y' + 8y = 0, & \text{в) } y'' + 6y' + 25y = 0, \\ \text{б) } y'' - 18y' + 81y = 0, & \text{г) } y^{VI} + 2y^V + y^{IV} = 0. \end{array}$$

Задание 12.12

Найдите вид частного решения $\bar{y}(x)$ неоднородных дифференциальных уравнений со специальной правой частью.

$$\begin{array}{l} 1. \text{ а) } y'' + y' - 2y = (x^2 - x - 4)e^x - (x^2 + 1)e^{3x} - (x^3 + 2)\cos 2x, \\ \text{б) } y'' + 8y' + 25y = xe^x - x \sin 2x + x^2 e^{-4x} \cos 3x; \\ 2. \text{ а) } y'' - 5y' + 6y = (x^3 - x)e^{2x} + (x^2 + 4x - 1)e^{-x} + \\ + ((x^2 - 4)\cos x + x^2 \sin x)e^{-x}, \\ \text{б) } y'' + 16y = (2x^2 + 3)e^{-x} + ((x \cos 4x) - (x^2 + 2x)\sin 4x) + \\ + (5x - 1)e^{-4x} \cos 4x; \\ 3. \text{ а) } y'' + 7y' + 12y = (x^2 - x)e^{-3x} + x \sin 2x + (x^3 - x^2)e^x, \\ \text{б) } y'' + 2y' + 10y = (3x - 1)e^{-2x} + ((3x - 2)\cos 3x + 5\sin 3x)e^{-x} + \\ + (x^2 + 1)e^{2x} \sin 4x; \\ 4. \text{ а) } y'' + 5y' + 4y = x^3 + x + xe^{-x} + (x^2 \sin 2x + x \cos 2x), \\ \text{б) } y'' + 9y' + 18y = (3x - 7)e^{-2x} + ((x^2 - 4x)\cos x + (x - 1)\sin x)e^x + \\ + (x - 1)e^{-3x} \sin 3x; \\ 5. \text{ а) } y'' - 2y' + y = (x - 2)e^x + (x^2 + x - 2)e^{-5x} + (x \cos 7x - x^2 \sin 7x)e^{-3x}, \\ \text{б) } y'' + 10y' + 41y = x^3 + 3 - x \cos 2x + (x^2 \cos 4x - x \sin 4x)e^{-5x}; \\ 6. \text{ а) } y'' + 3y' = x^2 + 5x + 1 - (x^2 + 2)e^x + (x \cos x - x^2 \sin x)e^x, \\ \text{б) } y'' + 4y' + 29y = (x^2 + 6x)e^x + xe^{3x} \cos 6x + x^2 e^{-2x} \sin 5x; \\ 7. \text{ а) } y'' + y' - 12y = (x^3 + 4x^2)e^{3x} - x^2 e^x + (x \cos 4x - \sin 4x), \\ \text{б) } y'' + 4y' + 5y = (x^2 + x + 3)e^{-x} + (3\cos x - (x^2 + 1)\sin x)e^{-2x} + \\ + x^2 \sin 5x; \\ 8. \text{ а) } y'' - y' = (x^4 + x)e^{-x} + x^2 + 3x + (x \cos 4x - (x^2 + 2x)\sin 4x)e^{-3x}, \end{array}$$

- б) $y'' + 4y' + 17y = (x^2 + 1)e^{3x} - x \sin x + x^2 e^{-4x} \sin x$;
9. а) $y'' - 6y' + 9y = (x - 1)e^{3x} + (x^2 + 2x)e^x + (x \cos 6x - x \sin 6x)e^{-2x}$,
- б) $y'' - 4y' + 13y = (x^2 + x - 3)e^x + (x \cos 5x - 2 \sin 5x)e^{-x} + ((x + 3) \cos 3x - \sin 3x)e^{2x}$;
10. а) $y'' - 2y' - 3y = (x^2 + x)e^{2x} + (x - 1)e^{3x} + (x \cos x - x^2 \sin x)e^{-4x}$,
- б) $y'' + 4y = (5x - 2)e^{-4x} + (x \cos 2x + 6 \sin 2x) + ((4x + 3) \cos 5x - \sin 5x)e^{6x}$;
11. а) $y'' - 3y' + 2y = (x^2 - 3x - 1)e^x + x^3 e^{-x} + (x^3 \cos 3x - x \sin 3x)e^{4x}$,
- б) $y'' + 10y' + 26y = xe^{-7x} + (x^2 \cos x - x \sin x)e^{-x} + (x^2 + 2x + 2)e^{-5x} \sin x$;
12. а) $y'' - 6y' + 8y = (x^2 + 3x - 7)e^{-x} + x^2 e^{2x} - x^3 \sin 4x$,
- б) $y'' + 2y' + 2y = (5x + 2)e^{-3x} + ((x^2 + 2x) \cos x + 5 \sin x)e^x + ((3x - 5) \cos 2x + (x^2 - 4) \sin 2x)e^x$;
13. а) $y'' - 9y = (x^2 + 2x - 1)e^{-3x} - xe^x + xe^{2x} \cos 4x$,
- б) $y'' + 8y' + 41y = x^3 e^x - ((x + 1) \cos 2x - x^2 \sin 2x) + xe^{-4x} \cos 5x$;
14. а) $y'' + 3y' - 4y = (x^3 - x)e^{-x} + x^2 e^x - (x \cos x + x^2 \sin x)e^{-2x}$,
- б) $y'' + 6y' + 10y = (3x + 2)e^{2x} - ((x^2 + 1) \cos 4x - x \sin 4x)e^x + xe^{-3x} \sin x$;
15. а) $y'' + y' = x^3 + x - 4 - x^2 e^x + x^3 e^{2x} \sin 6x$,
- б) $y'' - 10y' + 29y = (x^2 - 3x)e^{4x} - (x \cos 2x + 4 \sin 2x)e^{5x} + x \cos 3x$;
16. а) $y'' - 4y' + 4y = (x^2 + x - 3)e^{-x} + (x^2 + 2x - 1)e^{2x} + x^3 \sin 5x$,
- б) $y'' + 2y' + 17y = (x^2 + x - 4)e^{3x} + (x^2 + x + 1)e^x \cos 4x + (5 \cos 7x - (x^2 + x) \sin 7x)e^{2x}$;
17. а) $y'' - 2y' = (x^2 + 3x - 5)e^{2x} + (x^3 - 1)e^x + ((x^2 + 5x) \cos 2x - x \sin 2x)e^{-5x}$,
- б) $y'' - 6y' + 13y = (x^2 - x + 4)e^{5x} -$

- $-\left((x+2)\cos 2x + (x^2+3)\sin 2x\right)e^{3x} + x^2 \cos x$;
 18. a) $y'' - 4y' + 3y = (x^3 + x^2 - x)e^{-2x} + xe^{3x} + e^{5x} \cos x$,
 б) $y'' + y = (4x^2 + 1)e^x - x^3 \cos 2x + ((2x^2 + 5)\cos x - \sin x)$;
 19. a) $y'' - 16y = (x^2 - 3x)e^{-4x} + xe^{2x} + x^2 e^x \sin 3x$,
 б) $y'' + 2y' + 26y = (x-2)e^{2x} + (x \cos 6x - 3 \sin 6x)e^x +$
 $+(x^2 \cos 5x - 5 \sin 5x)e^{-x}$;
 20. a) $y'' + 2y' = (x^2 + 3x - 1) + (x^3 - 2x)e^x + (x \cos 3x + x^3 \sin 3x)e^{5x}$,
 б) $y'' - 4y' + 8y = (x+4)e^{4x} - x^2 e^{2x} \sin 2x + ((x+5)\cos 3x + \sin 3x)$;
 21. a) $y'' + y' - 6y = (x^3 - x^2 + 3)e^{-x} + (x^2 + 5x)e^{2x} - x^2 \sin 2x$,
 б) $y'' + 8y' + 20y = x^2 e^{-x} + x \cos 6x + (x \cos 2x - x^2 \sin 2x)e^{-4x}$;
 22. a) $y'' + 6y' + 8y = xe^{3x} - (x^2 + 1)e^{-4x} + x^2 \cos x$,
 б) $y'' + 25y = (x^3 - x)e^x + (x^2 - 1)\sin 5x +$
 $+(4x - 3)\cos x + (x^2 - 5x)\sin x)e^{2x}$;
 23. a) $y'' + 4y' + 3y = (x^2 + 6x)e^{-x} + x^3 - x + xe^x \cos 3x$,
 б) $y'' - 6y' + 25y = (x^2 - x)e^{-x} +$
 $+(x \cos 4x - (x^2 + 1)\sin 4x)e^{3x} + (x^2 + 2x)\cos x$;
 24. a) $y'' - y = (x^2 - x - 7)e^{2x} + (x^3 + x)e^x - x^2 \cos 2x$,
 б) $y'' - 10y' + 34y = xe^x + (x \cos 3x + (x^2 - 2)\sin 3x)e^{5x} + x^3 \sin 2x$;
 25. a) $y'' - 2y' - 8y = (x^3 + x^2 - 3)e^x + (x^2 + x + 2)e^{-2x} + x \sin 3x$,
 б) $y'' - 8y' + 32y = (x^2 + 1)e^{-3x} + x^3 \cos 2x - (3 \cos 4x - x \sin 4x)e^{4x}$;
 26. a) $y'' + 3y' + 2y = (x^3 - x + 2)e^x - (x^2 + 4x)e^{-x} + (x^2 \cos x - x \sin x)e^{3x}$,
 б) $y'' + 10y' + 50y = x^2 e^{-x} + x^2 e^{-5x} \sin 5x + x \cos 7x$;
 27. a) $y'' + 2y' - 3y = (x^2 - x + 2)e^x + x^3 e^{2x} + (x^2 \cos 3x - x \sin 3x)e^{4x}$,
 б) $y'' + 4y' + 20y = (x-1)e^{3x} - (x^2 \cos 4x + 3 \sin 4x)e^{-2x} + 5 \cos x$;
 28. a) $y'' - 4y = (x^3 + x^2 - 5)e^{3x} + x^2 e^{2x} - (x^2 \cos x + (x+2)\sin x)e^{6x}$,

$$\begin{aligned}
& \text{б) } y'' + 6y' + 34y = (x^3 + 2) + (x - 4)e^{-2x} + (2\cos 5x(x^2 + x)\sin 5x)e^{-3x}; \\
29. \text{ а) } & y'' - y' - 6y = (x^2 + x - 1)e^{-2x} + x^3e^{2x} + \\
& + ((x^2 + x)\cos 4x - x\sin 4x)e^{-3x}, \\
& \text{б) } y'' + 4y' + 5y = (x^2 + x + 3)e^{-x} + (3\cos x - (x^2 + 1)\sin x)e^{-2x} + \\
& + x^2\sin 5x; \\
30. \text{ а) } & y'' - 5y' + 4y = (x^2 + x - 4)e^x + (x^3 - 1) + (x\cos 2x - x^2\sin 2x)e^{3x}, \\
& \text{б) } y'' + 9y = (x^3 + 1)e^{2x} + ((x^2 - x + 2)\cos 4x - x\sin 4x)e^{-x} + \\
& + (x^2\cos 3x - 2\sin 3x).
\end{aligned}$$

Задание 12.13

Решите задачу Коши.

1) $y'' + y + \sin 2x = 0,$	$y(\pi) = y'(\pi) = 1;$
2) $y'' + y' - 2y = 8\sin 2x,$	$y(0) = -\frac{2}{5}, \quad y'(0) = 1;$
3) $y'' + 4y = \cos 2x,$	$y(0) = 0, \quad y'(0) = -1;$
4) $y'' - 5y' + 6y = 52\sin x,$	$y(0) = 10, \quad y'(0) = -4;$
5) $y'' + y' + 2y = 40\cos 2x,$	$y(0) = 3, \quad y'(0) = 4;$
6) $y'' + 5y' + 6y = 13\sin 3x,$	$y(0) = -\frac{1}{6}, \quad y'(0) = \frac{3}{2};$
7) $y'' - 2y' - 8y = 80\cos 2x,$	$y(0) = 2, \quad y'(0) = 0;$
8) $y'' + 4y' + 3y = 6\cos x + 8\sin x,$	$y(0) = 9, \quad y'(0) = 4;$
9) $y'' - 9y = 20\cos x,$	$y(0) = 1, \quad y'(0) = -1;$
10) $y'' + 5y' = \cos 3x - 3\sin 3x,$	$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$
11) $y'' - 6y' = 6\cos 2x - \sin 2x,$	$y(0) = 2, \quad y'(0) = 0;$
12) $y'' - 4y' + 3y = 8\cos x - 6\sin x,$	$y(0) = 3, \quad y'(0) = 2;$
13) $y'' - 3y' - 4y = 17\sin x,$	$y(0) = 5, \quad y'(0) = 6;$
14) $y'' + 2y' + y = \cos x + x,$	$y(0) = y'(0) = 0;$
15) $y'' + 2y' + 5y = 10\cos x,$	$y(0) = -2, \quad y'(0) = 3;$
16) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}\sin 3x,$	$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$

- 17) $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 8x$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$;
 18) $y'' - 4y' + 8y = e^x (2 \sin x - \cos x)$, $y(0) = y'(0) = 0$;
 19) $y'' + 2y' = 3e^x (\sin x + \cos x)$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$;
 20) $y'' + y = 2 \cos 5x + 3 \sin 5x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 2$;
 21) $y'' - 2y' + 5y = -17 \sin 2x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -3$;
 22) $y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \sin 4x$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 0$;
 23) $y'' + 2y' = -2e^x (\sin x + \cos x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0,5$;
 24) $y'' + 9y = 9(\sin 3x - \cos 3x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;
 25) $y'' - 4y' + 8y = 4 \sin 2x$, $y(0) = \frac{13}{20}$, $y'(0) = \frac{19}{10}$;
 26) $y'' - 2y' + y = 2x + \sin x$, $y(0) = y'(0) = 0$;
 27) $y'' - 3y' - 4y = 5 \cos x$, $y(0) = y'(0) = 0$;
 28) $y'' + y' = \sin^2 x$, $y(0) = 0,1$, $y'(0) = 0$;
 29) $y'' - 9y = e^{3x} \cos x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;
 30) $y'' - 3y' - 4y = x \cos x$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Задание 12.14

Найдите решение задачи Коши.

- 1) $y'' - 7y' + 12y = e^{3x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$;
 2) $y'' - 2y' = e^x (x^2 + x - 3)$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 2$;
 3) $y'' - 4y' = xe^{2x}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{1}{32}$;
 4) $y'' + y' = 2xe^x$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 0,5$;
 5) $y'' - 5y' + 6y = x^2 - x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = \frac{1}{9}$;
 6) $y'' + y' = x + 1$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$;
 7) $y'' - 4y' + 5y = 8e^x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$;
 8) $y'' - 6y' + 13y = 25xe^{2x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$;
 9) $y'' + 6y' + 9y = 9x^2 + 12x + 2$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$;
 10) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 3$;

- | | |
|---|-----------------------------------|
| 11) $y'' + 4y' + 4y = xe^{2x}$, | $y(0) = 2, y'(0) = 3;$ |
| 12) $y'' - 6y' + 8y = 16x^2 - 4,$ | $y(0) = 5, y'(0) = 7;$ |
| 13) $y'' - y = 2e^x - x^2,$ | $y(0) = 0, y'(0) = 1;$ |
| 14) $y'' + 3y' - 4y = e^{-4x} + xe^{-x},$ | $y(0) = 0, y'(0) = -\frac{1}{5};$ |
| 15) $y'' + 2y' + y = xe^{-x},$ | $y(0) = 0, y'(0) = 1;$ |
| 16) $y'' + y' = 2x^2e^x,$ | $y(0) = 5, y'(0) = 0, 5;$ |
| 17) $y'' - 2y' = e^{2x} + x^2 + 1,$ | $y(0) = \frac{1}{8}, y'(0) = 1;$ |
| 18) $y'' + y' = 2(1 - x^2),$ | $y(0) = y'(0) = 1;$ |
| 19) $y'' + 16y = 5e^{-2x},$ | $y(0) = 0, y'(0) = 5;$ |
| 20) $4y'' - y = 3e^{\frac{x}{2}},$ | $y(0) = 0, y'(0) = 2;$ |
| 21) $y'' + 2y' + 5y = 5x + 2,$ | $y(0) = 0, y'(0) = 1;$ |
| 22) $y'' + 4y = x^2,$ | $y(0) = 1, y'(0) = 3;$ |
| 23) $y'' - 2y' = 2e^x,$ | $y(1) = -1, y'(1) = 0;$ |
| 24) $y'' + y = 4e^x,$ | $y(0) = 4, y'(0) = -3;$ |
| 25) $5y'' - 6y' + 5y = 2x^2 - x + 2,$ | $y(0) = y'(0) = 0;$ |
| 26) $y'' - y' = 2(1 - x),$ | $y(0) = y'(0) = 1;$ |
| 27) $y'' + 2y' + y = e^x + e^{-x},$ | $y(0) = 1, y'(0) = -3;$ |
| 28) $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + \frac{x}{2},$ | $y(0) = 0, 5, y'(0) = -1;$ |
| 29) $y'' - y = xe^x,$ | $y(0) = 1, y'(0) = -1;$ |
| 30) $y'' + y' = 5x + 2e^x,$ | $y(0) = 0, y'(0) = -2.$ |

Задание 12.15

Найти общее решение дифференциального уравнения.

- $y'' + 3y' + 2y = 1 - x^2.$
- $y'' - y' = x^2 + x.$
- $y^{IV} - y'' = 5(x + 2)^2$
- $y^{IV} + 2y''' + y'' = x^2 + x - 1.$
- $y'' - y'' = 6x^2 + 3x.$
- $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 2x.$
- $y^{IV} - 2y''' + y'' - y' = 2x(1 - x).$
- $y^V - y^{IV} = 2x + 3.$

9. $3y^{IV} + y''' = 6x - 1$.
10. $y''' + y'' = 5x^2 - 1$.
11. $7y''' - y'' = 12x$.
12. $y''' - y' = 3x^2 - 2x + 1$.
13. $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = x - 3$.
14. $y''' - 4y'' = 32 - 384x^2$.
15. $y''' + y'' = 49 - 24x^2$.
16. $y''' - 13y'' + 12y' = x - 1$.
17. $y''' - y'' = 6x + 5$.
18. $y''' - 5y'' + 6y' = (x - 1)^2$.
19. $y''' - 13y'' + 12y' = 18x^2 - 39$.
20. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 4x^2$.
21. $y^{IV} + 4y''' + 4y'' = x - x^2$.
22. $y''' + 3y'' + 2y' = 3x^2 + 2x$.
23. $y''' - y'' = 4x^2 - 3x + 2$.
24. $y^{IV} + 2y''' + y'' - y' = 12x^2 - 6x$.
25. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 2 - 3x^2$.
26. $y''' - 2y'' = 3x^2 + x - 4$.
27. $y^{IV} + y''' = x$.
28. $y''' + 3y'' + 2y' = x^2 + 2x + 3$.
29. $y^{IV} - 6y''' + 9y'' = 3x - 1$.
30. $y^{IV} + y''' = 12x + 6$.

Задание 12.16

Найти общее решение дифференциального уравнения.

1. $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = (16 - 12x)e^{-x}$.
2. $y''' - 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^x$.
3. $y''' - y'' - y' + y = (3x + 7)e^{2x}$.
4. $y''' - 2y'' + y' = (2x + 5)e^{2x}$.
5. $y''' - 3y'' + 4y = (18x - 21)e^{-x}$.
6. $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = (2x - 5)e^x$.
7. $y''' - 4y'' + 4y' = (x - 1)e^x$.
8. $y''' + 2y'' + y' = (18x + 21)e^{2x}$.
9. $y''' + y'' - y' - y = (8x + 4)e^x$.
10. $y''' - 3y'' - 2y = -4xe^x$.
11. $y''' - 3y'' + 2y = (4x + 9)e^{2x}$.
12. $y''' + 4y'' + 5y' + 2y = (12x + 16)e^{-x}$.
13. $y''' - y'' - 2y' = (6x - 11)e^{-x}$.
14. $y''' + y'' - 2y' = (6x + 5)e^x$.
15. $y''' + 4y'' + 4y' = (9x + 15)e^x$.
16. $y''' - 3y'' - y' + 3y = (4 - 8x)e^x$.
17. $y''' - y'' - 4y' + 4y = (7 - 6x)e^x$.

18. $y''' + 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^{-x}$.
19. $y''' - 5y'' + 7y' - 3y = (20 - 16x)e^{-x}$.
20. $y''' - 4y'' + 3y' = -4xe^{-x}$.
21. $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = e^{-x}(32x - 32)$.
22. $y''' - 6y'' + 9y' = (20 - 16x)e^{-x}$.
23. $y''' - 7y'' + 15y' - 9y = (8x - 12)e^x$.
24. $y''' - y'' - 5y' - 3y = -(8x + 4)e^x$.
25. $y''' + 5y'' + 7y' + 3y = (16x + 20)e^x$.
26. $y''' - 2y'' - 3y' = (8x - 14)e^{-x}$.
27. $y''' + 2y'' - 3y' = (8x + 6)e^x$.
28. $y''' + 6y'' + 9y' = (16x + 24)e^{-x}$.
29. $y''' - y'' - 9y' + 9y = (12 - 16x)e^x$.
30. $y''' + 4y'' + 3y' = 4(1 - x)e^{-x}$.

Задание 12.17

Найти общее решение дифференциального уравнения.

1. $y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x)$.
2. $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x} \sin 6x$.
3. $y'' + 2y' = -2e^x(\sin x + \cos x)$.
4. $y'' + y = 2 \cos 7x + 3 \sin 7x$.
5. $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x$.
6. $y'' - 4y' + 8y = e^x(5 \sin x - 3 \cos x)$.
7. $y'' + 2y' = e^{2x}(\sin x + \cos x)$.
8. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 3x$.
9. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 4x$.
10. $y'' + y = 2 \cos 3x - 3 \sin 3x$.
11. $y'' + 2y' + 5y = -2 \sin x$.
12. $y'' - 4y' + 8y = e^x(-3 \sin x + 4 \cos x)$.
13. $y'' + 2y' = 10e^x(\sin x + \cos x)$.
14. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 5x$.
15. $y'' + y = 2 \cos 5x + 3 \sin 5x$.

16. $y'' + 2y' + 5y = -17 \sin 2x$.
18. $y'' - 4y' + 8y = e^x (3 \sin x + 5 \cos x)$.
19. $y'' + 2y' = 6e^x (\sin x + \cos x)$.
20. $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x} \sin 4x$.
21. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 5x$.
22. $y'' + y = 2 \cos 7x - 3 \sin 7x$.
23. $y'' + 2y' + 5y = -\cos x$.
24. $y'' - 4y' + 8y = e^x (2 \sin x - \cos x)$.
25. $y'' + 2y' = 3e^x (\sin x + \cos x)$.
26. $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 4x$.
27. $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 8x$.
28. $y'' + 2y' + 5y = 10 \cos x$.
29. $y'' + y = 2 \cos 4x + 3 \sin 4x$.
30. $y'' - 4y' + 8y = e^x (-\sin x + 2 \cos x)$.

Задание 12.18

Найдите общее решение дифференциального уравнения второго порядка.

$$1) y'' + 2y' + 2y = \frac{e^{-x}}{\sin x};$$

$$9) y'' - 5y' + 6y = \frac{e^{4x}}{\sqrt{1 - e^{2x}}};$$

$$2) y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^5};$$

$$10) y'' - 2y' + y = e^x \ln x;$$

$$3) y'' + y = \operatorname{tg}^2 x;$$

$$11) y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{4x}}{\sqrt{1 + e^{2x}}};$$

$$4) y'' + 4y' + 4y = e^{-2x} \ln x;$$

$$12) y'' - y' = e^{2x} \sqrt{1 - e^{2x}};$$

$$5) y'' - y' = \frac{1}{1 + e^x};$$

$$13) y'' + 3y' = \frac{9e^{3x}}{1 + e^{3x}};$$

$$6) y'' + 4y = 8 \operatorname{ctg} 2x;$$

$$14) y'' - 6y' + 8y = \frac{4}{1 + e^{-2x}};$$

$$7) y'' + 2y' + y = 3e^{-x} \sqrt{x+1};$$

$$15) y'' - 9y' + 18y = \frac{9e^{3x}}{1 + e^{-3x}};$$

$$8) y'' - y' = e^{2x} \operatorname{cose}^x;$$

$$16) y'' + 6y' + 8y = \frac{4e^{-2x}}{2 + e^{2x}};$$

17) $y'' - 4y' + 5y = \frac{e^{2x}}{\cos x}$;

24) $y'' - y' = \frac{e^{-x}}{2 + e^{-x}}$;

18) $y'' + 4y = \frac{2}{\cos 2x}$;

25) $y'' - y' = \frac{e^{-x}}{2 + e^{-x}}$;

19) $y'' - y' = \frac{e^x}{1 + e^x}$;

26) $y'' - 6y' + 8y = \frac{4e^{2x}}{1 + e^{-2x}}$;

20) $y'' + y = \frac{1}{\cos 2x}$;

27) $y'' + 16y = \frac{16}{\sin 4x}$;

21) $y'' - 6y' + 9y = \frac{e^{3x}}{\sqrt{1+x}}$;

28) $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^x}{1 + e^{-x}}$;

22) $y'' + 8y' + 16y = \frac{e^{-4x}}{\sqrt{1-x^2}}$;

29) $y'' - 2y' = \frac{4e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$;

23) $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{\sqrt{4-x^2}}$;

30) $y'' + 4y = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Задание 12.19

Решите системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

1)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 7x - 9y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 3y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y, \\ \frac{dy}{dt} = 5x + y; \end{cases}$$

2)
$$\begin{cases} x' = x + 2y, \\ y' = 2x + y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = 4x - 2y, \\ y' = 5x + 2y; \end{cases}$$

3)
$$\begin{cases} x' = -2x + 4y, \\ y' = -6x + 8y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = x + 2y; \end{cases}$$

4)
$$\begin{cases} x' = -x + 2y, \\ y' = -4x + 5y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = 5x - 2y, \\ y' = 13x + 3y; \end{cases}$$

5)
$$\begin{cases} x' = 5x + 3y, \\ y' = x + 3y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = 7x - 5y, \\ y' = 5x - 3y; \end{cases}$$

6)
$$\begin{cases} x' = 7x - 4y, \\ y' = 4x - 3y; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = -x + 3y, \\ y' = -3x + 5y; \end{cases}$$

- | | | |
|-----|--|---|
| 7) | $\begin{cases} x' = -x + 2y, \\ y' = 2x - y; \end{cases}$ | $\begin{cases} x' = 4x - 5y, \\ y' = x + 2y; \end{cases}$ |
| 8) | $\begin{cases} x' = 3x + 2y, \\ y' = 2x + 3y; \end{cases}$ | $\begin{cases} x' = 5x - 4y, \\ y' = 4x - 3y; \end{cases}$ |
| 9) | $\begin{cases} x' = 5x + 4y, \\ y' = 6x + 3y; \end{cases}$ | $\begin{cases} x' = -3x + 13y, \\ y' = -2x + 7y; \end{cases}$ |
| 10) | $\begin{cases} x' = -2x - 5y, \\ y' = 5x + 8y; \end{cases}$ | $\begin{cases} x' = 3x - 2y, \\ y' = x + y; \end{cases}$ |
| 11) | $\begin{cases} x' = 5x - 6y, \\ y' = 2x - 3y; \end{cases}$ | $\begin{cases} x' = 4x + y, \\ y' = -x + 2y; \end{cases}$ |
| 12) | $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = x + 3y; \end{cases}$ | $\begin{cases} x' = 5x + 2y, \\ y' = -5x + 3y; \end{cases}$ |
| 13) | $\begin{cases} x' = 5x - 2y, \\ y' = 8x - 3y; \end{cases}$ | $\begin{cases} x' = 3x - 5y, \\ y' = x + y; \end{cases}$ |
| 14) | $\begin{cases} x' = 4x + 6y, \\ y' = 4x + 2y; \end{cases}$ | $\begin{cases} x' = 3x - y, \\ y' = x + y; \end{cases}$ |
| 15) | $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = 8x + y; \end{cases}$ | $\begin{cases} x' = -2x + 13y, \\ y' = -2x + 8y; \end{cases}$ |
| 16) | $\begin{cases} x' = x + 5y, \\ y' = 5x + y; \end{cases}$ | $\begin{cases} x' = 4x - 2y, \\ y' = x + 2y; \end{cases}$ |
| 17) | $\begin{cases} x' = -2x + 3y, \\ y' = -3x + 8y; \end{cases}$ | $\begin{cases} x' = 5x + y, \\ y' = -x + 3y; \end{cases}$ |
| 18) | $\begin{cases} x' = 5x - 2y, \\ y' = 6x - 3y; \end{cases}$ | $\begin{cases} x' = 3x + y, \\ y' = -x + y; \end{cases}$ |
| 19) | $\begin{cases} x' = -x + 4y, \\ y' = -2x + 5y; \end{cases}$ | $\begin{cases} x' = 3x + 2y, \\ y' = -5x + y; \end{cases}$ |
| 20) | $\begin{cases} x' = 2x + 3y, \\ y' = 3x + 2y; \end{cases}$ | $\begin{cases} x' = 5x + y, \\ y' = -5x + 3y; \end{cases}$ |
| 21) | $\begin{cases} x' = -3x + 4y, \\ y' = -4x + 7y; \end{cases}$ | $\begin{cases} x' = -x - 5y, \\ y' = 2x + 5y; \end{cases}$ |

$$\begin{array}{ll}
22) \begin{cases} x' = 3x + 2y, \\ y' = x + 2y; \end{cases} & \begin{cases} x' = 5x + 2y, \\ y' = -8x - 3y; \end{cases} \\
23) \begin{cases} x' = 8x - 3y, \\ y' = 7x - 2y; \end{cases} & \begin{cases} x' = 8x - 2y, \\ y' = 13x - 2y; \end{cases} \\
24) \begin{cases} x' = 8x - 6y, \\ y' = 4x - 2y; \end{cases} & \begin{cases} x' = 5x - 3y, \\ y' = 3x - y; \end{cases} \\
25) \begin{cases} x' = -3x + y, \\ y' = -9x + 7y; \end{cases} & \begin{cases} x' = 5x - 2y, \\ y' = x + 3y; \end{cases} \\
26) \begin{cases} x' = 2x + y, \\ y' = 2x + 3y; \end{cases} & \begin{cases} x' = 4x - 17y, \\ y' = x + 2y; \end{cases} \\
27) \begin{cases} x' = 8x - 3y, \\ y' = 3x - 2y; \end{cases} & \begin{cases} x' = -3x + 5y, \\ y' = -5x + 7y; \end{cases} \\
28) \begin{cases} x' = 5x + 4y, \\ y' = 2x + 3y; \end{cases} & \begin{cases} x' = 8x + 5y, \\ y' = -5x - 2y; \end{cases} \\
29) \begin{cases} x' = -2x + 7y, \\ y' = -3x + 8y; \end{cases} & \begin{cases} x' = 5x - y, \\ y' = x + 3y; \end{cases} \\
30) \begin{cases} x' = 4x - y, \\ y' = -x + 4y; \end{cases} & \begin{cases} x' = 7x - 2y, \\ y' = 13x - 3y. \end{cases}
\end{array}$$

Задание 12.20

Решите системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

$$1) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + y - e^{2t}, \\ \frac{dy}{dt} = y - 2x; \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 4y - 8, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 6y; \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2y - x + 1, \\ \frac{dy}{dt} = 3y - 2x; \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - 3y + \sin t, \\ \frac{dy}{dt} = 2x - y - 2 \cos t; \end{cases}$$

$$5) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + 2y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 5 \sin t; \end{cases}$$

$$6) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 4y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 3y + 3e^t; \end{cases}$$

$$7) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 3y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 2y + 2 \sin t; \end{cases}$$

$$8) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + y - e^{2t}, \\ \frac{dy}{dt} = y - 2x; \end{cases}$$

$$9) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - 2y + t, \\ \frac{dy}{dt} = 3x - 4y; \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + y + e^t; \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y + 2e^t, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y - 3e^t; \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y, \\ \frac{dy}{dt} = 3x + 4y; \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - y, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2e^t; \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 4y, \\ \frac{dy}{dt} = x - 3y + 3e^t; \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 2y + 4e^{5t}, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y; \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5x + 3y + e^{-5t}, \\ \frac{dy}{dt} = 3y + 3e^{-5t}; \end{cases}$$

$$17) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -5x + 3y + e^{-5t}, \\ \frac{dy}{dt} = 3y + 3e^{-5t}; \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 7x + 2y + e^{7t}, \\ \frac{dy}{dt} = 3y - e^{7t}; \end{cases}$$

$$19) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x + 4y + e^t, \\ \frac{dy}{dt} = -5x - y + te^t; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 9x + 5y; \end{cases}$$

$$21) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - y + 8t, \\ \frac{dy}{dt} = 5x - y; \end{cases}$$

$$22) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + y + \cos t, \\ \frac{dy}{dt} = -x + 2 \sin t; \end{cases}$$

$$23) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 3x - y, \\ \frac{dy}{dt} = 4x - y + 2e^t; \end{cases}$$

$$24) \begin{cases} \frac{dx}{dt} + 2x + y = \sin t, \\ \frac{dy}{dt} - 4x - 2y = \cos t; \end{cases}$$

$$25) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x + 4y + e^t, \\ \frac{dy}{dt} = 4x + 5y + 1; \end{cases}$$

$$26) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - \cos t, \\ \frac{dy}{dt} = -x + \sin t; \end{cases}$$

$$27) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = -3x - 4y + 2t, \\ \frac{dy}{dt} = x + y + t; \end{cases}$$

$$28) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x - y - 5t + 1, \\ \frac{dy}{dt} = x + 2y + t - 1; \end{cases}$$

$$29) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = e^t - y, \\ \frac{dy}{dt} = e^{-t} + x; \end{cases}$$

$$30) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 5x - y + e^t, \\ \frac{dy}{dt} = 9x + 5y + te^t. \end{cases}$$

Задание 12.21

Найдите решение задачи.

1. Пусть $N(t)$ – количество бактерий в сосуде. Известно, что производная $N'(t)$ (скорость размножения бактерий) пропорциональна $N(t)$ с коэффициентом пропорциональности k . Определить k , если в 10 часов в сосуде было 2 000 бактерий, а в 12 часов уже 32 000.

2. Найти все линии, у которых отрезок касательной между точкой касания и осью ординат относится к отрезку касательной между осями как 2:3.

3. В полностью заполненном баке находится 200 литров водного раствора соли с содержанием соли 40 кг. В 9.00 включается устройство, которое подает в бак 20 литров 10-процентного раствора соли в минуту.

После мгновенного перемешивания столько же раствора выливается. Найти время, за которое в баке будет 12-процентный раствор соли.

4. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $M(2; 10)$, обладающую тем свойством, что площадь трапеции, ограниченной осями координат, касательной и ординатой точки касания, есть величина постоянная, равная 9 см^2 .

5. Скорость остывания воды в чайнике пропорциональна разности температур чайника и кухни. Чайник выключился в 10.20 при температуре воды 100°C . В 10.30 температура воды в чайнике была 80°C . Найти время, за которое температура воды в чайнике будет равна 40°C , если температура воздуха на кухне 20°C .

6. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(4; 2)$ и обладающую тем свойством, что площадь треугольника, образованного касательной, осью абсцисс и перпендикуляром, проведенным из точки касания к оси Ox , есть величина постоянная, равная 4.

7. 1 января 1980 года было захоронено 2 500 кг радиоактивного вещества. На 1 января 2000 года от него осталось 2 000 кг. Сколько радиоактивного вещества будет в захоронении на 1 января 2300 года?

8. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(1; 4)$ и обладающей тем свойством, что отношение длины радиус-вектора к длине отрезка, отсекаемого касательной на оси Oy , равно 3.

9. Пусть $N(t)$ – количество бактерий в сосуде. Известно, что $N(0)=20$, $N(10)=1\,000$, производная $N'(t)$ (скорость размножения бактерий) пропорциональна $N(t)$. Определить момент времени, когда число бактерий будет равно 2 000 000.

10. Найти все линии, у которых отрезок касательной между точкой касания и осью абсцисс относится к отрезку касательной между осями как 3:4.

11. Рыболовецкий бот движется по заливу со скоростью 25 км/ч. Через 1 минуту после остановки двигателя его скорость составила 15 км/ч. Считая, что сопротивление воды пропорционально квадрату скорости лодки, найти скорость лодки через 3 минуты после остановки двигателя.

12. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $M(3; 8)$, обладающую тем свойством, что площадь трапеции, ограниченной осями координат, касательной и абсциссой точки касания, есть величина постоянная, равная 10 см^2 .

13. Найти $N(t)$ – количество бактерий в сосуде, если $N(0)=10$, производная $N'(t)$ (скорость размножения бактерий) равна сумме двух слагаемых, одно из которых равно $50 \cdot N(t)$, а другое – $0,2 \cdot N^2(t)$.

14. Найти уравнение кривой, проходящую через точку $(3; 4)$ и обладающую тем свойством, что площадь треугольника, образованного касательной, осью ординат и перпендикуляром, проведенным из точки касания к оси Ox , есть величина постоянная, равная 5.

15. Пусть $N(t)$ – количество бактерий в сосуде. Известно, что производная $N'(t)$ (скорость размножения бактерий) пропорциональна $N(t)$ с коэффициентом пропорциональности k . Определить k , если в 13 часов в сосуде было 1 000 бактерий, а в 16 часов уже 25 000.

16. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(4; 2)$, обладающую тем свойством, что отношение длины радиус-вектора к длине отрезка, отсекаемого касательной на оси Ox , равно 2.

17. В полностью заполненном баке находится 300 литров водного раствора соли с содержанием соли 36 кг. В 10.00 включается устройство, которое подает в бак 10 литров 20-процентного раствора соли в минуту. После мгновенного перемешивания столько же раствора выливается. Найти время, за которое в баке будет 15-процентный раствор соли.

18. Найти все линии, у которых отрезок касательной между осями относится к отрезку касательной между точкой касания и осью ординат как 2:5.

19. Скорость остывания заготовки пропорциональна разности температуры заготовки и воздуха. Заготовка была отлита в 9.00 при нагреве ее на 300°C . В 9.40 температура заготовки была 120°C . Найти время, за которое температура заготовки будет равна 50°C , если температура в цехе 20°C .

20. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $M(1; 6)$, обладающую тем свойством, что площадь трапеции, ограниченной осями координат, касательной и ординатой точки касания, есть величина постоянная, равная 8 см^2 .

21. 1 января 1990 года было захоронено 3 000 кг радиоактивного вещества. На 1 января 2000 года от него осталось 2 400 кг. Сколько радиоактивного вещества будет в захоронении на 1 января 2200 года?

22. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(-3; 1)$, обладающую тем свойством, что площадь треугольника, образованного

касательной, осью абсцисс и перпендикуляром, проведенным из точки касания к оси Ox , есть величина постоянная, равная 5.

23. Пусть $N(t)$ – количество бактерий в сосуде. Известно, что $N(0) = 30$, $N(20) = 1500$, производная $N'(t)$ (скорость размножения бактерий) пропорциональна $N(t)$. Определить момент времени, когда число бактерий будет равно 1 000 000.

24. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(1; 3)$, обладающую тем свойством, что отношение длины отрезка, отсекаемого касательной на оси Oy , к длине радиус-вектора равно 2.

25. Пуля попадает в дерево со скоростью 500 м/с. Через одну сотую доли секунды ее скорость составила 400 м/с. Считая, что сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости пули, найти скорость пули через две сотых доли секунды после попадания в дерево.

26. Найти все линии, у которых отрезок касательной между осями относится к отрезку касательной между точкой касания и осью абсцисс как 3:5.

27. Найти $N(t)$ – количество бактерий в сосуде, если $N(0) = 20$, производная $N'(t)$ (скорость размножения бактерий) равна сумме двух слагаемых, одно из которых равно $40 \cdot N(t)$, а другое $-0,1 \cdot N^2(t)$.

28. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $M(1; 5)$, обладающую тем свойством, что площадь трапеции, ограниченной осями координат, касательной и абсциссой точки касания, есть величина постоянная, равная 8 см^2 .

29. Пусть $N(t)$ – количество бактерий в сосуде. Известно, что производная $N'(t)$ (скорость размножения бактерий) пропорциональна $N(t)$ с коэффициентом пропорциональности k . Определить k , если в 10 часов в сосуде было 800 бактерий, а в 14 часов уже 20 000.

30. Найти уравнение кривой, проходящей через точку $(1; 5)$, обладающую тем свойством, что площадь треугольника, образованного касательной, осью ординат и перпендикуляром, проведенным из точки касания к оси Oy , есть величина постоянная, равная 4.

31. В полностью заполненном баке находится 150 литров водного раствора соли с содержанием соли 18 кг. В 16.00 включается устройство, которое подает в бак 5 литров 6-процентного раствора соли в минуту. После мгновенного перемешивания столько же раствора

выливается. Найти время, за которое в баке будет 10-процентный раствор соли.

Бородинский М.П., Каибханов К.Э.,
Сухинов А.И. и другие

Сборник заданий к типовым расчетам
и контрольным работам по математическим дисциплинам
Часть I

Редактор

Проценко И.А.

Корректоры

Надточий З.И., Чиканенко Л.В.,
Селезнева Н.И.

ЛР №020565 от 23.06.97 г.

Подписано к печати 25.12.2006 г.

Формат 60×84 $\frac{1}{16}$

Бумага офсетная

Печать офсетная

Уч.-изд. л. – 33,7

Усл. п. л. – 34,0

Тираж 180 экз.

Заказ № 35

«С»

Издательство Таганрогского государственного
радиотехнического университета
ГСП 17А, Таганрог, 28, Некрасовский, 44
Типография Таганрогского государственного
радиотехнического университета
ГСП 17А, Таганрог, 28, Энгельса, 1